Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S

Badr Defouad

▶ To cite this version:

Badr Defouad. Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S. Histoire et perspectives sur les mathématiques [math.HO]. Université Denis Diderot Paris VII, 2000. Français. NNT : . tel-01253860

HAL Id: tel-01253860
https://theses.hal.science/tel-01253860

Submitted on 12 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Denis Diderot - Paris VII

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S

Présentée par : Badr DEFOUAD

Soutenue le 21 septembre 2000 devant la commission d'examen composée de :

Michèle ARTIGUE - Directeur de recherche
Georges-Louis BARON - Rapporteur
Dominique GUIN - Rapporteur
Serge HOCQUENGHEIM - Examinateur
Jean-Baptiste LAGRANGE - Examinateur

Université Denis Diderot - Paris VII

THESE DE DOCTORAT

Spécialité : didactique des mathématiques

Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S

Présentée par : Badr DEFOUAD

Soutenue le 21 septembre 2000 devant la commission d'examen composée de :

Michèle ARTIGUE - Directeur de recherche
Georges-Louis BARON - Rapporteur
Dominique GUIN - Rapporteur
Serge HOCQUENGHEIM - Examinateur
Jean-Baptiste LAGRANGE - Examinateur

Remerciements

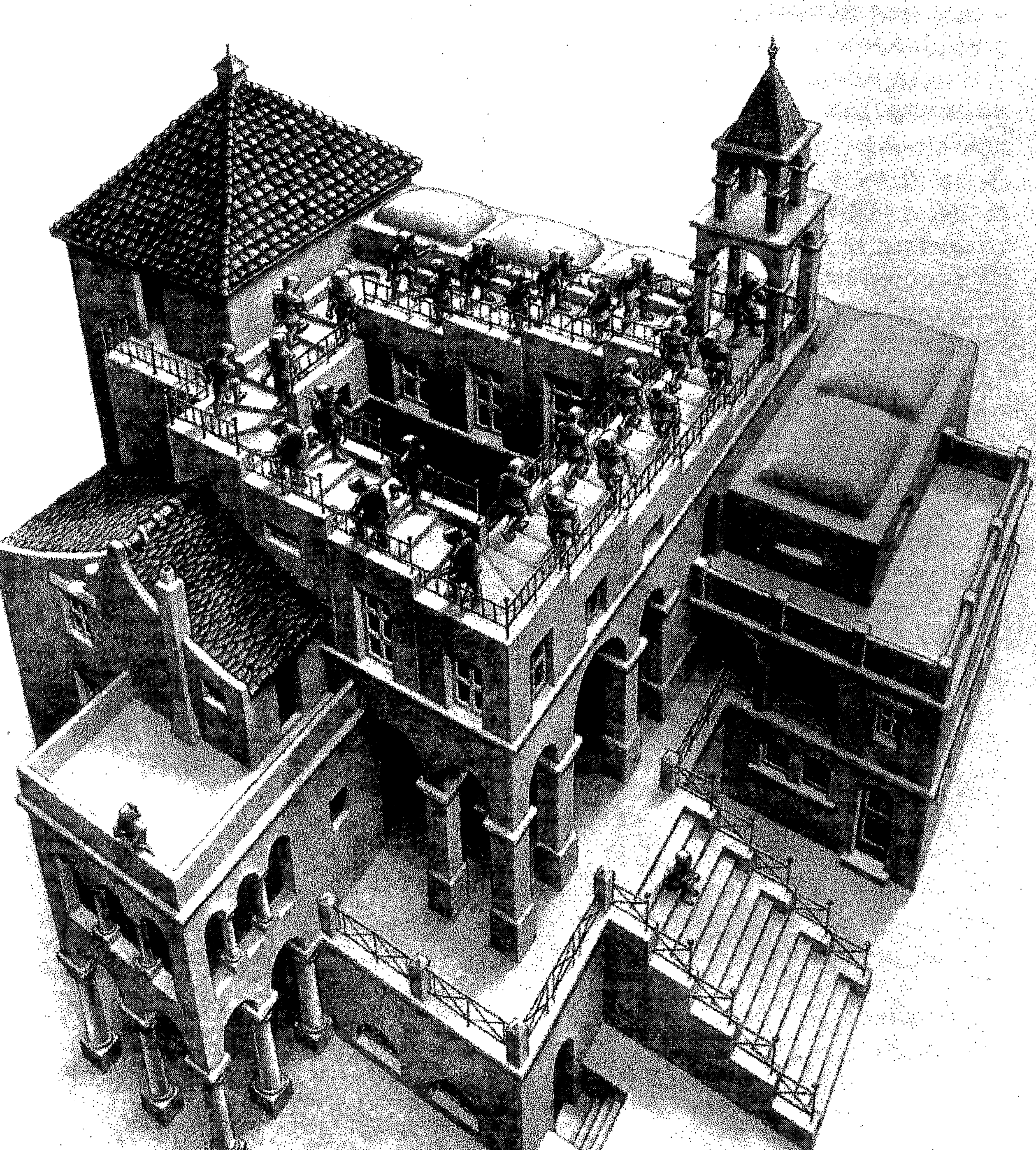
Je voudrais remercier tout d'abord les Professeurs, membres du jury, qui ont été les rapporteurs de ma thèse : Madame Dominique GUIN et Monsieur Georges-Louis BARON. Je remercie également Messieurs Jean-Baptiste LAGRANGE et Serge HOCQUENGHEIM d'avoir accepté d'être membres du jury.

Je suis particulièrement reconnaissant à Michèle ARTIGUE qui a eu confiance en mon travail et m'a encouragé en des moments où le doute commençait à s'installer. Par la rigueur, la persévérance et la qualité de réfléxion qu'elle manifeste avec une constance admirable, elle a été pour moi un exemple riche en enseignement non seulement dans mon travail de thèse, mais plus généralement dans la manière d'appréhender un domaine de la Recherche.
Ce travail n'aurait donc jamais pu aboutir sans les qualités de directeur de recherche de Michèle ARTIGUE, mais également sans la disponibilité, la convivialité et la gentillesse exceptionnelles des membres du secrétariat de l'IREM de Paris 7 : un grand merci à Martine LAMY et Nicole GILLET, mais aussi à Nadine LOUCUFIER, Annie SORNAGA, William JOANNET ainsi qu'à Odette DIERAERT et Chantal BRIEND.

Je voudrais également remercier Michèle DUPERIER pour avoir permis et facilité pendant deux années et avec une grande gentillesse, les expérimentations qui sont à la base de ce travail. Je remercie les élèves de première S du Lycée Jehan de Beauce à Chartres (années scolaires 1995-96 et 1996-97).

Un grand merci à Maha BLANCHARD pour ses conseils précieux au début de ma thèse, à Marie-Jeanne PERRIN pour ses éclairages sur l'histoire de la didactique en France, et à Jean-Baptiste LAGRANGE pour ses remarques constructives concernant mon travail.

Je voudrais enfin remercier tendrement Val Valentine . . . pour tout.



Montée et descente, *de M.C. Escher (lithographie, 1960)*

A Pamane

Table des matières

INTRODUCTION

Introduction

"*L'intégration d'outils nouveaux dans le système didactique ne va pas de soi. Il est nécessaire de prendre un certain recul, et de poser des questions fondamentales, à la fois pour comprendre les évolutions récentes ou en cours, et pour préparer l'avenir. On assiste trop souvent à une « fuite en avant », alors qu'il convient de tenir compte des « permanences didactiques », des problèmes propres à l'enseignement et à l'apprentissage, que même les technologies nouvelles ne peuvent contourner.*" Cette citation est extraite de [Chevallard, 1991], et pourtant elle semble actuelle au moment où cette thèse voit le jour. C'est dire combien les problèmes liés à l'intégration d'outils informatiques sont loin d'être résolus. Cependant, et à l'image des changements qui caractérisent tant le domaine des technologies informatiques, plusieurs évolutions et innovations ont envahi le *marché de l'éducation.* Ainsi, le calcul formel par exemple, n'est plus une exclusivité des ordinateurs et s'étend désormais à des machines qui ressemblent à s'y méprendre aux "anciennes" calculatrices graphiques (tel est le cas par exemple de la TI89 qui a déjà fait l'objet de recherches dans [Nogués & Trouche, 1999]). De même, les interfaces s'uniformisent et se référent de plus en plus à celles qui existent sur les machines que nous n'hésiterons pas à qualifier de *standard*, et qui sont proposées par l'informatique industrielle et commerciale. Cette référence est d'autant plus importante que le quotidien des acteurs du système didactique, est très imprégné de ces objets médiatisés, dans la mesure où lesdits acteurs sont des sujets sociaux. Par ailleurs, la programmation n'est plus un passage obligatoire pour utiliser la machine, et une même calculatrice peut désormais donner accès au registre formel qui était jusque là une exclusivité des ordinateurs.

Parallèlement à cette évolution des outils technologiques, les théories de l'apprentissage ont également subi une évolution significative. Ainsi, les approches dites initiales [Artigue & Lagrange, 1999] se sont-elles caractérisées par le constructivisme piagétien, à travers l'élaboration de micro mondes comme LOGO [Papert, 1990] (Papert a d'ailleurs commencé à collaborer avec l'équipe de Piaget à Genève dès l'année 1964) ou de langages informatiques tels que ISETL [Dubinsky, 1991]. Dubinsky a fondé son langage sur l'hypothèse que lorsqu'il s'agit de concepts mathématiques, le processus d'apprentissage s'accompagne d'une évolution desdits concepts d'une dimension *processus* vers une dimension *objet*, et ce par *encapsulation-intériorisation.*

Ces approches initiales ont ensuite évolué vers une prise en compte de la complexité des situations réelles [Noss & Hoyles, 1996] et de la contextualisation des connaissances et savoirs, où la dimension socio-culturelle est de plus en plus présente, gagnant ainsi en réalisme, en précision et en nuance. En effet, dans ces nouvelles approches, qui se réfèrent le plus souvent à Vygotsky, ou à l'approche anthropologique de Y. Chevallard en France, l'accent est mis sur l'influence des institutions sur la genèse des rapports personnels de l'élève aux objets mathématiques [Chevallard, 1992b], ainsi que sur l'importance des instruments (ou artefacts) matériels ou symboliques dans les apprentissages [Rabardel, 1995], ou encore le rôle considérable des médiations [Bruner, 1991].
Enfin, sur le plan didactique, c'est la question de la viabilité écologique des "nouvelles" technologies dans le système didactique qui s'est installée au centre des recherches, avec une prise de conscience du fait que la légitimité épistémologique de ces outils n'entraîne pas *de facto* leur légitimité didactique. Par ailleurs, il s'est avéré que cette dernière nécessiterait des études assez précises pour mettre en lumière, par exemple, les rapports que peuvent entretenir les pratiques liées à l'utilisation des machines avec celles qui préexistaient dans l'environnement usuel papier/crayon [Abboud & al, 1995] et [Lagrange, 2000].

C'est globalement dans cette perspective, que notre recherche, d'ordre qualitatif, s'inscrit et caresse l'ambition de participer ainsi à la réflexion et à la compréhension des processus d'apprentissage dans des environnements tels que celui offert par la TI92, tout en prenant en considération les dimensions institutionnelle et cognitive. Pour cela, nous avons éprouvé la nécessité de choisir des cadres théoriques adéquats, où seraient prises en compte non seulement ces deux dimensions mais également les dimensions instrumentale et développementale. Sur le plan théorique, nous nous appuierons principalement sur deux approches : d'une part, celle développée en ergonomie cognitive, et d'autre part l'approche anthropologique du didactique. Nous essaierons ensuite d'articuler ces deux approches en rapprochant les deux notions fondamentales de *schème* et de *technique* mais également celles de *genèse instrumentale* et de *praxéologie*.

Sur le plan expérimental, notre travail s'intègre dans un projet national dont l'objet est le mode d'appropriation de calculatrices complexes intégrant des possibilités de calcul symbolique et de géométrie par des élèves de lycée. Ce projet avait également pour but d'étudier la mise en relation de ces modes d'appropriation avec les stratégies développées par les enseignants afin d'intégrer efficacement ces outils à l'enseignement des mathématiques. Plus précisément, nous faisions partie de l'équipe de recherche du pôle de Paris dont l'étude était centrée sur l'intégration de la calculatrice TI92 au niveau de la première S et concernait les débuts de l'enseignement de l'analyse. Les expérimentations se sont déroulées dans deux classes situées l'une à Chartres, l'autre à Caen, dont les enseignants respectifs Michèle Dupérier et Guy Juge avaient été membres du groupe Calcul Formel de la DITEN, et les directions de recherche respectives étaient assurées par Michèle Artigue et Jean-Baptiste Lagrange. Notre travail de thèse s'appuiera ainsi partiellement sur les données de cette recherche et sur certaines de ses analyses. Nous découperons notre étude en deux parties qui traitent chacune d'une année d'expérimentation, en tenant compte pour chacune d'elles de deux dimensions : l'une institutionnelle que nous approcherons par des observations de classe, et l'autre personnelle où nous nous appuierons sur des entretiens individuels de certains élèves ainsi que sur des questionnaires et des productions écrites.

PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE :

Il est aujourd'hui une évidence : l'évolution de la société est liée à celle des moyens informatiques. Dans cette mouvance, nous ne pouvons pas dire que l' Ecole se situe à l'avant-garde, loin s'en faut, et les raisons en semblent bien complexes. Loin de vouloir répondre à toutes les questions qui peuvent se poser à ce sujet, notre recherche s'intéresse plus modestement à certaines d'entre elles concernant la dimension instrumentale de l'activité mathématique. Notre problématique s'inscrit donc dans le cadre de l'intégration des technologies informatiques dans l'enseignement des mathématiques, et a pour points d'ancrage les questions suivantes :

- Quelles connaissances sont nécessaires à la gestion efficace de tels objets comme instruments du travail mathématique et comment se construisent-elles ?
- Comment ces connaissances combinent-elles connaissances mathématiques et connaissance de l'outil ?
- Comment ces connaissances s'articulent-elles avec celles visées par l'institution scolaire en mathématiques ? Comment leur apprentissage est-il pris en compte par l'institution ?
- Comment les processus d'appropriation de ces connaissances dépendent-ils des caractéristiques des élèves?

C'est donc sur ces questions que nous nous sommes proposés de travailler dans notre recherche, et ce au niveau de la première S. Etant donné la nature de notre problématique, nous pensons que deux approches sont indispensables : une approche d'ordre cognitif prenant en compte la dimension instrumentale du travail des élèves, et une approche prenant en compte la dimension institutionnelle du travail avec de tels instruments. Par ailleurs, il ne faut pas perdre de vue, nous semble-t-il les rapports d'ordre dialectique qu'entretiennent ces deux dimensions.

Dans le chapitre qui suit, nous développerons notre cadre théorique en commençant par le versant cognitif. Nous nous appuierons sur la notion d'instrument telle qu'elle est perçue en Ergonomie cognitive, en nous référant notamment à [Rabardel, 1995]. Nous essaierons d'illustrer cette approche par des exemples liés directement à l'outil qui est au centre de notre recherche, la calculatrice TI92 et nous proposerons chaque fois qu'il nous le semblera utile des adaptations à notre cadre de recherche, des questionnements ainsi que des hypothèses relevant de cette approche. Dans un deuxième temps, nous aborderons la dimension institutionnelle en nous basant sur l'approche anthropologique du didactique développée par Y. Chevallard.

La Dimension Cognitive

Habitués aux problèmes d'apprentissage dans des environnements technologiquement complexes, les chercheurs en ergonomie cognitive ont effectué beaucoup de travaux sur ce sujet. Nous nous appuierons essentiellement sur les développements de P. Rabardel parus dans un ouvrage de synthèse [Rabardel, 95], où il nous a semblé intéressant de puiser afin d'approfondir notre réflexion sur l'instrumentation et dans le but d'élaborer des outils pour l'analyse.

Nous commencerons par présenter les différents rapports à l'artefact que l'auteur distingue. Ensuite, nous présenterons de manière synthétique les diverses approches qui ont marqué les recherches sur l'instrumentation, avant d'introduire la notion d'instrument telle qu'il la définit.

Différents rapports à l'artefact :

Dans une approche anthropocentrique, Rabardel délaisse le terme d'**objet matériel fabriqué** ou encore celui d'instrument (très courant dans la littérature) pour le terme d'artefact. Par ce choix, il tient à souligner le caractère neutre des objets (matériels ou symboliques) lorsqu'ils ne sont pas associés à une activité dont l'homme est au centre. L'auteur considère trois types de rapports - complémentaires - possibles à l'artefact :

- un rapport s'inscrivant dans une logique de fonctionnement et qui revient à considérer l'artefact comme un système technique *(Comment l'artefact fonctionne-t-il ?)*

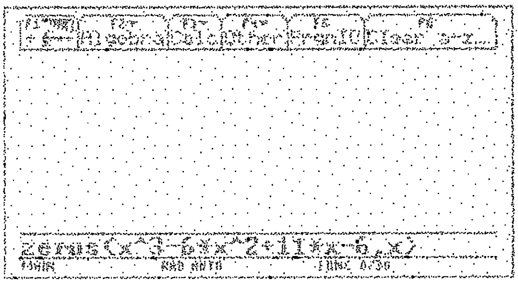
- un rapport s'inscrivant dans une logique de transformation des choses et qui tient compte de l'artefact du point de vue de ses fonctions *(Comment l'artefact transforme-t-il les objets ?)*
- un rapport instrumental s'inscrivant dans une logique de l'activité et de l'utilisation, où l'artefact est vu comme moyen d'action pour le sujet dans une activité *(Comment l'artefact est-il « instrumenté » ? Ou comment le sujet utilise-t-il l'artefact pour son activité ?)*.

Pour illustrer ces différentes logiques, Rabardel propose l'exemple suivant qui est pris dans le domaine de l'extrusion plastique: "L'opérateur conduit une machine qui permet de fabriquer du film plastique dont l'épaisseur doit être constante à quelques microns près. Il est notamment responsable de la qualité du film. La matière plastique arrive sous forme de granulés, est fondue dans un four puis extrudée sous forme de film. Constatant une irrégularité d'épaisseur, l'opérateur fait l'hypothèse que le filtre destiné à homogénéiser la matière en fusion est partiellement colmaté (logique de fonctionnement) ce qui entraîne un débit de matière insuffisant, source des irrégularités dans le produit (logique du processus de transformation des choses). Il augmente la température du four (logique d'utilisation) afin de rendre la matière plus fluide et de rétablir ainsi la qualité du produit. "
Comme on le voit dans cet exemple, le rapport instrumental est en général, loin d'être indépendant des deux autres types de rapports, et l'"*utilisation instrumentale*" (utilisation comme moyen de l'action) d'un artefact peut même mettre en jeu simultanément la logique de fonctionnement ainsi que la logique de transformation des choses.

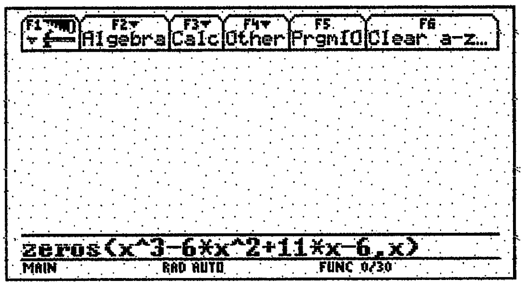
Cette distinction entre trois rapports à l'artefact nous semble tout à fait pertinente en ce qui concerne notre artefact : la TI92, comme nous allons le voir dans l'exemple suivant. Précisons que dans ce chapitre, chaque fois que nous prendrons des exemples, ils concerneront des élèves "fictifs" au sens où les actions décrites ne seront pas nécessairement des actions réellement celles observées dans la recherche, mais seront réalistes par rapport aux observations réalisées. En effet, d'une part les tâches seront généralement choisies parmi celles susceptibles d'intervenir à ce niveau d'enseignement ; d'autre part les réponses proposées se baseront d'une manière globale sur les observations qui ont accompagné notre recherche, mais en opérant des regroupements et élagages destinés à clarifier notre propos.

<u>*Exemple*</u>

Ayant à étudier le signe de l'expression x^3-6x^2+11x-6, un élève pense tout d'abord à en chercher les zéros à l'aide de la commande Zeros située dans l'application HOME. (Cette action est inscrite dans une logique d'utilisation*). Il active alors cette commande et entreprend de composer l'objet que la machine pourra reconnaître afin qu'elle affiche le résultat recherché :*



Cette action - orientée vers une logique de transformation - *comprend la prise en compte de la syntaxe propre à cette commande. Cependant, et avant d'appuyer sur la touche ENTER pour valider, il remarque que la visibilité de l'écran n'est pas satisfaisante et, pour l'améliorer, il appuie simultanément sur les touches ♦ et +, ce qui rend les symboles beaucoup plus nets* (c'est le réglage du contraste qui est ici en jeu, relevant d'une logique de fonctionnement*).*



Cet exemple éclaire bien, nous semble-t-il, la nécessité de prendre en compte le sujet dans une définition de l'instrument, mais auparavant, et avec Rabardel comme guide, survolons les divers travaux et les différentes conceptions qui ont accompagné les recherches en instrumentation, principalement dans le domaine de la psychologie.

La notion d'instrument :

Rabardel remarque que dans la littérature concernant les activités instrumentées, les auteurs tiennent compte (de manière explicite ou implicite) dans leur majorité des trois pôles que sont "le **sujet** (utilisateur, opérateur, travailleur, agent, . . .); l'**instrument** (l'outil, la machine, le système, l'ustensile, le produit, . . .) et l'**objet** vers lequel l'action à l'aide de l'instrument est dirigée (matière, réel, objet de l'activité, du travail, autre sujet . . .). Il rappelle alors le modèle SAI proposé auparavant dans (Rabardel et Vérillon, 1985), pour analyser les Situations d'Activités Instrumentées.

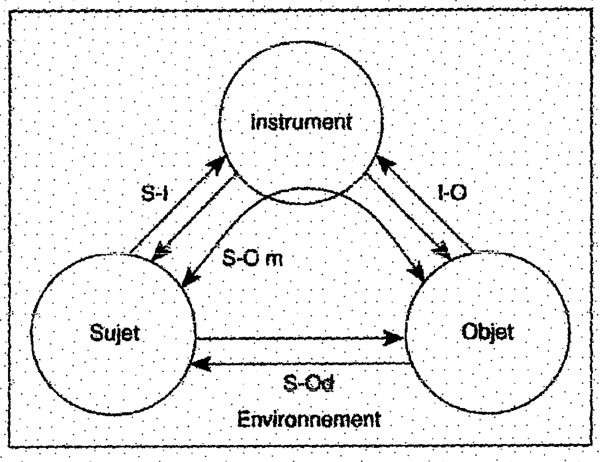


Fig. – Modèle SAI : la triade caractéristique des Situations d'Activités Instrumentées (d'après Rabardel et Vérillon, 1985).

Ce modèle tient compte non seulement des trois pôles qui apparaissent dans les analyses de ce type d'activités, mais également des liens multiples que peuvent entretenir mutuellement ces pôles. Dans l'exemple suivant emprunté par Rabardel à [Aucherie & Sacotte, 1994], nous allons voir comment ce modèle peut être mis en œuvre pour analyser la tâche d'un peintre professionnel qui utilise une décolleuse à papiers peints ("il s'agit d'un dispositif qui produit de la vapeur sous pression. L'utilisateur dispose d'une plaque métallique creuse qui, d'un côté, laisse sortir la vapeur par une série de trous - comme un fer à repasser - et, de l'autre côté, dispose d'une poignée qui permet de la manipuler") pour préparer les murs et le plafond d'une pièce. "Une observation rapide de l'activité permet d'arriver à une première description. Le peintre passe la plaque de la décolleuse sur tous les endroits où se trouve du papier peint. En même temps, il racle, à l'aide d'une spatule le papier peint qui se décolle sous l'action de la vapeur. Ensuite, il applique la décolleuse sur le plafond et explique qu'il a découvert que sous l'action de la chaleur l'enduit en mauvais état se fragilise : il ne reste plus qu'à le gratter légèrement avec la spatule. Cette description de l'activité est analysée en termes de statut des différents éléments."

L'exemple d'analyse à partir du modèle SAI, présenté dans le tableau ci-dessous, fait apparaître immédiatement quelques caractéristiques essentielles des activités avec instruments. En premier lieu, les objets de l'activité sont multiples : enduit, papier peint, plafond et varient selon les moments. De même, les instruments sont multiples : plaque décolleuse, spatule, vapeur. Un même dispositif technique (la décolleuse) comprend, pour le sujet, plusieurs instruments : dans la phase considérée la plaque et la vapeur, mais, à d'autres moments, par exemple la mise en route, des éléments tels que le couvercle de la chaudière, le robinet de gaz, etc., sont susceptibles d'avoir un statut d'instrument. Des éléments inattendus ont un statut d'instrument, par exemple la vapeur. Enfin, le peintre utilise la décolleuse pour réaliser des tâches non prévues par les concepteurs : la fragilisation de l'enduit.

Tableau : Exemple d'analyse de l'activité à partir du modèle SAI.

ACTIVITÉ	SPATULE	PLAQUE DÉCOLLEUSE	VAPEUR	ENDUIT	PAPIER PEINT	PLAFOND
Le peintre passe la plaque décolleuse sur le papier peint		instrument	instrument		objet	
Il racle avec une spatule le papier peint qui se décolle sous l'effet de la vapeur	instrument		instrument		objet	
Il applique la plaque décolleuse sur le plafond		instrument				objet
Sous l'action de la vapeur l'enduit se fragilise			instrument	objet		
Il ne reste plus qu'à le gratter avec la spatule	instrument			objet		

p.67"

Si la caractérisation de SAI par la triade sujet-machine-objet semble partagée par la plupart des auteurs, il n'en est pas de même pour la signification donnée à chacun des trois pôles. Même si le point de vue le plus répandu est celui de concevoir l'instrument comme "résultat d'une association de l'artefact à l'action du sujet comme moyen de celle-ci", d'autres approches existent. Elles se distinguent l'une de l'autre par leurs conceptions de l'utilisateur, qu'on pourrait situer "sur un continuum dont les termes extrêmes seraient d'un côté l'organisme (vivant) et de l'autre le sujet comme acteur intentionné et orienté, socialement situé. S'agissant de l'objet, les conceptions se répartiraient également sur un continuum qui va de l'idée d'objet comme milieu, voire environnement à celle d'objet de l'activité."

Avant de proposer sa définition de l'instrument, et dans le souci de vouloir inscrire sa réflexion dans le continuum des recherches sur l'instrumentation, Rabardel effectue un tour d'horizon des principaux points de vue ayant influencé ce domaine, essentiellement dans la sphère psychologique. Nous allons pour notre part en présenter un résumé qui, nous l'espérons, sera fidèle au texte de l'auteur.

Bien que la classification des approches concernant les activités instrumentées ne soit pas aisée compte tenu de la difficulté à délimiter le champ de chacune d'elles, nous pouvons distinguer toutefois deux catégories principales : les approches technocentriques où l'activité de l'homme est pensée relativement aux objets techniques, et les approches anthropocentriques qui mettent, au contraire, l'homme au centre de la réflexion sur les instruments et qui analysent son activité par rapport à lui. Dans le magma conceptuel qui sépare ces deux extrêmes, une idée semble pourtant faire l'unanimité : "l'instrument est une **entité intermédiaire**, un moyen terme, voire un univers intermédiaire entre deux autres entités que sont le sujet, acteur, utilisateur de l'instrument et l'objet sur lequel porte l'action."

Les approches technocentriques tendent à considérer les instruments indépendamment du sujet et de son activité (les classifications des instruments suivant leurs fonctions tels que : instruments de musique, instruments de chirurgie ou instruments aratoires en témoignent autant que la définition usuelle qu'on peut lire dans un dictionnaire : "**instrument** n.m. (lat. *instrumentum*). Outil, machine servant à exécuter qqch, à accomplir une opération quelconque. *Instrument de mesure*"). Bien que d'inspirations autres, certains chercheurs semblent se situer à la périphérie de cette catégorie. Citons par exemple [Prieto, 1975] dont le domaine de référence est la sémiologie et pour qui les systèmes sémiotiques sont apparentés à des instruments, à savoir des entités bifaciales "que constituent un **opérant** (classe que forment un outil déterminé et tous les autres qui possèdent la même utilité) et l'utilité correspondante". Se référant au domaine biologique, [Simondon, 1969] considère quant à lui l'instrument comme un objet technique prolongeant et adaptant l'organisme vivant qu'est l'homme, dans les rapports de celui-ci avec le milieu. On voit apparaître ici le statut médiateur de l'objet technique qui peut être en outre un instrument ou un outil. En effet, pour Simondon (In [Chauvat, 1998] : "l'instrument, à l'inverse de l'outil, prolonge et adapte les organes des sens : il est capteur, non un élément effecteur. L'instrument équipe le système sensoriel, il sert à prélever de l'information, tandis que l'outil sert à exercer une action. L'opposition de l'outil et de l'instrument n'est pas absolue ni radicale dans les formes élémentaires : un bâton peut servir à frapper ou creuser, mais aussi à tâter, sonder, explorer." Dans une perspective qui considère l'utilisateur non plus comme un être isolé mais plutôt comme un sujet social interagissant avec d'autres hommes, citons tout d'abord [Rogalski, 1993] pour qui les outils cognitifs sont "des artefacts, des objets externes au sujet, qui résultent d'un processus d'élaboration à caractère social et qui intègrent des connaissances (d'où le caractère cognitif de ces outils). Des artefacts tels que tables de données numériques, abaques, calculettes, outils logiciels, mais aussi méthodes de résolution de problèmes constituent des outils cognitifs.". Ils prennent en compte partiellement l'activité cognitive de l'utilisateur, sujet opérateur.

Dans une autre sphère de la recherche qui concerne des études comparatives de l'instrumentation chez le singe et l'homme, mais qui est toujours inscrite dans une approche où l'instrument est considéré comme un univers intermédiaire entre le sujet social et le monde, citons [Guillaume et Meyerson, 1934] qui affirment qu' " un instrument constitue pour l'animal et, semble-t-il pour l'homme, une sorte de monde intermédiaire dont les propriétés sont, ou peuvent être différentes à la fois de celles du corps et de celles des objets sur lesquels s'exerce l'action. Pour agir de manière efficace, il faut pouvoir associer ces diverses propriétés dans des situations plus ou moins variables.". Contrairement à Simondon, ces deux auteurs considèrent qu'un instrument (un bâton, par exemple) n'est pas uniquement un prolongement du bras de l'utilisateur pour atteindre un objet (un fruit), mais un monde intermédiaire qui participe à la réalisation par le sujet d'une activité propre ("par exemple pour atteindre un fruit qu'un obstacle empêche d'atteindre directement".

Les conceptions de Guillaume et Meyerson vont être enrichies - toujours dans une approche comparative entre le singe et l'homme - par [Wallon, 1941] qui voit en l'instrument un moyen pour capitaliser et transmettre les acquis de l'expérience. "C'est un objet constitué, un objet construit selon certaines techniques en vue d'autres techniques, le produit remanié d'expériences traditionnelles ou récentes dont il transmet le fruit à ceux qui l'utilisent.".

Vygotsky quant à lui, élargit la notion d'instrument d'une part en considérant le sujet (qui est au centre de son approche) comme un sujet psychologique, et d'autre part en généralisant le pôle *Objet* de la triade SAI : Sujet-Instrument-Objet. Ainsi, l'*objet* sur lequel agit le *sujet* -psychologique- dans une relation médiatisée par l'*instrument* ne se réduit pas uniquement à un objet matériel mais peut être éventuellement le psychisme du sujet lui-même ou celui d'autres sujets. La classification des instruments dépend alors du type d'objets sur lesquels le sujet peut agir : le monde matériel, son psychisme ou celui des autres. De plus, Vygotsky propose le concept d'*acte instrumental* comme unité d'analyse pour les activités instrumentées et, comme Wallon, il considère que l'instrument - qui peut être langage, cartes, signes, schèmes . . . - est un moyen de capitalisation et de transmission des connaissances.

Par ailleurs, nous retrouvons la dimension développementale qui sous-tend cette définition de l'instrument chez [Mounoud, 1970] dont l'objectif est de mettre en évidence le lien entre l'état de développement épistémique de l'enfant et l'évolution de ses conceptions de l'instrument. Si elle est centrée principalement sur le sujet (il définit l'instrument comme "un objet que le sujet associe à son action pour l'exécution d'une tâche"), l'approche de cet auteur rejoint celle de Simondon qui n'appréhende l'objet sur lequel agit le sujet - par l'intermédiaire d'un instrument - que comme objet matériel.

Soulignons enfin que pour Rabardel, l'instrument est "comme le signe, qui pour certains auteurs n'en est qu'un cas particulier, une entité bifaciale, mixte, à la fois artefact et mode d'usage, ces deux dimensions étant fondamentalement indissociables."

Définition d'un instrument :

Comme nous venons de le voir, la majorité des auteurs considère qu'il y a trois pôles qui interviennent dans les situations d'activité avec un instrument : le sujet, l'artefact et l'objet. L'artefact étant le moyen par lequel le sujet agît sur l'objet, il doit donc s'adapter au sujet d'une part et à l' objet de l'autre. Pour Rabardel, ce rôle de médiation peut être d'ordre épistémique ou d'ordre pragmatique : épistémique quand l'artefact apparaît comme un moyen permettant la connaissance de l'objet, pragmatique quand ce moyen provoque une transformation de l'objet. Il définit alors un instrument comme étant une entité mixte ayant deux composantes :

« - d'une part, un artefact (une fraction d'artefact ou un ensemble d'artefacts), matériel ou symbolique, produit par le sujet ou par d'autres.

- d'autre part, un ou des schèmes (*ce terme étant utilisé dans son acception piagétienne*) d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou d'une appropriation de schèmes sociaux d'utilisation déjà formés extérieurement à lui »

L'auteur distingue en fait "deux types de **schèmes d'utilisation (Sh.U.)** :

- des **schèmes d'usage (Sh. Us.)** relatifs aux tâches secondes, c'est-à-dire aux tâches concernant la gestion ou la transformation des propriétés et caractéristiques particulières de l'artefact. Ces schèmes peuvent se situer au niveau de schèmes élémentaires (au sens de non décomposables en unités plus petites susceptibles de répondre à un sous-but identifiable), mais ce n'est nullement nécessaire : ils peuvent eux-mêmes être constitués en totalités articulant un ensemble de schèmes élémentaires. Ce qui les caractérise, c'est leur orientation vers les tâches secondes correspondant aux actions et activités spécifiques directement liées à l'artefact.
- les **schèmes d'action instrumentée (Sh.A.I.)** relatifs aux tâches premières, à savoir les tâches orientées vers l'objet de l'activité et pour lesquelles l'artefact est un moyen d'action. Elles consistent en totalités dont la signification est donnée par l'acte global ayant pour but d'opérer des transformations sur l'objet de l'activité. Ces schèmes incorporent à titre de constituants, les schèmes du premier niveau (Sh.Us). Ce qui les caractérise, c'est qu'ils sont orientés vers les tâches premières. Ils sont constitutifs de ce que Vygotsky appelait les *actes instrumentaux*, pour lesquels il y a recomposition de l'activité dirigée vers le but principal du sujet du fait de l'insertion de l'instrument.

Pour illustrer ces définitions, Rabardel propose deux exemples :

Exemple 1 Rabardel a "emprunté cet exemple à Luigi Bandini Buti, designer milanais, à propos de l'utilisation d'un dispositif destiné au réglage d'un siège de voiture. Il s'agit d'un bouton placé sur le côté du siège; trois mouvements de commande sont possibles :

- une rotation du bouton permet de contrôler l'inclinaison du dossier;

- la translation horizontale permet de gérer le réglage de la distance siège volant;
- la translation verticale permet de régler la hauteur.

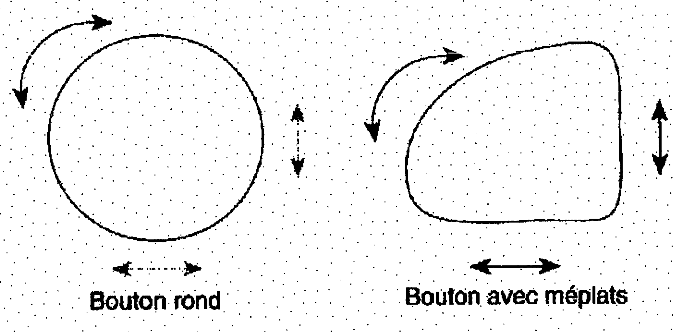


Fig. [illegible] – Deux types de boutons de réglage pour un siège de voiture (Bandini Buti).

Le premier bouton conçu était rond (fig. 13a). Il a induit systématiquement, chez les utilisateurs, un usage en rotation, les translations étant très difficilement identifiées. Le second bouton comportait deux formes planes orientées horizontalement et verticalement reliées par une forme arrondie (fig.13b). Cette combinaison de formes suggérait effectivement les différents mouvements possibles et déclenchait, par perception tactile, les actions correspondantes (tourner, tirer vers le haut ou pousser vers le bas...).

Il ne s'agit, dans cet exemple, que de la mobilisation de schèmes d'utilisation très élémentaires, les **schèmes d'usage** (tourner, tirer, pousser), constituants de base d'un schème d'utilisation les englobant : le schème de réglage qui est un **schème d'action instrumentée**. En effet, lors des premiers contacts du sujet avec le dispositif de réglage, la relation actions-résultats (en termes d'effets sur le siège) n'est pas encore constituée dans son détail (telle action entraîne tel résultat), même si elle est constituée dans son principe (c'est en agissant sur le bouton que l'on peut opérer le réglage). Il en va de même pour l'enchaînement des actions.

L'objet de l'apprentissage initial sera précisément de constituer le schème (ou l'ensemble coordonné des schèmes) de réglage qui sera alors associé à l'artefact (le bouton lieu des actions) pour former un instrument permettant d'agir sur l'objet (le siège lieu des effets)."

<u>Exemple 2</u> "Pour un conducteur confirmé, le dépassement d'un véhicule est un type d'action qui comprend des invariants identifiables : analyse de la situation permettant de déterminer le moment opportun, indication de l'intention de dépasser, si nécessaire changement de rapport

de vitesse, modification de la trajectoire du véhicule, etc. C'est un schème d'action instrumentée qui sous-tend les aspects invariants d'une telle action de dépassement. Ce schème incorpore à titre de composants des schèmes d'usage, subordonnés à son organisation générale, tels ceux qui permettent de gérer un changement de rapport de vitesse ou changement de trajectoire."

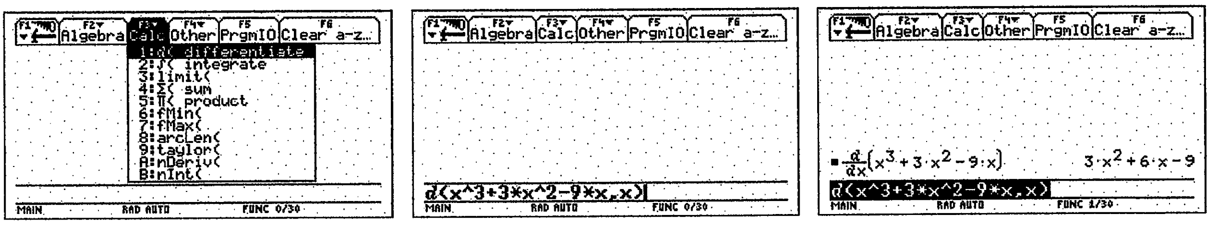
Prenons maintenant un exemple qui met en jeu l'artefact qu'est la TI92 dans une recherche d'extrema :

Supposons que pour rechercher les extrema de la fonction définie par :

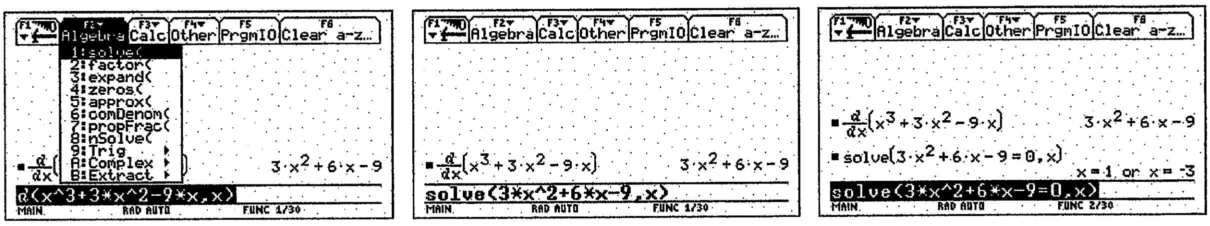
$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$$

un élève effectue ce qui suit :

1. Calcul de la dérivée en utilisant la commande ***d*** *du menu F3 de l'application HOME*

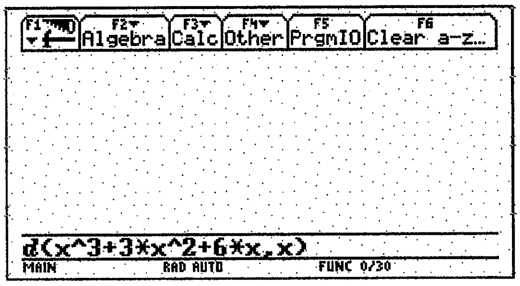


1. Recherche des zéros de la dérivée en utilisant la commande ***Solve***

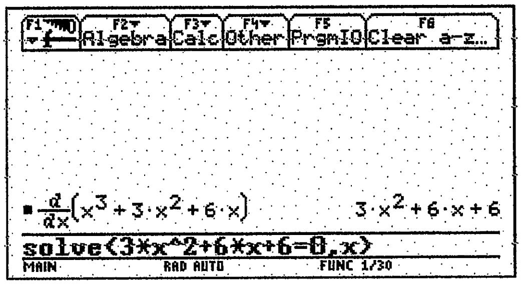


La tâche première (ou principale) étant de rechercher les extrema de la fonction f, les trois actions décrites ci-dessus constituent un ***schème d'action instrumenté*** *au cours duquel deux (sous) artefacts ont été utilisés : la commande* ***d*** *et la commande* **Solve.**

Pour *l'usage* *de chacun de ces artefacts, des conditions de syntaxe sont à respecter, ce qui se traduit par des* ***schèmes d'usage****. Ainsi, le* ***Sch.Us.*** *lié à l'artefact* ***d*** *se traduit par la composition de l'expression suivante:*



Le ***Sch.Us.*** *relatif à l'artefact* **Solve** *se traduisant par la formation -par l'élève- de l'expression suivante :*



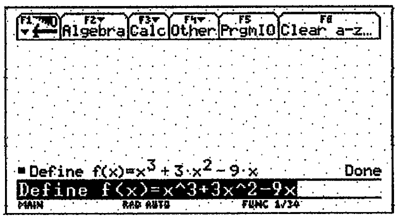
Par ailleurs, « les schèmes d'utilisation sont pluri-fonctionnels au sens où ils remplissent :

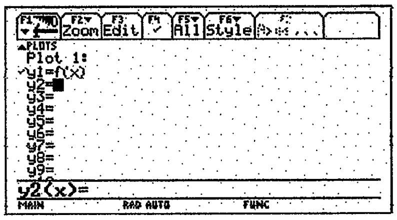
- des **fonctions épistémiques** tournées vers la compréhension des situations
- des **fonctions pragmatiques** tournées vers la transformation de la situation et l'obtention de résultats
- des **fonctions heuristiques** orientant et contrôlant l'activité. »

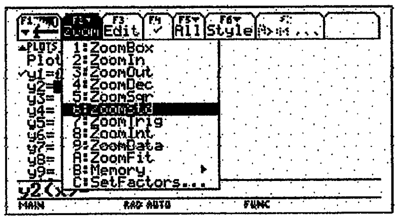
Exemple : Pour étudier les variations d'une fonction, un élève commence par la définir dans HOME puis dans Y= avant de la faire tracer en ZoomStd. *Il active ensuite la commande* ZoomFit *sans modifier l'intervalle sur les abscisses. Après cela, il calcule la dérivée en utilisant la commande* d *du menu F3 de l'application HOME, étudie son signe puis en déduit le sens de variation de la fonction.*

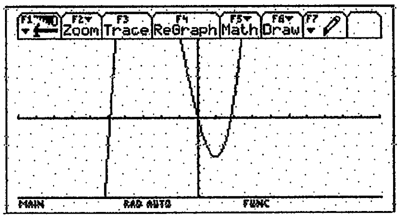
Considérons le sous-schème d'action instrumentée suivant :

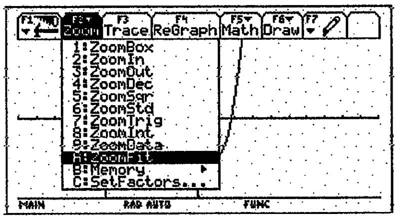
- *définition de la fonction dans HOME*
- *définition dans Y=*
- *tracé en ZoomStd*
- *tracé en ZoomFit sur [-10,10]*

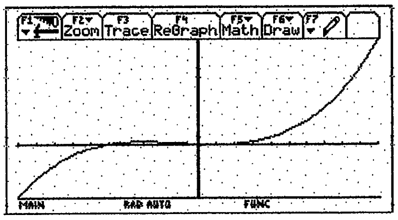












Le fait que l'élève ait commencé par le tracé nous pousse à penser que l'objectif de l'action instrumentée est de se familiariser avec la fonction à étudier. Ceci affecte au sous-schème, nous semble-t-il, une fonction épistémique, alors qu'en même temps on peut distinguer deux actions transformatrices se situant à deux niveaux différents :

- *un premier niveau qui se traduit par un changement de registre sémiotique au sens de [Duval, 1993] (la transformation de l'expression algébrique en représentation graphique)*
- *un deuxième niveau où la transformation s'effectue dans le même registre (graphique) et qui consiste en un changement de cadrage (ZoomStd puis ZoomFit sur [-10,10]).*

Ces deux transformations (de types différents) prouvent bien qu'en plus d'une fonction épistémique, le schème considéré a une fonction pragmatique.

Enfin, on peut également repérer une troisième fonctionnalité, de type heuristique cette fois-ci. En effet, le fait de commencer par définir la fonction dans HOME n'était point obligatoire. Mais on peut penser que le but de cette action est de préparer le travail probable ultérieurement dans HOME (le calcul de dérivée, par exemple), à moindres frais puisqu'en même temps, cela permet de définir la fonction dans Y= à l'aide de son nom uniquement, son *expression algébrique n'étant plus nécessaire. On voit donc que l'utilisation de certaines actions et leur ordre d'intervention dans un schème, confère à ce dernier une fonction heuristique tournée vers l'organisation et la gestion de l'activité.* * (* pour ce type d'analyse, voir également [Lagrange, 2000])

Nous avons vu jusqu'à présent qu'un instrument est l' "union" d'un artefact et de schèmes d'utilisation (qui peuvent être des schèmes d'usage ou des schèmes d'action instrumentée), que ces schèmes sont pluri-fonctionnels. Mais dans la mesure où les schèmes - et éventuellement l'artefact - ont tendance à évoluer, vu leurs caractères assimilateurs et accomodateurs, nous ne pouvons parler d'instrument sans en considérer la dimension développementale. En effet, nous pensons en accord avec Rabardel, d'une part qu'un artefact n'est pas un instrument *de facto* mais qu'il le devient, et d'autre part qu'un artefact donné ne devient pas le même instrument pour tous ses utilisateurs. Pour le cas qui nous concerne, bien qu'il ait été conçu pour un certain nombre d'utilisations (le manuel en est le témoin), nous pensons, notamment en référence à la thèse de Trouche [Trouche, 1996], que l'artefact qu'est la TI92 n'est pas appréhendé de la même manière par tous les élèves, et nous faisons l'hypothèse que les facteurs différenciateurs sont liés autant au rapport de ces élèves aux mathématiques qu'à leur rapport aux technologies informatiques et aux calculatrices graphiques. Intervient également le rapport institutionnel aux mathématiques et aux calculatrices, mais nous reprendrons toutes ces questions ultérieurement.

Genèse instrumentale :

Dorénavant, nous aborderons en termes de *genèse instrumentale* les processus accompagnant l'élaboration et l'évolution de ses instruments par le sujet. Etant donné la nature bifaciale de l'instrument, cette genèse va s'effectuer à deux niveaux :

- un premier niveau tourné vers le pôle artefact et qui correspond à l'évolution des processus ***d'instrumentalisation***. Ces derniers concernent "l'émergence et l'évolution des composantes artefact de l'instrument : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements et catachrèses[1], attribution de propriétés ou encore transformation de l'artefact (structure, fonctionnement, etc.)". Par ailleurs, bien que tournée vers le pôle artefact, l'instrumentalisation s'effectue dans un but d'adéquation au pôle objet et/ou au pôle sujet de la triade du modèle SAI. Ainsi cette adéquation peut-elle se faire soit par transformation matérielle, ce qui peut être dû à l'usage (par exemple, les chaussettes qui finissent par prendre la forme des pieds) ou encore par anticipation (par exemple, une personne gauchère désirant jouer de la guitare doit inverser la position des cordes pour s'adapter à la majorité des manuels, ou encore "les opérateurs chargés de l'analyse du minerai de nickel en Nouvelle-Calédonie qui transforment des bouteilles en plastique en instruments permettant de verser la poudre de minerai dans l'analyseur, et ce en découpant un bec verseur (adaptation au pôle objet) et une poignée (adaptation au pôle sujet))"; soit sans transformation matérielle, ce qui peut être effectué d'une manière prolongée voire permanente (par exemple, "l'utilisation d'une clef pour frapper à la place d'un marteau" ou encore le cas des *Steel Drums* qui étaient au départ (dans les années 40) de vieux barils d'essence de la marine américaine utilisés comme des tambours métalliques en Amérique latine), ou tout simplement de manière momentanée : l'instrumentalisation est alors "locale, liée à une action singulière et aux circonstances de son déroulement".

- un deuxième niveau tourné cette fois-ci vers le sujet et qui concerne les processus d'***instrumentation***, lesquels sont relatifs à "l'émergence et à l'évolution des schèmes d' utilisation et d' action instrumentée : constitution, fonctionnement, évolution par accommodation, coordination combinaison, inclusion et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués, etc."

Comme le fait remarquer l'auteur, « ces deux types de processus sont le fait du sujet. L'instrumentalisation par attribution d'une fonction à l'artefact résulte de son activité, tout comme l'accommodation de ses schèmes. Ce qui les distingue c'est l'orientation de cette activité. . . même si, selon les situations, l'un des deux processus peut être plus développé, dominant, voire seul mis en œuvre. »

---

2 En linguistique et en rhétorique, la catachrèse correspond à l'utilisation d'un mot au-delà de son usage formel ou à la place d'un autre. En ergonomie, la notion de catachrèse correspond à « l'écart entre le prévu et le réel dans l'utilisation des artefacts » (comme par exemple « l'utilisation d'une clef pour frapper à la place d'un marteau » ou encore l'utilisation par le maître d'une règle - initialement conçue pour mesurer ou pour tracer - pour désigner un élément écrit sur le tableau).

Généralement, les catachrèses sont interprétées comme des détournements de fonctions des artefacts, alors que pour l'auteur elles « n'apparaissent que comme un cas particulier d'un phénomène de caractère beaucoup plus général : la production, l'élaboration, l'institution, la transformation de ses instruments par le sujet ». Il propose alors d'interpréter les catachrèses comme dépendant d'un processus de genèse instrumentale qui, à son tour, ne s'y réduit pas.

Genèse instrumentale et TI92 :

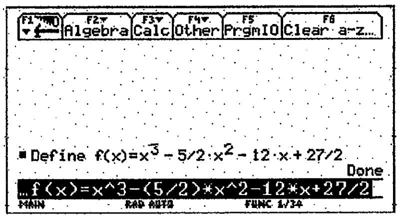
Dans la mesure où elles sont tournées vers la composante artefactuelle de l'instrument, nous allons considérer que la programmation, la découverte et l'apprentissage de nouvelles commandes et applications, la gestion des fichiers et répertoires, ainsi que l'évolution du statut des commandes et applications font essentiellement partie de l'instrumentalisation. Cette évolution affecte l'économie du travail mathématique (avec la TI92) et influe sur les schèmes d'utilisation, donc sur l'instrumentation. En évoluant à leur tour, les Schèmes d'Action Instrumentée vont entraîner des changements de statuts pour certaines commandes ou applications. De ce fait, l'instrumentation et l'instrumentalisation ne peuvent se faire l'une sans l'autre et, tout en cohabitant, elles interagissent mutuellement.
Précisons toutefois que le statut d'une commande à un moment donné serait déterminé, de notre point de vue, par l'évaluation du degré de fonctionnalité de cette commande - à savoir les capacités offertes et les contraintes induites par son utilisation -, ainsi que l'attribution d'une fonction à cette commande dans le cadre d'un type de tâches où elle peut intervenir (par exemple, pour l'obtention de résultats ou pour le contrôle).

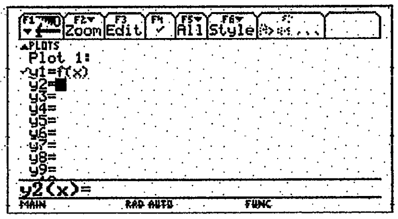
Exemple :

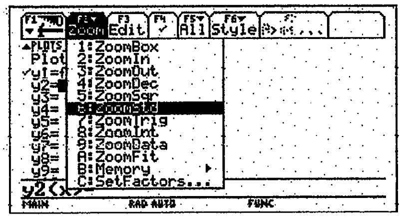
Au début de l'année*, un élève considère que la commande ZoomFit est un zoom automatique qui donne l'allure générale de la courbe. Ceci constitue donc le statut de la commande ZoomFit chez l'élève à ce moment de l'année, ce qui fait partie de l'instrumentalisation.*
Voyons maintenant l'effet sur l'instrumentation : ayant à étudier les variations de la fonction f définie par :

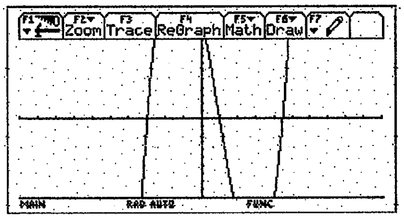
$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 12x + \frac{27}{2}$$

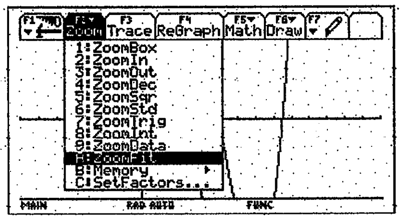
l'élève commence par tracer la courbe à la TI92 dans une phase d'anticipation, avant de faire l'étude en papier-crayon (p/c). Ainsi, il fait un ZoomStd puis un ZoomFit après avoir défini la fonction dans HOME puis dans Y=,

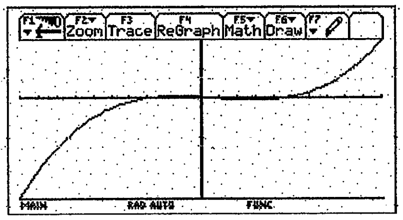








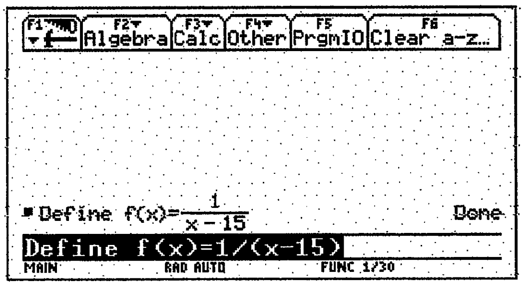


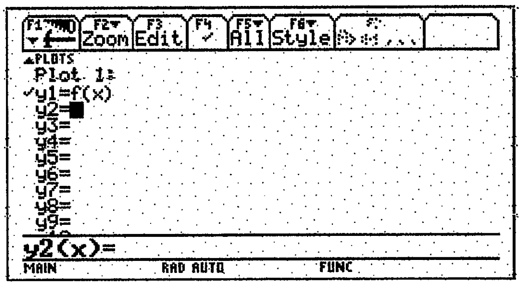


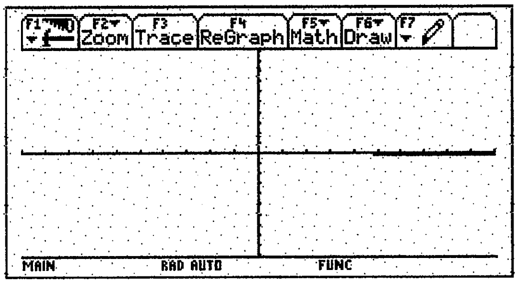
Il étudie ensuite les variations en papier-crayon et vérifie éventuellement la cohérence avec le graphique obtenu.

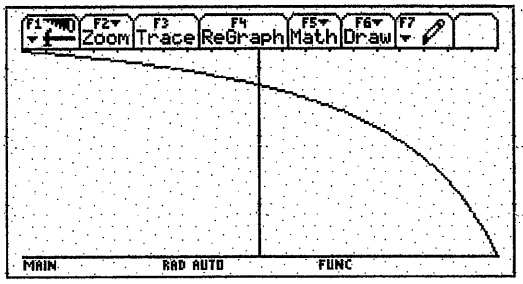
***Plus tard** dans l'année, il commence à développer les outils de contrôle graphique, en utilisant ZoomBox, ZoomOut et ZoomIn.*

***Un jour**, il a à étudier la fonction f(x) =* $\frac{1}{x-15}$. *Il déploie alors son ancien schème (définition dans HOME et dans Y= puis ZoomStd et ZoomFit) afin d'avoir son tracé dans une phase (d'anticipation) précédant son étude en P/C.*

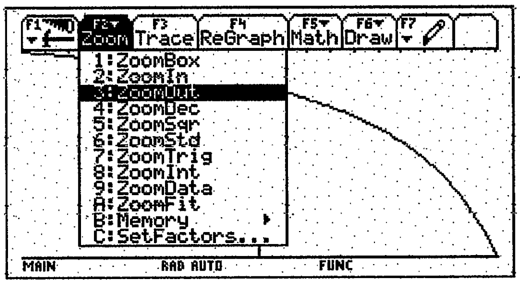


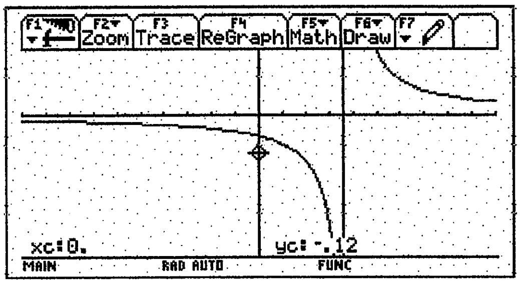






Etonné par l'allure de la courbe-TI92 (en comparaison avec les courbes qu'il a déjà rencontrées), il effectue un ZoomOut (commande qui lui est devenue familière) centré en (0;-0.12) (qui représentent les coordonnées du point proposé par défaut, lequel est situé au centre de l'écran). Il obtient alors :



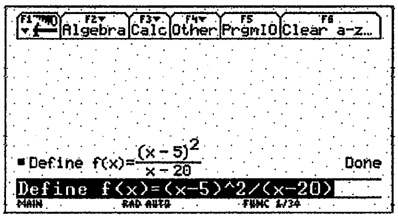


Ce nouveau schème (formé de l'ancien et de l'adjonction de ZoomOut) va conduire cet élève à reconsidérer le statut de ZoomFit. Pour lui, cette commande correspond toujours à un zoom automatique mais qui ne donne pas cependant toujours l'allure générale de la courbe.

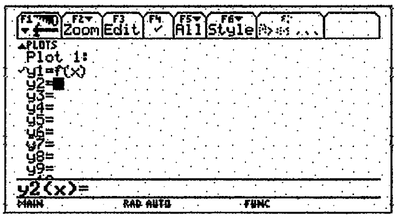
Là, on voit l'effet de l'instrumentation (adjonction de ZoomOut) sur l'instrumentalisation (changement du statut de ZoomFit).

***Un peu plus tard**, cet élève doit étudier la fonction* $f(x)=\dfrac{(x-5)^2}{x-20}$

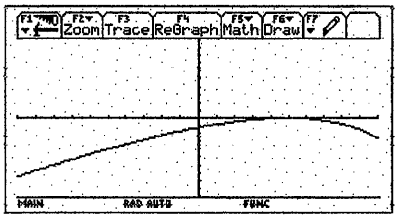
Après avoir défini f dans HOME et Y=, il fait tracer la courbe en ZoomStd puis en ZoomFit, avant de faire un ZoomOut centré en (0,-3.0750059 (qui sont les coordonnées du point proposé par défaut et qui se trouve au centre de l'écran).



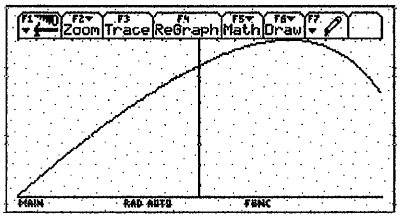
Définition dans HOME



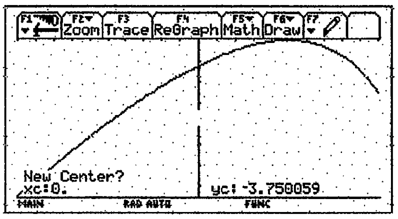
Définition dans Y=



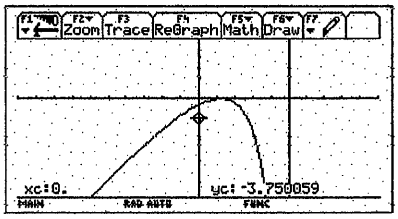
ZoomStd



ZoomFit sur [-10,10]

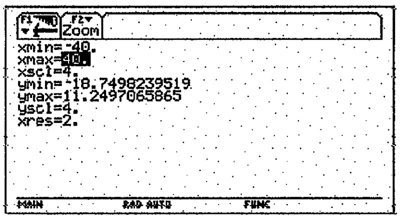


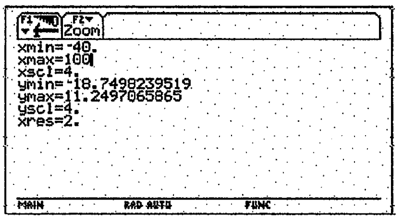
avant le ZoomOut

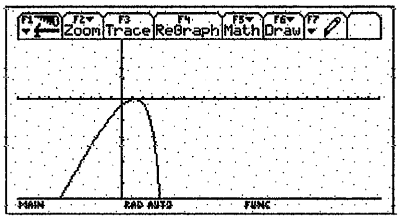


après le ZoomOut

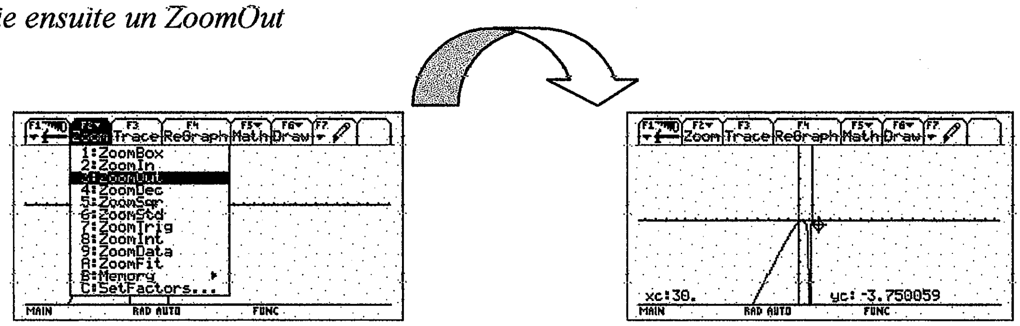
Remarquant que $f \geq 0$ si et seulement si $x \geq 20$, il pense qu'il existe une partie de la courbe située au-dessus de l'axe des x qui n'apparaît à l'écran. Il consulte WINDOW et il voit que xmax est déjà à 40. Il change alors xmax en 100 puis fait tracer la courbe :







Il essaie ensuite un ZoomOut



Et devant cet insuccès, il décide d'abandonner la phase d'anticipation pour s'engager dans une étude P/C.

Pour lui, dorénavant, ZoomFit est un zoom automatique qui ne donne pas toujours "ce qu'il faut", même s'il est combiné avec un ZoomOut et un changement manuel de fenêtre. En *conséquence, pour ses prochaines études de variation, et afin de ne plus perdre de temps, il décide d'opter pour le tracé-TI92 (avec éventuellement une utilisation de ZoomFit) mais uniquement à la fin de son étude P/C (en combinaison avec HOME), dans le but de contrôler son tableau de variation.*

Nous voyons donc que :

** D'une part (et encore une fois), l'effet de l'instrumentation (utilisation du nouveau schème intégrant un fenêtrage manuel ainsi qu'un 2ème ZoomOut) sur l'instrumentalisation.*

** D'autre part, l'effet de cette instrumentalisation (changement de statut de ZoomFit) va provoquer un changement dans l'économie de résolution, puisque d'un outil d'anticipation le tracé-TI92 va devenir un outil de contrôle. Il y a donc là un double effet sur l'activité instrumentée :*

- primo, un changement de statut pour le sous-artefact graphique (Outil d'anticipation→ Outil de contrôle) et par conséquent c'est l'instrumentalisation qui est affectée.

- secundo, un "bouleversement" du SAI qui va commencer par une résolution non graphique avant l'utilisation de l'application GRAPH pour le contrôle du tableau de variation, au lieu du SAI antérieur qui consistait en l'inverse. Par conséquent, ce changement affecte l'instrumentation.

Au début mais également tout au long de la genèse instrumentale, l'artefact agit sur la réorganisation et la restructuration de l'activité de deux manières différentes : d'une part en proposant de nouvelles possibilités à l'utilisateur, d'autre part en l'astreignant à une utilisation tenant compte des spécificités de la machine. Dans le cas qui nous intéresse, la TI92 en tant que calculatrice complexe, offre à l'élève la possibilité de dériver, de factoriser, de résoudre des équations, de calculer des limites ou même d'obtenir des représentations graphiques, avec une puissance et une rapidité inégalées jusque-là. Tout ceci participe de l'ouverture du champ des actions possibles. Cependant, l'élève doit observer scrupuleusement les consignes syntaxiques afin que sa requête soit reconnue par la machine, il doit également décortiquer les messages d'erreur et interpréter les résultats inattendus, comme il doit faire en sorte que les capacités de la mémoire ne soient pas dépassées. En somme, il doit faire face à des contraintes de différents types, et pour les besoins de notre cadre théorique, nous allons synthétiser les approches dans ce domaine de différents chercheurs tels que P. Rabardel, N. Balacheff ou L. Trouche, tout en essayant d'y contribuer nous-mêmes.

Contraintes liées à l'action instrumentée :

Dans ce paragraphe, nous commencerons par présenter les différents types de contraintes proposées par Rabardel dans le cadre de son approche cognitive des activités instrumentées. Ensuite, nous essaierons de situer par rapport à cette typologie les points de vue de deux chercheurs : d'une part, N. Balacheff dont la problématique est l'étude de la *transposition informatique*, à savoir l'analyse des processus qui sous-tendent le changement de systèmes de représentation des objets de savoir mathématiques, de l'environnement usuel P/C à l'environnement informatique, et l'étude des conséquences de ces transformations. D'autre part, L. Trouche dont la thèse [Trouche, 1996] traitait des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation dans le cadre des limites de fonctions au niveau de la Terminale et relativement à l'artefact qui nous concerne ici : la TI92.

Une typologie des contraintes selon Rabardel :

Pour P. Rabardel " l'artefact constitue pour le sujet un ensemble de contraintes qui s'imposent à lui et qu'il doit gérer dans la singularité de chacune de ses actions ". Il distingue alors trois types de contraintes :

■ Les *contraintes de modalités d'existence* qui sont liées aux caractéristiques générales de l'artefact, c'est-à-dire aux propriétés de l'artefact en tant qu'objet matériel ou cognitif.

L'auteur donne comme exemple, « un chauffeur de poids lourd qui gère en permanence sa machine pour vérifier que les conditions de son fonctionnement non destructif ou même simplement non dommageable sont réunies»

■ Les *contraintes de structuration de l'action*, liées à la préstructuration de l'action de l'utilisateur. L'auteur cite [De Terssac, 1992] à propos des "systèmes experts qui comportent un positionnement de l'opérateur et une forme de prescription plus ou moins explicite de ses actions et de son activité qui vont dans le sens d'une réduction de ses possibilités de régulation."

■ Les *contraintes de finalisation*, liées à la spécificité de l'artefact en tant que destiné à produire des transformations.

Pour illustrer ce type de contraintes, l'auteur propose l'exemple d' « un tour de métal qui n'autorise que certains types de transformations de la matière par enlèvement de copeaux. La machine définit des classes de transformations, de changements d'états possibles et des conditions de ces changements d'états. Ces transformations ne peuvent être appliquées qu'à certaines classes d'objets dont les propriétés sont spécifiques. Pour notre tour, il s'agit naturellement d'objets métalliques (mais tous ne sont sans doute pas usinables : des conditions de dureté doivent par exemple être respectées). Des extensions d'usage sont envisageables vers d'autres types d'objets présentant des propriétés voisines (ex. : matières plastiques dures), mais la classe des objets sur lesquels il est possible d'opérer des transformations à l'aide de l'artefact reste de toute façon limitée. »

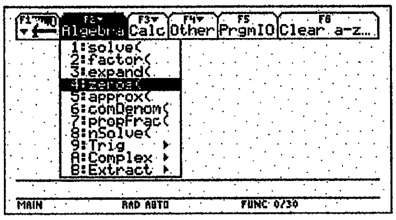
Reprenons maintenant cette typologie et essayons d'analyser sa pertinence pour le cas qui nous concerne :

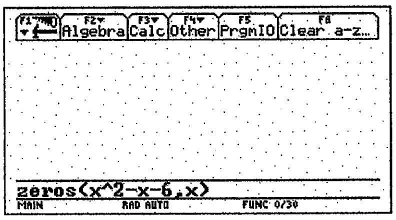
- *Contraintes de modalités d'existence :* Si la considération de ce type de contraintes est pertinente dans le cas d'un conducteur par exemple, puisque la sécurité de celui-ci, entre autres, dépend de l'entretien du véhicule, il n'en est pas de même pour un élève utilisant une TI92 pour la résolution d'une tâche mathématique. En effet, dans ce cas-là les modalités d'existence se résument au changement des piles lorsque celles-ci semblent épuisées.

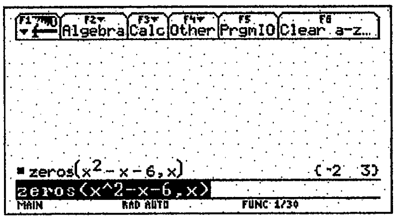
- *Contraintes de préstructuration de l'action :* Dans le cas de l'étude de la variation des fonctions, la TI92 ne peut entraîner à elle seule une réorganisation de l'activité instrumentée. En effet, étant donné que l'utilisation de la TI92 dans le cadre de notre recherche est dépendante de l'environnement institutionnel où évolue l'élève ainsi que les tâches qu'il effectue, nous ne pouvons considérer les contraintes de préstructuration de l'action sans prendre en compte le rôle déterminant des contraintes institutionnelles que nous aborderons plus loin dans la partie réservée à la dimension institutionnelle.

- *Contraintes de finalisation :* Pour ce type de contraintes, il nous paraît primordial de nous arrêter sur cette fonction de l'artefact qu'est le traitement et la transformation d'objets. Pour cela, prenons un exemple :

Ayant à résoudre l'équation x^2-x-6=0, un élève utilise la commande Zeros *de la manière suivante :*







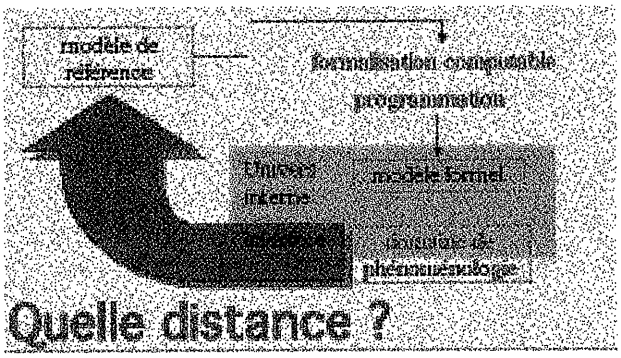
Dans cet exemple, nous pouvons analyser suivant deux points de vue cette utilisation de la commande *Zeros* :

- Une première approche qui ne prendrait pas en compte la nature mathématique de cette commande mais qui la considérerait plutôt comme un artefact qui n'est utilisable que sous certaines conditions, ces dernières se réduisant dans cet exemple à des règles régissant la syntaxe.
- Une deuxième approche qui par contre, tiendrait compte de la nature mathématique de la commande et des objets utilisés. Nous pourrions ainsi nous poser des questions sur les liens que peuvent avoir la commande *Zeros* et la tâche de résolution d'équations : la commande *Zeros* donne-t-elle des résultats 'équivalents' à ceux qui pourraient être trouvés en P/C à l'aide de la 'méthode du discriminant'? cette commande permet-elle de résoudre des équations polynomiales de degré supérieur? Quelle différence avec la commande *Solve*?

Comme cet exemple le montre, il convient de différencier deux approches quand on veut analyser une situation d'activité instrumentée mettant en jeu la TI92 en termes de contraintes de finalisation :

- Une approche qui ne prend pas en compte la nature mathématique des objets manipulés mais qui les considère comme des 'sous-artefacts' de l'objet technique qu'est la TI92. Nous détaillerons plus loin cette dimension des contraintes liées au traitement et à la transformation des objets.
- Une approche qui, au contraire, tient compte de la nature mathématique des (sous-) artefacts et des objets qui interviennent dans toute manipulation. Cette dimension rejoint la problématique de la *transposition informatique* où Balacheff pose la question de l'écart qui peut exister entre les objets mathématiques usuels (de l'*univers externe*) et leurs représentations dans la machine (*interface* et *univers interne*). Dans cette perspective, nous présentons ci-après ce concept de *transposition informatique*.

La transposition informatique :
(Balacheff 98 - http://www-cabri.imag.fr/EIAH/Balacheff/GDM98/):

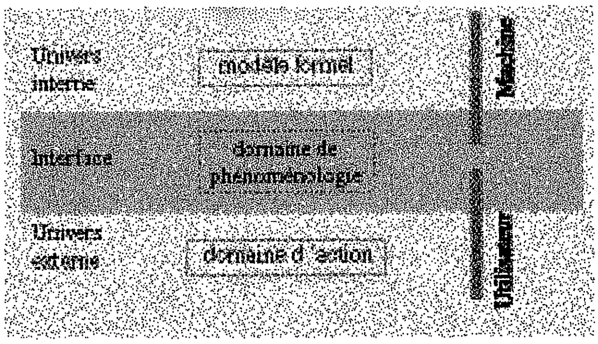


Dans le cadre de la transposition informatique où il s'intéresse à la transposition du savoir mathématique qui accompagne son implémentation dans la machine, [Balacheff, 1994b] propose de découper les EIAH (*Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain*) en trois zones :

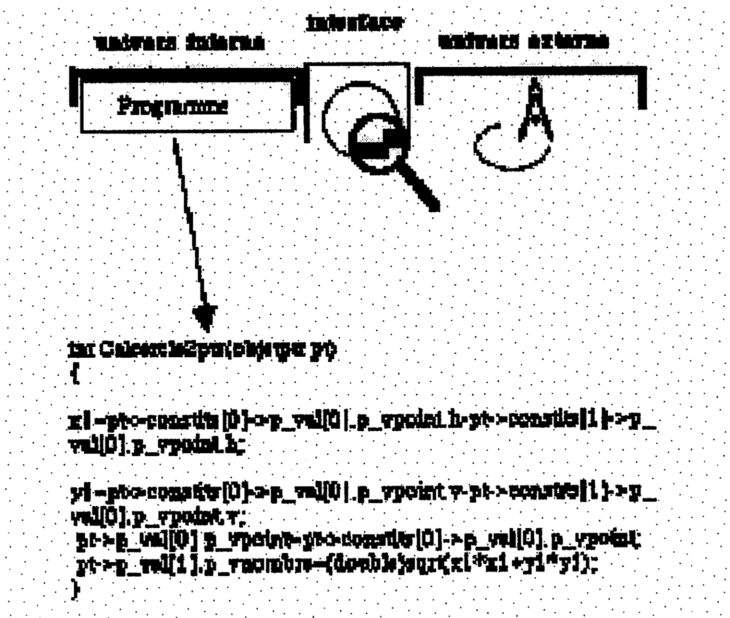
"- l'**univers interne**, fait de divers composants électroniques dont l'articulation et la mise en oeuvre permettent le «fonctionnement» du dispositif informatique.

- l'**interface**, lieu de la communication entre l'utilisateur humain et le dispositif informatique.

- l'**univers externe**, dans lequel se trouve l'opérateur humain et où lui sont éventuellement accessibles d'autres dispositifs (notamment en relation avec les connaissances en jeu dans le dispositif informatique). "



Afin d'illustrer ce régionnement, citons l'exemple du cercle proposé par l'auteur :



Evocation des représentations, à propos du cercle, dans les univers interne et externe, et à l'interface.

Dans l'univers interne, la représentation du cercle correspond à une partie de programme. Elle dépend donc des choix de modélisation du concepteur, lesquels concernent autant les représentations que les traitements internes. "A l'interface, le cercle est un ensemble de pixels dans un état particulier, par exemple noirs sur un écran blanc. Suivant les caractéristiques de l'écran, le dessin du cercle produit par le dispositif informatique sera plus ou moins perçu comme un cercle au sens commun. En fait, dans tous les cas, c'est un ensemble complexe de pixels qui ne renvoie à aucun assemblage de lignes au sens usuel de la géométrie. Dans l'univers externe, le cercle est une entité dont la nature est liée aux modes de représentation et de traitement disponibles, mais aussi aux classes de situations qui lui sont associées."

Ainsi, et en vertu de ce découpage, Balacheff distingue les contraintes liées à l'univers interne et les contraintes liées à l'interface.

Une typologie des contraintes selon Trouche :

Dans sa thèse déjà citée, Trouche propose une typologie des contraintes intégrant les types de contraintes introduits par Rabardel [Rabardel, 1995] et les contraintes liées respectivement à l'univers interne et à l'interface [Balacheff, 1994b] de la manière suivante :

- *Les contraintes internes :* "elles recouvrent les contraintes de modalités d'existence et les contraintes liées à l'univers interne. Ces contraintes recouvrent aussi celles liées à la nature de l'écran : les pixels (ce qui est 'interne' ne coïncide pas avec ce qui 'ne se voit pas')".

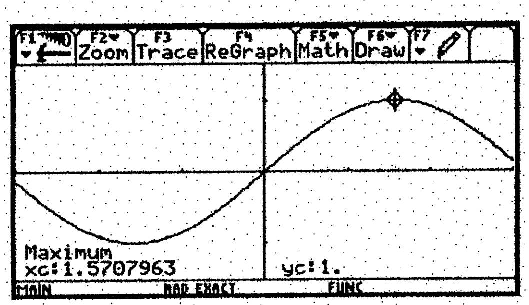
Considérons l'exemple suivant proposé par l'auteur pour illustrer ce type de contraintes :

La confusion est entretenue sur le mode de calcul utilisé par la TI-92 dans l'application graphique.

Si l'on travaille dans l'application initiale en mode exact, alors ce mode reste affiché dans la ligne d'état quand on passe dans l'application graphique (alors que le mode de calcul dans l'application graphique est toujours approché).

On voit ci-contre que la fonction sinus, sur l'intervalle [-3, 3], admet un maximum égal à 1, ce qui n'est pas surprenant, mais pour x = 1,5707963 exactement, ce qui est un peu plus surprenant...

Cette confusion est particulièrement grave, s'agissant de l'application graphique, dont on a déjà évoqué l'influence auprès des élèves.



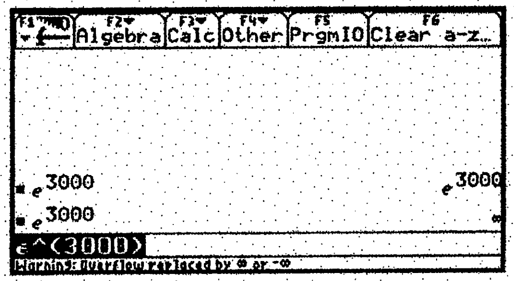
Remarquons que la contrainte liée à la présence de la mention 'EXACT' sur l'écran de l'application graphique pourrait également faire partie des contraintes liées à l'interface dans la mesure où elle est liée à la lecture des écrans propres à chaque application. Notons également la difficulté de situer une contrainte du côté de l'interface ou du côté de l'univers interne, et cela dans la définition même des *contraintes internes* où Trouche précise que "ces contraintes recouvrent aussi celles liées à la nature de l'écran : les pixels" et que "ce qui est 'interne' ne coïncide pas avec ce qui 'ne se voit pas'" alors que pour Balacheff les problèmes liés à la nature de l'écran font partie des contraintes liées à l'interface.

Par ailleurs, reprenons deux des exemples choisis par Trouche pour illustrer ce type de contraintes :

a) De la même façon qu'il peut y avoir confusion entre un nombre et une de ses valeurs approchées, il peut y avoir confusion entre l'infini et un "grand nombre".

En mode exact, e^{3000} est égal à lui-même.
En mode approché, on trouve, pour la même expression, ∞.

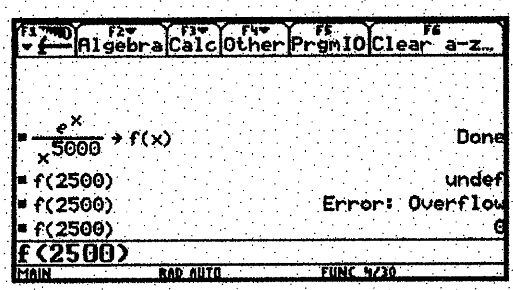
La calculatrice évalue ici ce qui dépasse ses capacités comme relevant de l'infini (cf. ligne d'état en bas d'écran).



b) Il peut y avoir aussi confusion entre "dépassement de capacité" et "non définition" d'un objet :

On définit une fonction f, rapport entre la fonction exponentielle et une fonction puissance.

Pour f(2500), la calculatrice donne "Overflow", c'est à dire dépassement de capacité, en mode exact ; 0, en mode "automatique" ; "undef", c'est à dire non défini, en mode approché.



Le problème est ici que la machine ne garde pas sur l'écran la mémoire des différents mode de calcul (exact, automatique, approché) successifs. **Il y a donc la tentation pour l'utilisateur de considérer comme équivalentes les différentes réponses (dans des contextes différents) à la même question, par la même machine, sur le même écran.**

Dans la mesure où ils concernent les possibilités de transformation d'objets (tels que e^{3000} ou encore f(2500)) par l'artefact qu'est la TI92, ces exemples pourraient également illustrer le deuxième type de contraintes proposé par l'auteur et qui sont les *contraintes de commande.*

- *Les contraintes de commande :*

Ces contraintes correspondent en effet, selon Trouche aux contraintes de finalisation (Cf Rabardel) et sont liées aux opérations que l'outil autorise. Selon lui, elles feraient partie des contraintes liées à l'interface.

Nous voyons donc de plus, que le fait que les exemples ci-dessus soient à cheval entre les deux types de contraintes (les contraintes internes font partie de l'univers interne alors que les contraintes de commande ne concernent que l'interface) montre la difficulté et sans doute le besoin de différencier les résultats affichés (qui sont au niveau de l'interface) des transformations internes (qui se situent au niveau de l'univers interne).

- *Les contraintes d'organisation :*

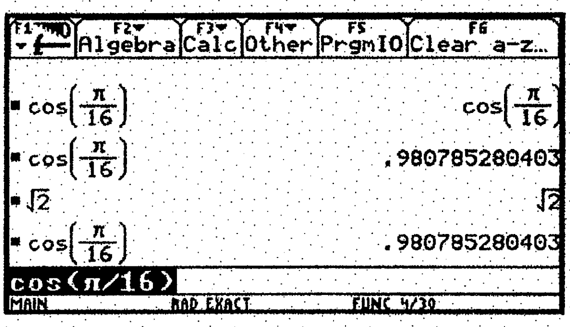
"L'existence d'une commande n'est pas tout : il faut aussi considérer l'accès à cette commande, comparer les différents accès. . . Il s'agit de l'organisation de l'interface qui contribue d'une certaine façon à *"préstructurer l'action de l'utilisateur"* (mais ce n'est pas le seul élément de préstructuration : l'existence même des commandes est aussi une préstructuration). Les contraintes d'organisation regroupent aussi une partie des contraintes liées à l'interface."
Considérons un exemple proposé par l'auteur dans le cadre de ce type de contraintes :

C'est le mode "calcul approché" qui est le plus facilement accessible.

Notons d'abord que quand on définit le mode de calcul (dans le Menu "Mode") les choix sont, dans l'ordre les mode automatique, puis exact et enfin approché. Il y a donc un certain avantage au calcul "auto" placé en premier. Cependant l'étude des contraintes d'organisation permet de discerner un avantage beaucoup plus efficace. En effet si l'on veut changer de mode de calcul, il faut appuyer successivement sur 5 ou 6 touches... sauf pour accéder au mode "calcul approché" : celui-ci est le seul à disposer d'un raccourci-clavier (touche "diamant vert", combiné avec la touche "enter"). **Ainsi quelque soit le mode de calcul ambiant, on peut disposer d'une valeur approchée d'un nombre donné. Cela pose un premier problème, relatif à l'identification valeur exacte/valeur approchée, comme on le voit sur l'écran ci-dessous :**

On rappelle que le raccourci clavier ne modifie pas la ligne d'état.

On obtient ainsi une valeur approchée de $\sqrt{2}$, ou de $\cos\frac{\pi}{16}$; avec une ligne d'état indiquant pourtant qu'il s'agit de calculs exacts.



Cet exemple pourrait également illustrer le deuxième type de contraintes (les *contraintes de commande*) puisqu'il concerne le traitement et la transformation des objets par la TI92. Par ailleurs, nous pouvons considérer cet exemple ainsi que celui que nous avons cité dans la partie relative aux *contraintes internes* comme faisant partie des problèmes liés à la gestion de la distinction Exact/Approché.

En conclusion, nous pouvons distinguer deux difficultés principales qui ressortent de cet essai d'articulation des typologies issues respectivement des travaux de Rabardel et de Balacheff :

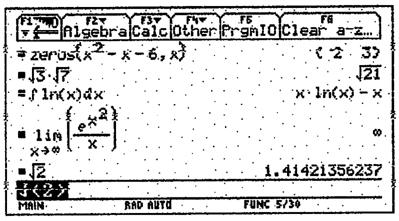
- D'une part, le chevauchement des trois types de contraintes que nous pensons être dû aux choix liés à l'adaptation de la typologie proposée par Rabardel.

- D'autre part, le problème de délimitation de l'univers interne et de l'interface qui nous semble être une conséquence de la complexité des rapports entre ces deux univers.

Dans le but d'éviter ce type de difficultés, nous proposons d'une part, une adaptation différente des contraintes introduites par Rabardel et d'autre part, une prise en compte des deux dimensions qui interviennent lors du traitement des objets par la TI92, et qui se traduisent par la prise en compte ou pas de la nature de ces objets. Dans cette perspective, nous allons aborder ci-après les contraintes de finalisation en omettant dans un premier temps de considérer la nature mathématique des objets qui entrent en jeu au niveau de la machine. Nous en déduirons ensuite des sous-catégories de contraintes qui seraient susceptibles de rendre compte de la complexité qui accompagne l'instrumentation de la TI92.

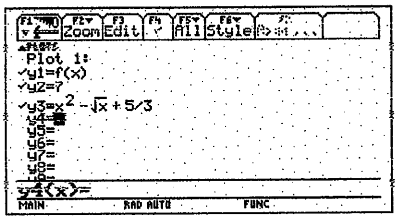
Une typologie plus différenciée pour une approche plus fine :

Dans le cadre de notre recherche, cinq applications interviennent lors de l'utilisation de la TI92 : HOME, Y=, WINDOW, GRAPH et TABLE ainsi qu'une fenêtre éventuellement partagée. Ces applications ont chacune des caractéristiques spécifiques que ce soit au niveau de la représentation à l'écran ou au niveau des transformations qu'elles permettent, dont certaines peuvent être modifiées par l'utilisateur dans une fenêtre de réglage appelée MODE. Ainsi l'application HOME concerne des objets et des transformations que nous qualifierons d'*analgébriques* en ce qu'elles réfèrent aux deux domaines que sont l'analyse et l'algèbre, et plus spécifiquement d'ordre numérique ou formel. Dans l'application GRAPH, les objets manipulés sont graphiques et numériques.



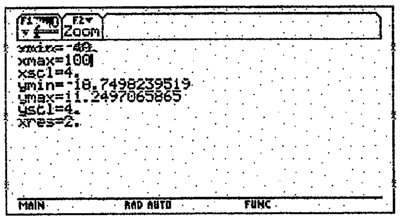
HOME

Formel - numérique



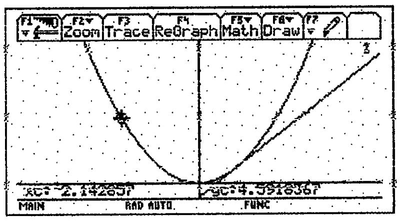
Y=

Formel - numérique



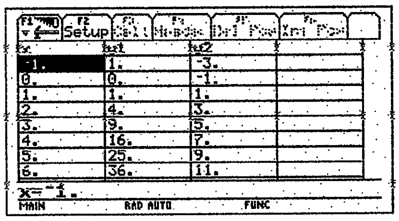
WINDOW

Numérique



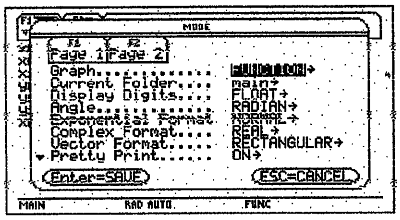
GRAPH

Graphique - numérique



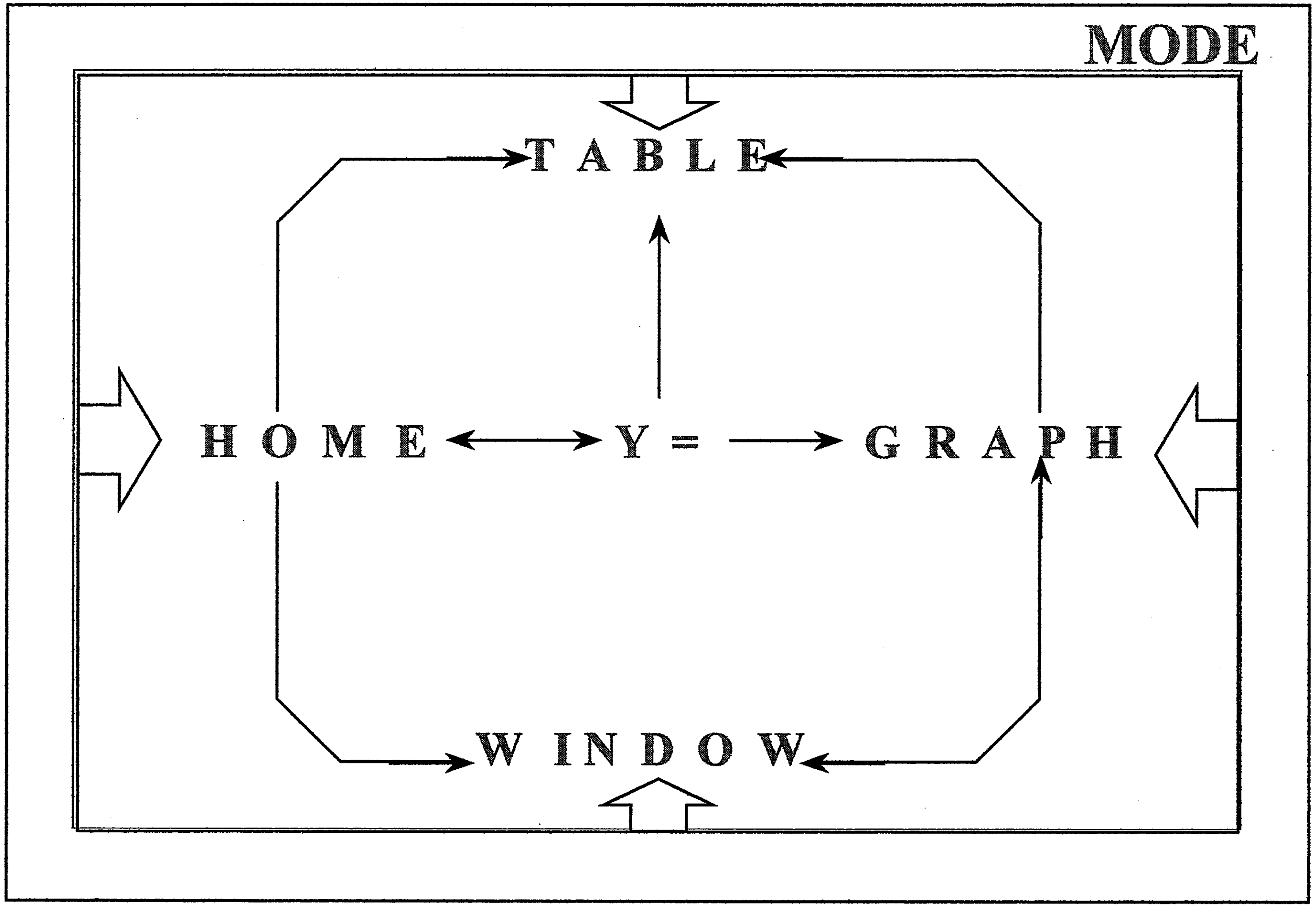
TABLE

Numérique

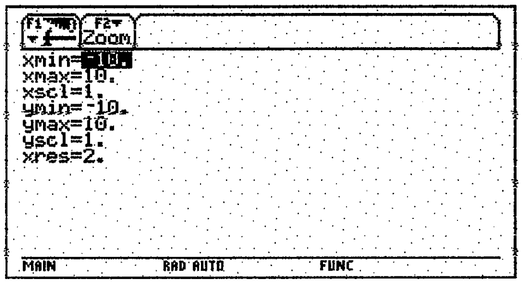


MODE

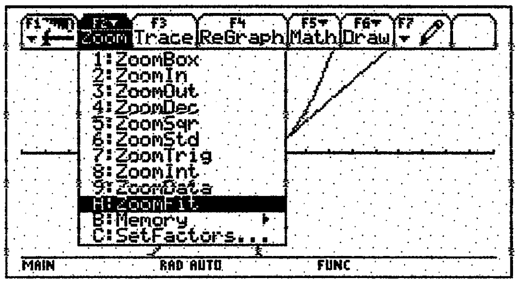
Les cinq applications (ainsi que la fenêtre MODE) définissent donc cinq types d'environnements différents mais qui interagissent cependant. Afin de donner une idée sur l'articulation de ces applications, nous avons représenté comme suit certaines des interactions possibles :


MODE
TABLE
HOME
Y =
GRAPH
WINDOW

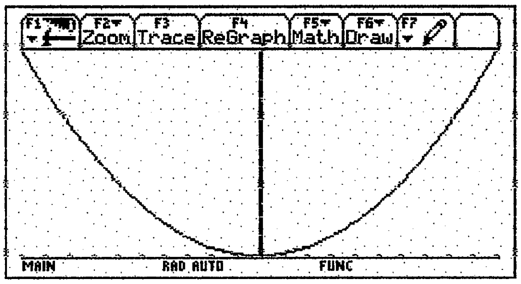
Les cinq applications peuvent donc interagir, mais alors que l'interdépendance de GRAPH et TABLE est laissée au choix de l'utilisateur (par le biais de TblSet), celles de HOME et GRAPH par exemple est systématique. De plus, l'interaction entre applications n'est pas toujours biunivoque. En effet, alors que les cadrages automatiques effectués dans GRAPH (par *F2*) agissent systématiquement sur WINDOW et réciproquement (relation biunivoque), les changements et transformations se déroulant dans GRAPH par exemple n'ont aucun effet sur l'application HOME (relation à sens unique).



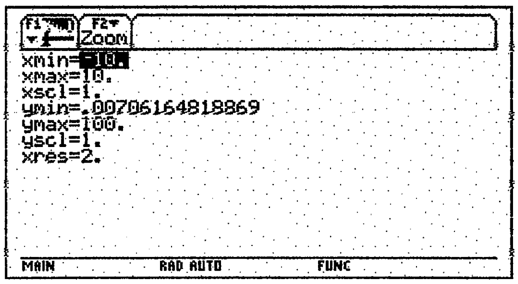
WINDOW : avant un *ZoomFit*



ZoomFit effectué dans GRAPH



Effet de *ZoomFit* dans GRAPH



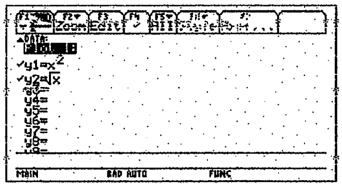
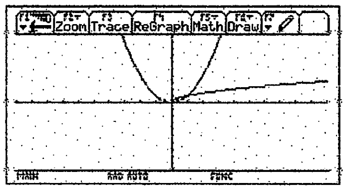
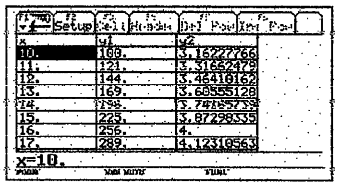
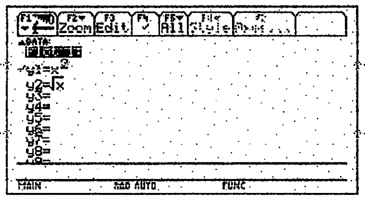
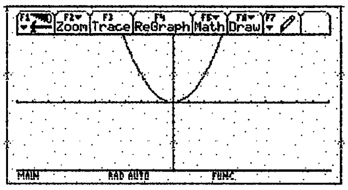
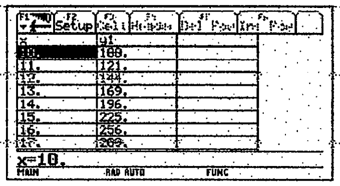
WINDOW : après *ZoomFit*

Pour illustrer de manière plus exhaustive les effets mutuels des applications, faisons un tour d'horizon application par application :

Y=

- **Y= ⇨ GRAPH et Y= ⇨ TABLE**

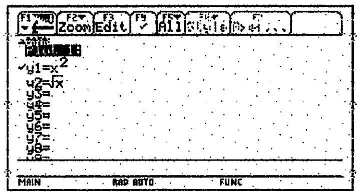
GRAPH et TABLE ne prennent en compte que les expressions définies et sélectionnées dans Y=

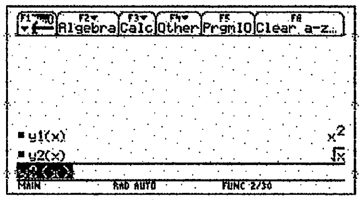
Y=	GRAPH	TABLE
 Les 2 fonctions sont sélectionnées		
 Seule la fonction x ⟶ x^2 est sélectionnée		

- **Y=** ⇨ **HOME**

HOME tient compte des expressions définies dans Y= (qu'elles soient sélectionnées ou non)

Y = **HOME**

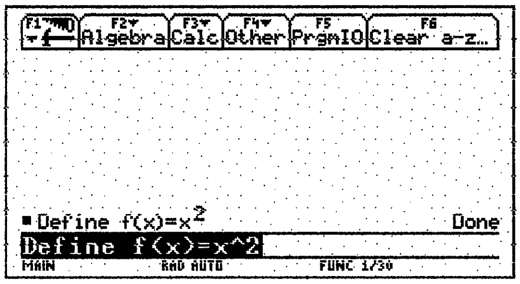




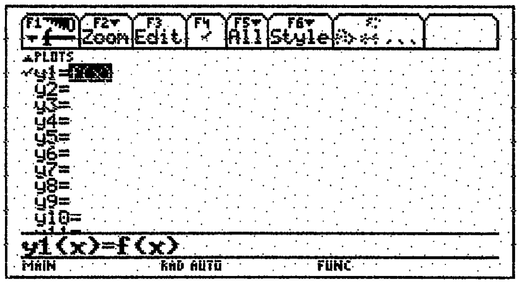
- **Y=** ⇨ **WINDOW** par la présence du menu *F2-Zoom* dont les commandes agissent sur WINDOW

HOME

- **HOME** ⇨ **TABLE** par la commande *F4-Table*
- **HOME** ⇨ **GRAPH** par la commande *F4-Graph*
- **HOME** ⇨ **Y=** Y= tient compte des fonctions définies dans HOME

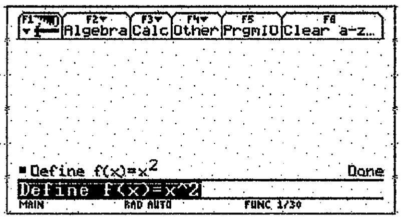


HOME

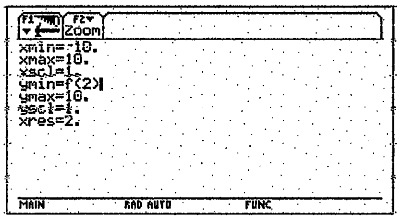


Y=

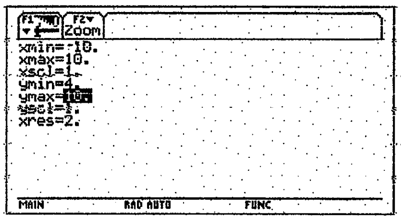
- **HOME** ⇨ **WINDOW**



HOME



WINDOW (1)



WINDOW (2)

GRAPH

- **GRAPH** ⇨ **TABLE** par l'intermédiaire de TblSet

Avant	*Activation de Graph(-)Table*	*Après*

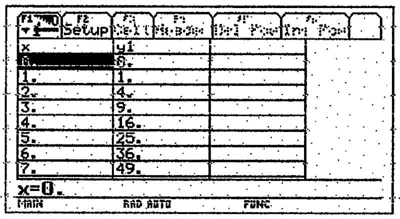
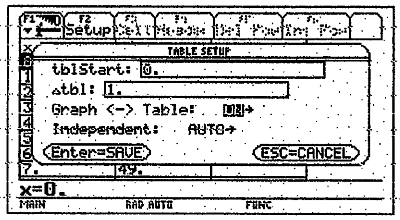
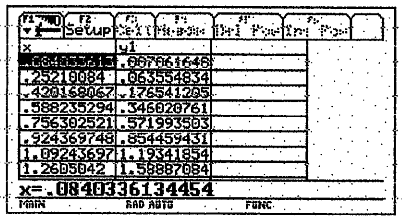
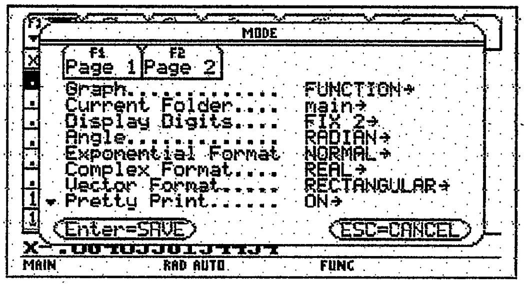

		

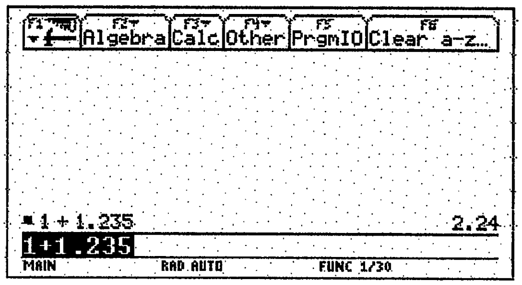
TABLE	**TblSet**	**TABLE**

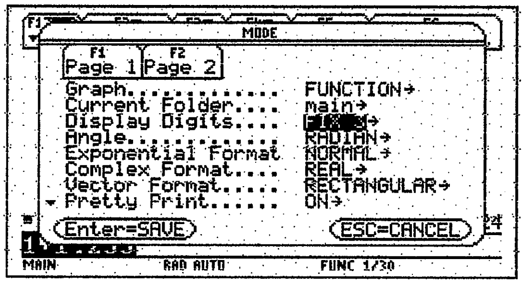
MODE

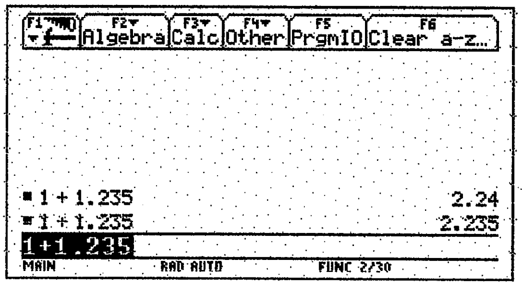
- **MODE** ⇨ **HOME**

Effet d'un changement de FIX

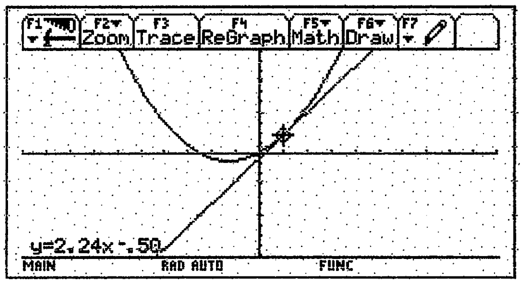
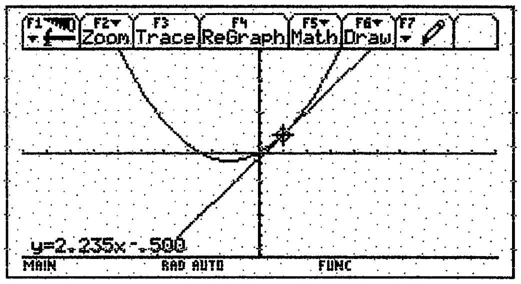




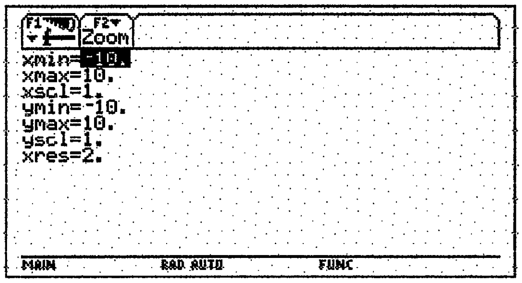
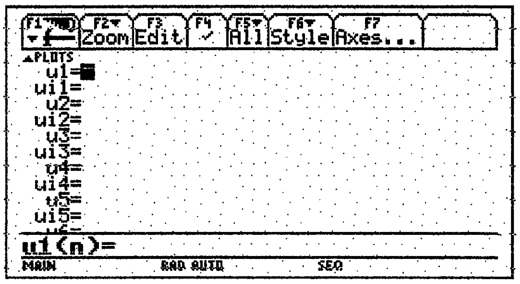




- **MODE** ⇨ **TABLE** (Cf. Exemple 2.2 ci-dessous)
- **MODE** ⇨ **GRAPH** L'équation de la tangente à une courbe donnée par la commande *F5-A-Tangent* dépend du "FIX"

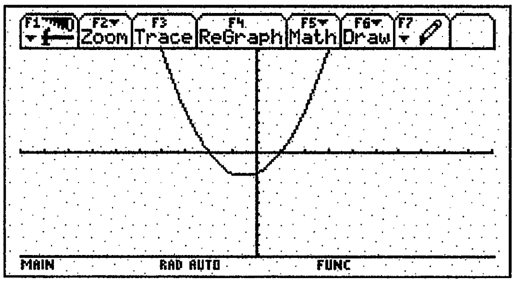
L'équation d'une tangente à la courbe avec un FIX égal à 2	La même équation avec un FIX égal à 3
	

- **MODE ⇨ WINDOW (respectivement Y=)** par le changement d'interface

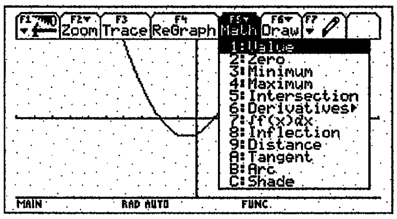
L'interface de WINDOW en mode *FUNCTION*	L'interface de WINDOW en mode *SEQUENCE*
	

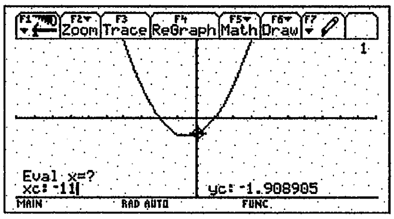
Tous ces faits participent de la complexité de l'utilisation de la TI92. Ainsi, ce n'est pas d'une interface dont il faudra parler mais d'interfaces, avec une prise en compte des interrelations et des effets mutuels. Mais qu'en est-il de la pertinence de cette différentiation dans le cadre de notre recherche? Pour pouvoir répondre à cette question, considérons les deux exemples suivants :

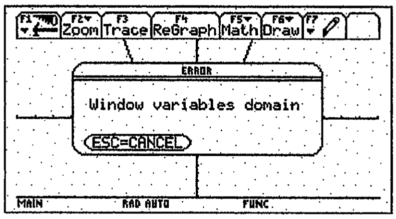
<u>Exemple1</u> : Ayant tracé la courbe de la fonction définie par f(x)=x²+x-2 en ZoomStd :



un élève essaie de chercher la valeur de f(-11) à l'aide de la commande Value du menu F5 :



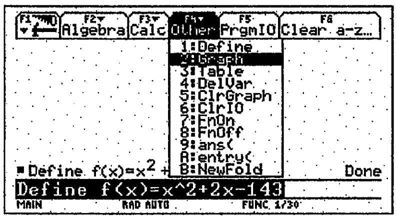


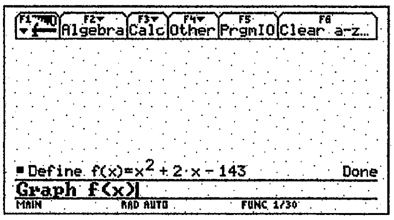


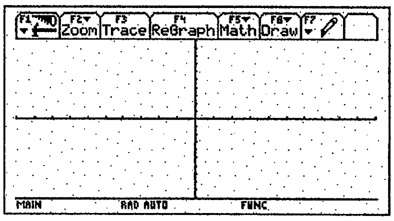
La courbe étant tracée sur [-10,10](qui correspond à [xmin, xmax] en ZoomStd) la recherche d'une valeur approchée de f(-11) ne peut aboutir, d'où le message d'erreur affiché. Nous voyons donc ici la dépendance étroite entre les applications WINDOW et GRAPH.

<u>Exemple2</u> : Alors que dans l'exemple précédent, la dépendance entre applications pouvaient 'bloquer' le travail de l'élève par l'affichage d'un message d'erreur, nous allons découvrir à travers les exemples suivants que cette dépendance n'est pas toujours aussi visible pour l'utilisateur :

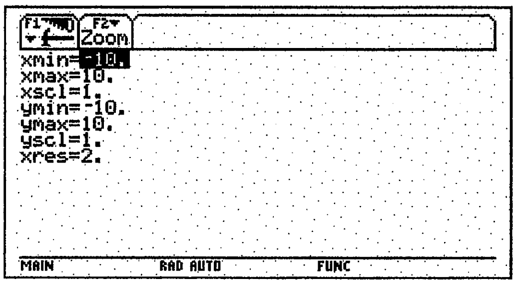
<u>Exemple2.1</u> Pour tracer le graphe de la fonction définie par f(x)=x²+2x-143, un élève utilise la commande Graph qui se trouve dans le menu F4 de l'application HOME :





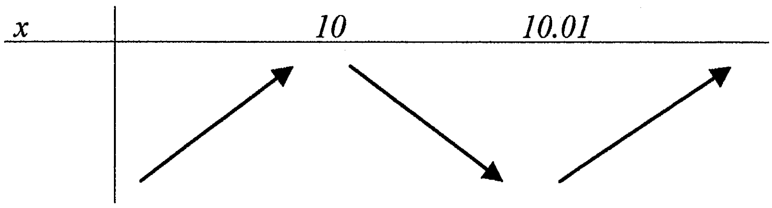


L'absence de courbe à l'écran est due au fait que si l'on pouvait prolonger les axes des abscisses et des ordonnées au-delà des limites de l'écran, le tracé se situerait en dehors de ce dernier dont les dimensions sont inscrites dans l'application WINDOW :

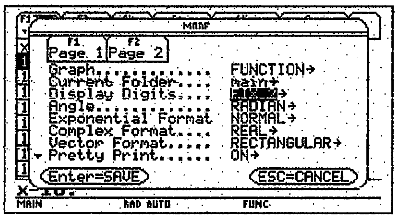


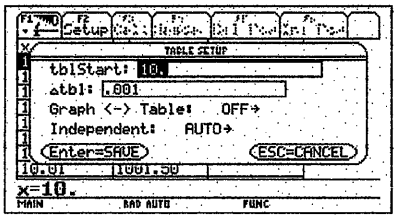
Précisons que ces dimensions sont héritées de la dernière manipulation.
Dans cet exemple, l'utilisateur ne peut pas faire l'économie d'un passage par WINDOW s'il veut comprendre ce qui s'est passé sur ses écrans actifs. Contrairement à l'exemple précédent où le lien entre applications était visible car 'dévoilé' par l'apparition d'un message, cet exemple-ci montre l'importance d'une prise en compte de toutes les applications entrant en jeu lors de l'utilisation de la machine.

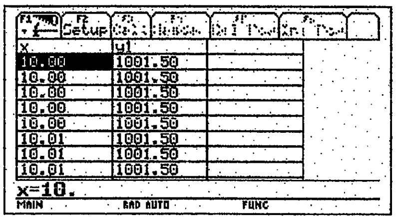
Exemple2.2 *Considérons la fonction définie par : f(x)* = $x^3 - 30.015x^2 + 300.3x$
Son tableau de variation se présente comme suit :



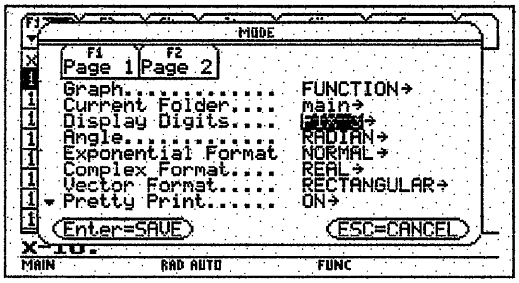
Nous nous proposons dans cet exemple de contrôler les variations de la fonction dans l'intervalle [10 ;10.01] dans l'application TABLE.
Si l'on fixe le nombre de décimales à 2, même avec un pas de 0.001, il ne s'affichera dans le tableau que des valeurs à 10^{-2} près.

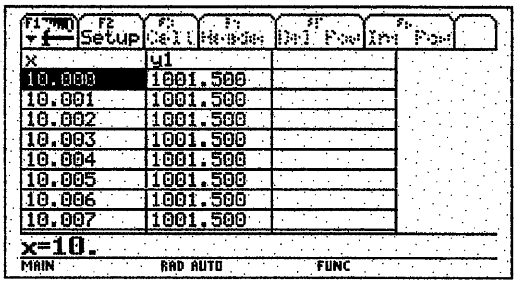






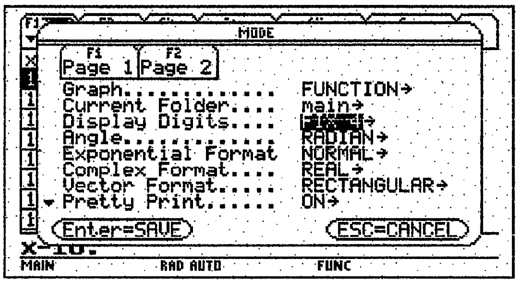
Nous commencerons donc par fixer le nombre de décimales à 3 et le pas à 0.001 pour pouvoir repérer ce qui se passe entre 10 et 10.01

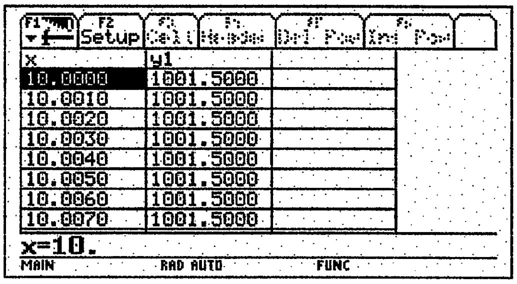




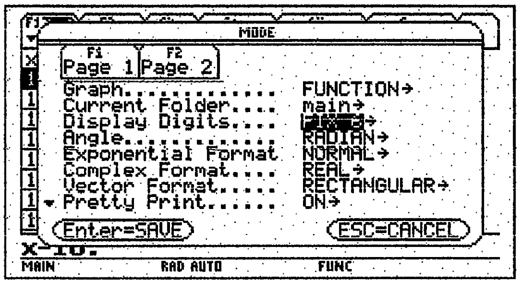
La fonction paraît alors constante dans l'intervalle [10 ;10.01].

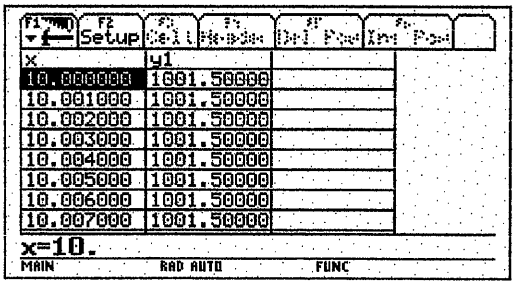
Pour voir ce qui se passe avec plus de précision, nous allons augmenter le "FIX" à 4 :



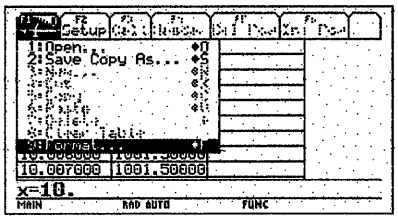


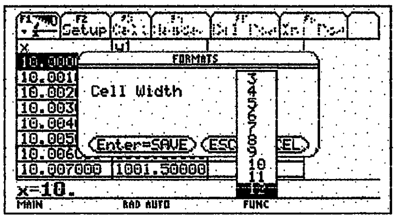
La fonction paraît toujours constante dans l'intervalle considéré et il en est de même pour un "FIX" égal à 5. Fixons maintenant le nombre de décimales à 6 :

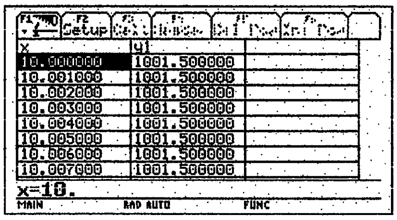




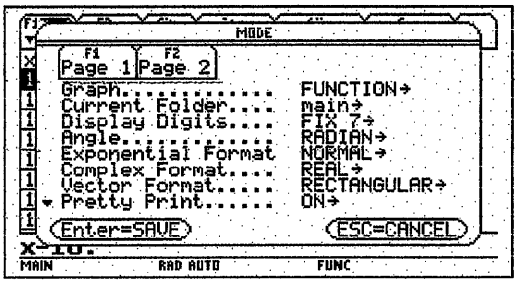
Cependant, nous n'obtenons dans la colonne "y1" que des valeurs à 5 décimales. Nous sommes alors forcés d'agrandir la taille de cette colonne pour voir s'afficher des valeurs à 6 décimales. Pour ce faire, il faut activer la commande F1-9 Format :

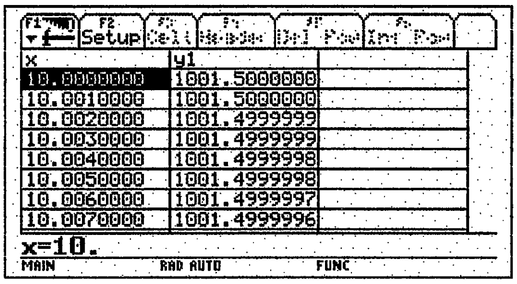






Nous avons ainsi élargi la colonne "y1" au maximum. Or, la fonction semble toujours constante dans l'intervalle en question. Nous allons alors augmenter la précision en fixant le nombre de décimales à 7 :





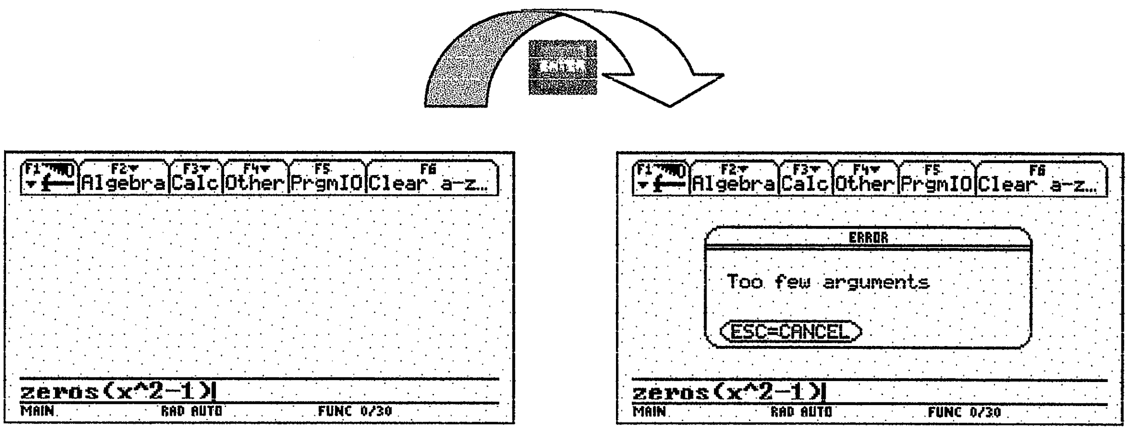
Nous pouvons enfin observer la décroissance de la fonction dans l'intervalle [10;10.01].

Dans cet exemple, nous avons pu voir la complexité des manipulations qui peuvent entrer en jeu lors de l'utilisation de la machine (ici dans le but de contrôler un résultat). Les caractéristiques de la fonction en question ont induit trois types d'ajustements :

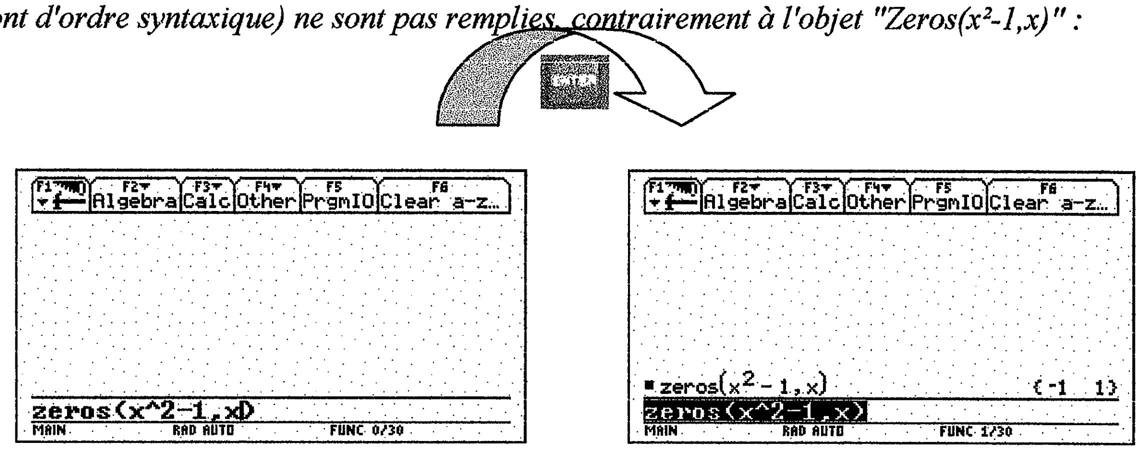
- Le changement du nombre de décimales dans MODE qui prend en compte et l'intervalle sur les x et la précision des valeurs de la fonction correspondantes.
- Le choix du pas dans TblSet qui tient compte de l'intervalle en question.
- La modification de la taille des cellules par TABLE-F1-Format qui s'est avérée nécessaire pour l'affichage de toutes les décimales permises (inhérentes au choix du FIX dans MODE).

Ces exemples tendent à confirmer la pertinence de l'approche que nous avons proposée et qui consiste à considérer l'artefact TI92 ou la partie de cet artefact qui nous concerne, comme un complexe formé de cinq environnements qui sont les cinq applications auxquelles on adjoint la fenêtre MODE. Cependant, nous pouvons également voir cet artefact comme un système constitué de sous-artefacts ou d'objets qui 'vivent' et qui 'cohabitent' sous certaines conditions. Ainsi, l'artefact TI92 serait un complexe d'objets (sous-artefacts) qui vivent dans des conditions 'écologiques'. Un objet n'existera alors que lorsque la machine l'aura reconnu, c'est-à-dire lorsque les conditions de type syntaxique auront été remplies. En somme, ces conditions sont déterminantes pour son existence. Prenons quelques exemples :

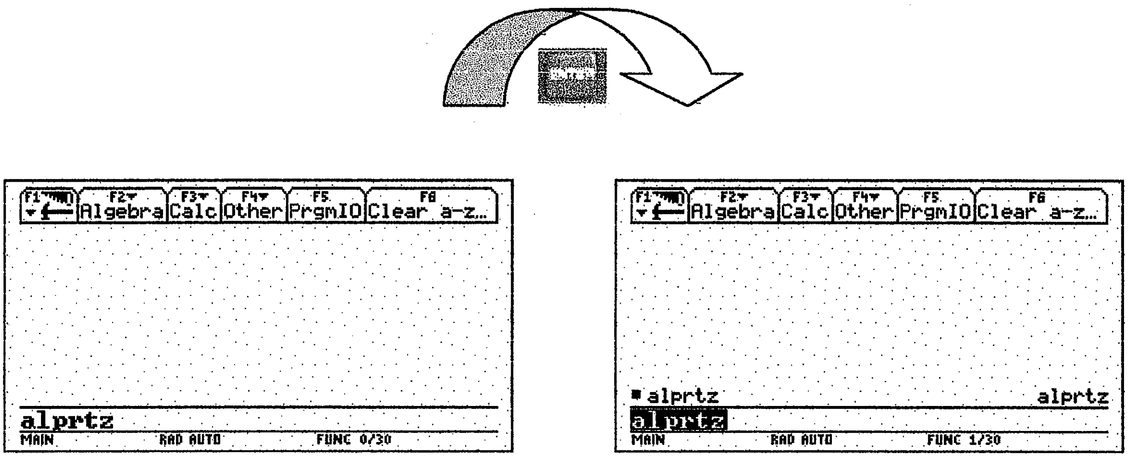
<u>*Exemple1*</u> :



L'objet " Zeros(x^2-1)" n'est pas reconnu par la machine car ses conditions d'existence (qui sont d'ordre syntaxique) ne sont pas remplies, contrairement à l'objet "Zeros(x^2-1,x)" :



<u>*Exemple2*</u> *: Voici un exemple d'objet en revanche accepté par la machine : "alprtz"*



Alors que l'objet " *Zeros(x²-1)*" pouvait avoir un sens en mathématiques, il n'a pas été accepté par la machine. Réciproquement, l'objet "*alprtz*" qui n'a a priori pas de sens en mathématiques, a été accepté par la machine (comme le nom d'une variable). Nous en déduisons donc que les "conditions d'existence" des objets ne dépendent pas forcément de la nature mathématique de ceux-ci.

Par ailleurs, si la désignation des objets semble aisée dans l'application HOME, il n'en est pas de même dans l'application GRAPH et dans une moindre mesure dans WINDOW. Qu'est-ce donc qu'un objet introduit par l'élève dans la machine? Mais ce questionnement nous semble encore imprécis et demanderait à être scindé en deux questions : qu'est-ce que cet objet pour l'élève? Qu'est-ce que cet objet pour la machine?

Afin de répondre à ces deux questions, un jeu de rôles nous semble fructueux : se mettre du côté de la machine puis de celui de l'utilisateur en essayant de déterminer chaque fois les éléments pertinents qui accompagnent le traitement et la transformation desdits objets.

Commençons donc par nous placer du côté de la machine :

A la suite d'une succession de touches pressées se terminant éventuellement par ENTER - que nous appellerons *manipulation* - , il se crée pour la machine un objet de classes connues par celle-ci * (**signalons que l'activation de chaque touche active également des objets pour l'affichage. Comme cette précision ne nous semble pas pertinente pour notre propos, nous n'en tiendrons pas compte par la suite*). Nous allons considérer qu'un *objet* correspond à un ensemble structuré d'informations (puisque c'est de cela que la machine a besoin) correspondant à une manipulation .

Reprenons l'exemple2.1 : dans cet exemple, l'objet introduit par l'utilisateur correspondrait à l'ensemble des informations correspondant à la manipulation (qui n'est pas forcément unique) dans HOME suivante :

F4 - 2 - x - ^ - 2 - . . . 

L'absence de message d'erreur (feed-back) signifie que l'objet en question répond aux critères d'existence (critères syntaxiques). Cependant, la "vie" de cet objet dans le système qu'est la TI92 va dépendre d'autres objets (donc d'autres informations) qui ont été introduits antérieurement à la manipulation ci-dessus de l'utilisateur.

Jusqu'ici nous nous sommes placés du côté de la machine (point de vue technocentré) que nous avons considérée comme un système d'"objets-informations" qui vivent dans des conditions écologiques : ces informations (ou objets) prennent place dans le système lorsqu'elles satisfont à certaines conditions d'existence (contraintes syntaxiques). Cette naissance dans le système s'accompagne d'interactions avec d'autres informations qui existaient antérieurement. Le système est alors dans un état d'équilibre jusqu'à la manipulation suivante.

Situons-nous maintenant du côté de l'élève-utilisateur et regardons ce qui peut paraître pertinent pour lui (ou elle) lors de l'utilisation de la TI92 dans le domaine qui nous concerne, sans tenir compte pour l'instant de la nature des contenus de la tâche à effectuer. Nous pouvons considérer l'utilisateur comme un sujet cognitif ayant besoin autant que possible d'informations pertinentes. Pour une utilisation optimale de la machine, il lui faudrait une bonne connaissance du système qu'est la machine, ce qui se traduirait par une prise en compte de toutes les informations intervenant de près ou de loin à la suite d'une manipulation. L'expression 'de près ou de loin' pourrait exprimer le degré de pertinence des informations-objets dans le cadre de leur fonctionnement (leur 'vie') dans le système technique qu'est cette machine. Cependant, comme l'orientation de notre approche dans ce paragraphe est volontairement anthropocentrée, l'expression 'de près ou de loin' serait à prendre au sens d'une accessibilité (à l'utilisateur) de l'information contenue dans la machine. Ainsi, il est évident pour l'élève que les informations les plus accessibles sont celles qu'il peut recueillir directement à l'interface (ou plutôt aux interfaces). Or comme nous l'avons vu précédemment, et compte tenu de la complexité de l'interface, nous pouvons distinguer deux types d'informations :

- D'une part, celles qui sont liées aux conditions d'existence (contraintes syntaxiques) et qui sont forcément introduites par l'utilisateur à l'interface.
- D'autre part, celles qui sont accessibles à l'interface et qui sont liées aux informations du type précédent selon des règles spécifiques au système qu'est la TI92. Ces règles, qui régissent les rapports entre informations dans la machine peuvent également être considérées comme des informations, et bien qu'elles ne se situent pas à l'interface, certaines d'entre elles peuvent être accessibles à l'élève.

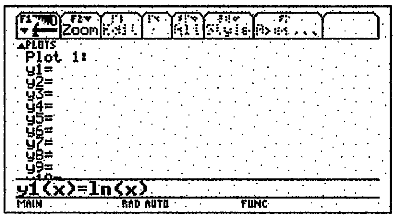
Par ailleurs, parmi les informations qui ne sont pas accessibles à l'interface, nous distinguerons :

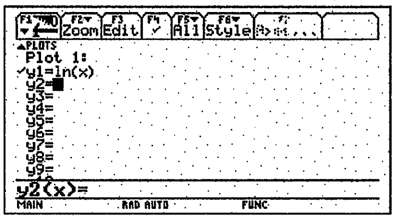
- D'une part, celles qui peuvent être accessibles soit sous forme de *savoirs* (en classe, dans le manuel accompagnant la machine, dans des articles ou études - par exemple [Bernard & al., 1999] ou [Bronner, 1999] -, ou encore via Internet - site de Texas Instruments, par exemple -), soit sous forme de *connaissances* par des moyens dont la validité n'est pas reconnue institutionnellement (par le bouche à oreille, par inférence suite à des essai-erreur, ou via des sites personnels sur Internet . . .). Ce type d'informations peut concerner par exemple la nature de l'écran (nombre de pixels), les choix (des concepteurs) liés à la gestion de la discrétisation, la nature des résultats numériques (s'ils sont exacts ou approchés) dans les différentes applications ou encore le fonctionnement de certaines commandes, comme *ZoomFit* par exemple.
- D'autre part, celles qui ne peuvent être accessibles et qui concernent soit les algorithmes (*strate symbolique* [Ganascia, 1993]), soit les constituants électroniques et leur fonctionnement (*strate électronique,* ibid.).

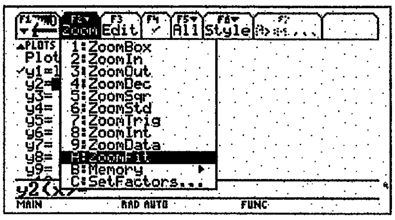
En fin de compte, nous distinguons quatre niveaux différents suivant le degré d'accessibilité des informations qui interviennent dans une manipulation. Illustrons ces distinctions par deux exemples :

<u>*Exemple1*</u>

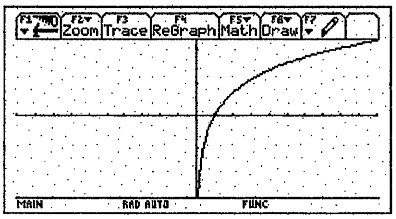
Considérons la fonction définie par x ↦ ln x. Pour étudier graphiquement cette fonction, un élève utilise ZoomFit de la manière suivante :

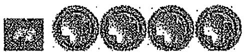






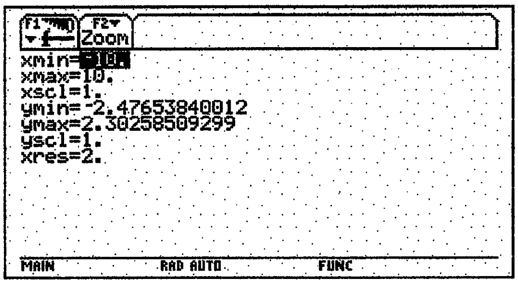
et obtient :



Lors de cette manipulation (qui s'est traduite par la succession de touches suivantes :
 ....), nous pouvons distinguer quatre niveaux d'informations ayant été prises en compte par la machine :

Niveau 1 : les informations ayant été introduites par l'élève à l'interface et qui sont d'ordre syntaxique (ce qui correspond en somme à la manipulation ci-dessus)

Niveau 2 : les informations accessibles à l'interface (non introduites par l'élève dans ce cas) et dont tient compte la machine pour le traitement. Ces informations correspondent dans notre cas, à celles qu'on peut lire dans l'application WINDOW, à savoir :

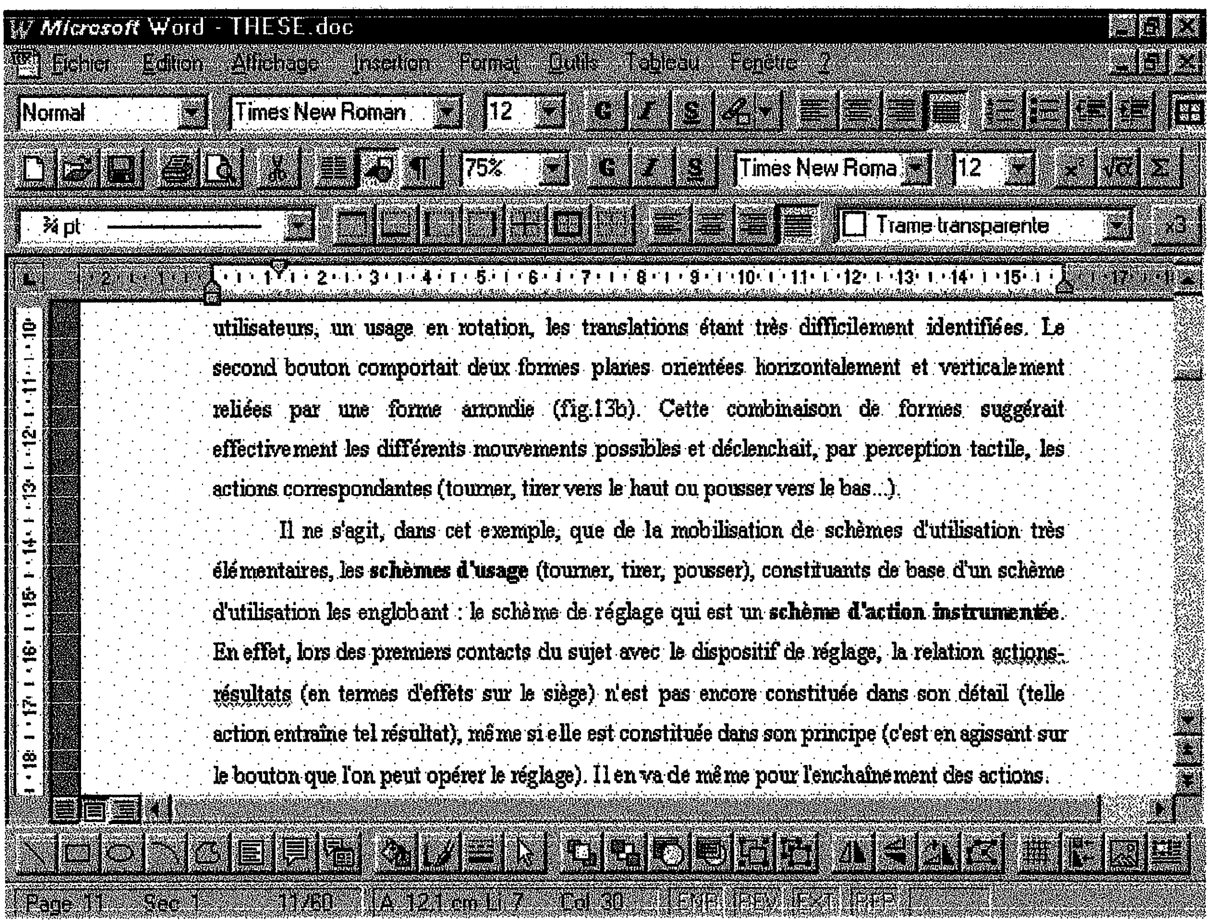


Niveau 3 : Les informations non accessibles - directement - à l'interface. Nous pouvons distinguer par exemple les informations concernant le fonctionnement de la commande *ZoomFit* ou encore celles sur la nature de l'écran graphique (nombre de pixels . . .)

Niveau 4 : D'autres informations non accessibles à l'interface et concernant l'univers interne (algorithmes de résolution, codage des expressions par exemple).

<u>Exemple 2</u> :

Considérons l'interface du logiciel de traitement de texte suivante :

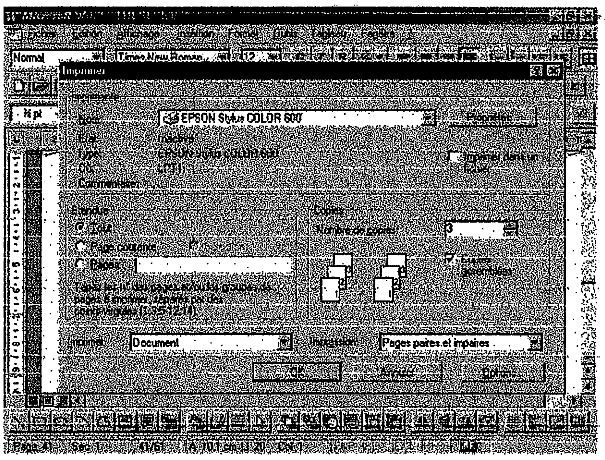


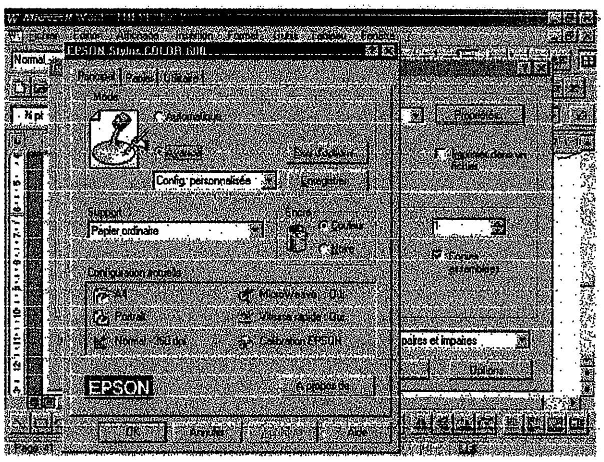
Un élève veut imprimer une copie du document apparaissant à l'écran. Pour ce faire, il appuie sur l'icône correspondante  . La machine imprime alors ledit document mais en trois copies !

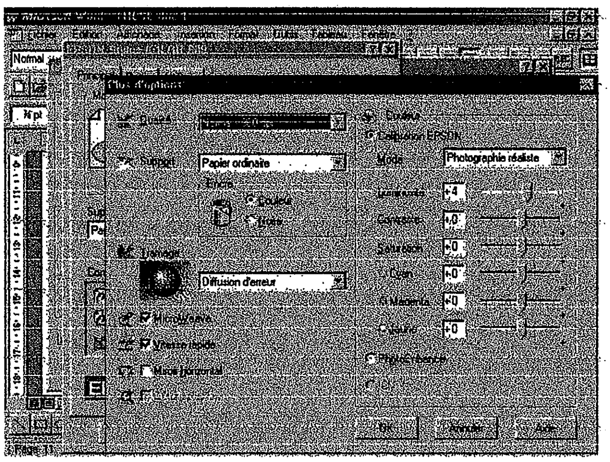
En fait la machine a tenu compte de quatre niveaux d'informations :

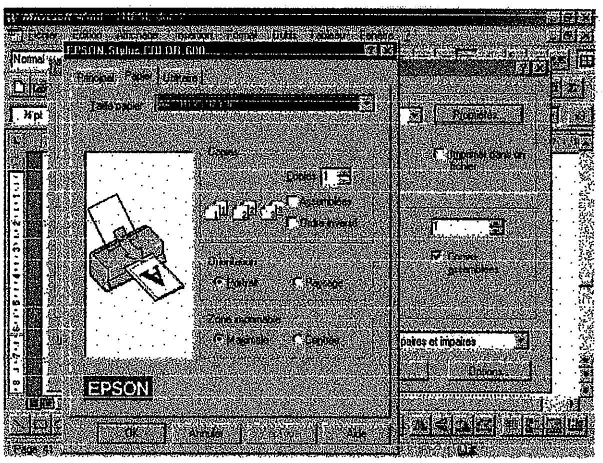
Niveau 1 : Les informations introduites par l'élève à l'interface et qui correspondent à sa manipulation.

Niveau 2 : Les autres informations accessibles à l'interface et dont tient compte la machine (par défaut). Ces informations correspondent entre autres à celles contenues dans les fenêtres suivantes :









Niveau 3 : Les informations non accessibles à l'interface et concernant par exemple certains programmes utilisés par l'imprimante.

Niveau 4 : Autres informations non accessibles à l'interface et concernant l'univers interne de la machine.

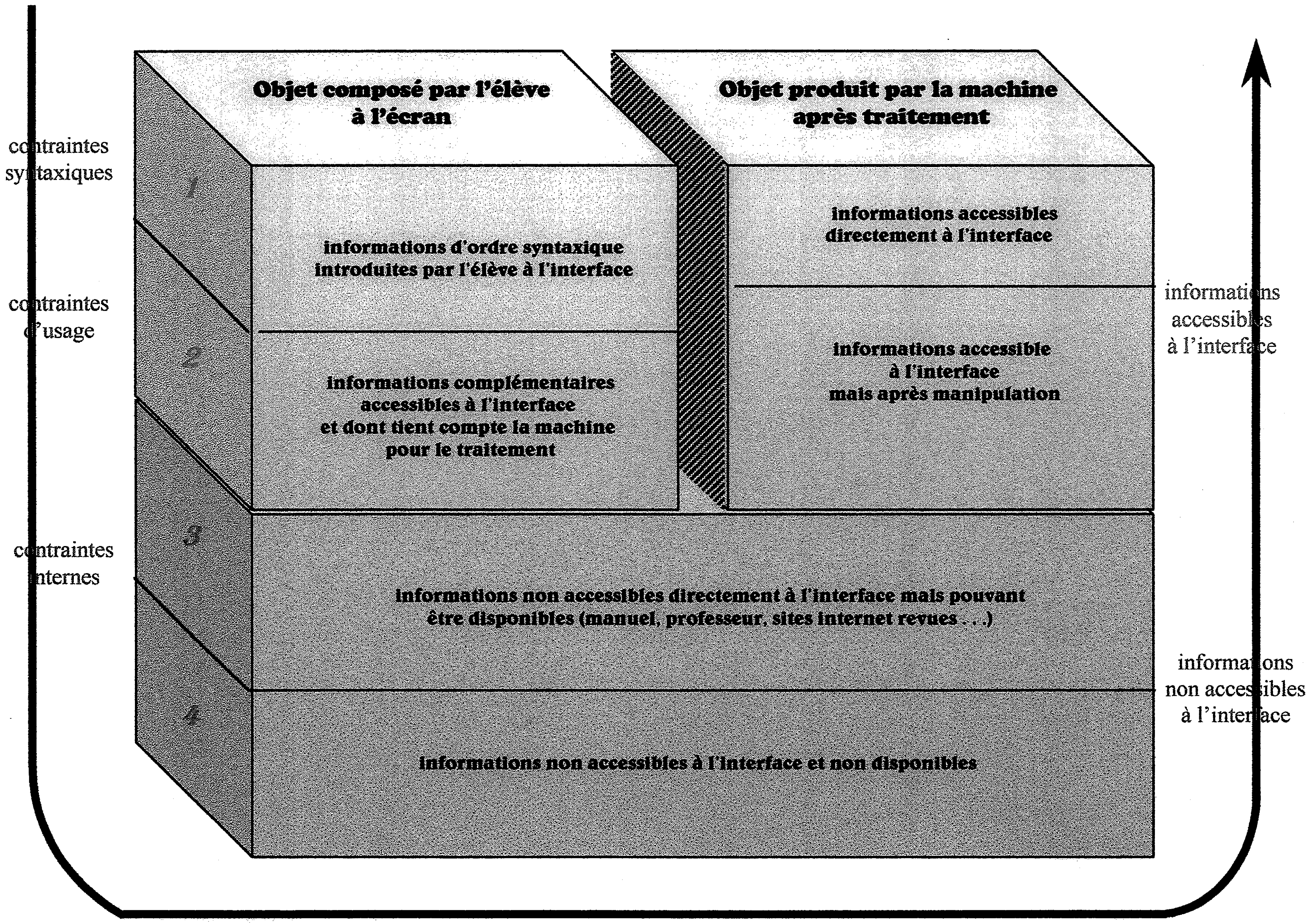
Comme nous venons de le voir à travers les exemples ci-dessus, l'utilisation de la machine peut s'accompagner de la mobilisation des quatre niveaux d'information proposés auparavant. Plus précisément, l'apparition de ces niveaux a lieu lors de la mise en œuvre des schèmes d'usage, et dans la mesure où la machine peut être considérée comme un ensemble de contraintes que l'élève doit affronter, nous proposons la typologie suivante :

- *les contraintes syntaxiques* : ce sont les contraintes liées au premier niveau d'informations.
- *les contraintes d'usage* : ce sont les contraintes liées au deuxième niveau d'informations. Nous les appelons contraintes d'*usage* en référence au schème d'usage qu'elles accompagnent.
- *les contraintes internes* : Contrairement aux contraintes syntaxiques et aux contraintes d'usage qui concernent les informations accessibles à l'interface, les contraintes internes sont liées aux troisième et quatrième niveaux d'informations.

Dans un souci de précision, essayons de compléter notre approche en ce qui concerne l' "*usage*" de la TI92. Pour une tâche donnée, dire que la TI92 est instrumentée (par l'élève) revient à considérer que l'élève a choisi de mettre en œuvre un schème d'activité instrumentée où elle (la TI92) est incorporée en tant qu'artefact. En d'autres termes, la TI92 participerait - entre autres artefacts éventuellement- à une ou plusieurs phases d'un schème d'activité instrumentée, dans le but de résoudre une tâche donnée. Par ailleurs, chacune de ces phases où la TI92 intervient peut être décomposée en un ou plusieurs schèmes d'usage. En fait, tout schème d'usage serait une manipulation (ce qui correspond à une succession de touches pressées) qui se terminerait par une validation, cette dernière pouvant se réaliser à l'aide de la touche ENTER, ou pouvant faire partie intégrante de ladite manipulation. Nous appellerons ***acte d'usage*** l'unité qui incorpore les trois phases suivantes :

Schème d'usage (composition par l'élève de l'objet à traiter, suivie éventuellement de ENTER)	→	**Traitement par la TI92**	→	**Affichage du résultat**
Phase1		***Phase2***		***Phase3***

Ainsi, les quatre niveaux d'informations que nous avons présentés antérieurement interviennent précisément lors d'un *acte d'usage*, de la manière (schématique) suivante :


contraintes syntaxiques
contraintes d'usage
contraintes internes
Objet composé par l'élève à l'écran
Objet produit par la machine après traitement
1
2
3
4
informations d'ordre syntaxique introduites par l'élève à l'interface
informations complémentaires accessibles à l'interface et dont tient compte la machine pour le traitement
informations accessibles directement à l'interface
informations accessible à l'interface mais après manipulation
informations non accessibles directement à l'interface mais pouvant être disponibles (manuel, professeur, sites internet revues . . .)
informations non accessibles à l'interface et non disponibles
informations accessibles à l'interface
informations non accessibles à l'interface

Niveaux de connaissances-machine :

Par ailleurs, rappelons que la définition des différents niveaux d'informations qui interviennent lors d'un *acte d'usage* est principalement fondée sur le critère d'accessibilité. Ainsi, plus le niveau d'informations est élevé moins l'information est accessible. En ce sens, nous considérerons dorénavant quatre niveaux de *connaissances-machine* qui correspondraient aux quatre niveaux d'informations en question. Mais qu'en est-il des autres types de connaissances lors de l'utilisation de la TI92 pour des tâches mathématiques ? En effet, tout schème d'usage bien que tourné vers l'artefact, ne peut être réduit à des connaissances-machine *stricto sensu,* puisqu'il s'intègre dans un schème d'activité instrumentée. Ce dernier ayant pour finalité la résolution d'une tâche mathématique, le choix même des schèmes d'usage et des "sous-artefacts" (qui seraient des parties de l'artefact TI92) qu'ils concernent met en jeu la fonction mathématique de ces sous-artefacts. Ainsi, l'utilisation de la commande *limit* par exemple, mobilise d'une part des connaissances tournées strictement vers la machine (concernant la syntaxe par exemple) et d'autre part, des connaissances liées à la transposition informatique. Etant donné qu'il tient compte de la nature mathématique de la commande *limit*, ce deuxième type de connaissances incorpore des connaissances mathématiques - au sens strict - concernant la notion de limite. Or cette notion (entre autres notions) est étroitement liée à l'environnement institutionnel où elle naît et où elle interagit avec d'autres objets de savoir. Tout ceci nous conduit, après avoir abordé la dimension cognitive, à considérer la dimension institutionnelle de l'utilisation de la TI92, sachant toutefois que ces deux dimensions interagissent de manière dialectique dans la genèse instrumentale.

La Dimension Institutionnelle

Une approche anthropologique :

L'approche anthropologique a pour ambition de modéliser les pratiques sociales et par voie de conséquence ici les pratiques "à mathématiques". Cette approche d'ordre écologique [Chevallard, 1992] vient enrichir une première modélisation, la *transposition didactique* [Chevallard, 1985], en élargissant "le champ d'analyse" par la volonté "d'aborder les contraintes qui se créent entre les différents objets de savoir à enseigner". Si le point de base reste le même :"tout est objet", "ces objets entretiennent maintenant des *interrelations* hiérarchiques permettant d'entrevoir des *structures écologiques objectales*". "On distingue désormais des types d'objets particuliers : les *institutions*, les *individus* et les *positions* qu'occupent les individus dans les institutions. En venant occuper ces positions, les individus deviennent les *sujets* des institutions." Par ailleurs, et afin de lier ces types d'objets à la *connaissance*, et plus particulièrement au *savoir* - qui est considéré comme "une forme particulière d'organisation de connaissances" -, la notion de *rapport* est introduite : "un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le "(re)connaît" ", au sens où il existe des pratiques sociales (individuelles ou institutionnelles) qui le mettent en jeu. Cependant, ces pratiques demandent à être analysées, et dans cette perspective une notion importante a été proposée : c'est celle d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie*. Ainsi, toute pratique sociale (y compris "à mathématiques") pourrait être intégrée à une *organisation praxéologique* qui se découperait en quatre champs : *(type de) tâche, (type de) technique, technologie* et *théorie*. Tout cela découle tout d'abord d'un premier postulat selon lequel "*toute pratique institutionnelle se laisse analyser, de différents points de vue et de différentes façons, en un système de tâches*. Un deuxième postulat vient préciser que "*l'accomplissement de toute tâche résulte de la mise en œuvre d'une technique*", où le mot *technique* est utilisé dans un sens très général qui serait celui de "manière de faire particulière", et non forcément algorithmique. Par exemple, pour la résolution d'équations du second degré (qui est un type de tâches) utiliser la "méthode du discriminant" est une technique, mais il y a également des techniques "pour faire des démonstrations par récurrence, pour corriger des copies, pour ouvrir les portes, pour lire le journal, pour faire taire les élèves en début de séance, etc". "La vie institutionnelle est donc faite d'un large éventail de tâches accomplies selon des "manières de faire" institutionnalisées, loi d'airain qui tend à identifier tout type de tâches à la technique normalement utilisée dans l'institution pour accomplir les tâches de ce type." Ainsi, le *rapport institutionnel* à un objet, pour une position (institutionnelle) donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position", alors que le *rapport personnel* d'un sujet audit objet est un émergent de "l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément".

Par ailleurs, certains types de tâches dites *problématiques* vont apparaître lorsqu'il y a absence, pour le sujet ou pour l'institution, d'une technique *ad hoc*, ou encore lorsque "la technique habituellement employée échoue", alors même que d'autres types de tâches institutionnelles pour lesquelles des techniques sont non seulement disponibles mais *routinisées*, vont se muer en tâches-techniques *routinières* jusqu'à sembler naturelles, c'est-à-dire "ne supposant aucune technique particulière". Il en est ainsi par exemple de la tâche 'calculer 2+3' pour un élève de Terminale ou encore 'lever la main pour répondre' pour un élève de CM2 souhaitant répondre à une question posée par l'enseignant en classe.

Enfin, un troisième postulat anthropologique traitant cette fois-ci de "l'*écologie des tâches et des techniques*, c'est-à-dire des conditions et des contraintes qui en permettent la production et l'utilisation dans les institutions", vient compléter les deux autres en considérant que "pour pouvoir exister dans une institution, une technique doit apparaître comme un tant soit peu *compréhensible*, lisible et *justifiée*." Un premier corollaire est la considération " d'un discours descriptif et justificatif des tâches et techniques appelé *technologie* de la technique". Un deuxième corollaire est obtenu en appliquant ce dernier postulat à la *technologie* elle-même, laquelle aurait alors à son tour besoin d'une justification qui sera appelée *théorie* de la technique. En somme, une *organisation praxéologique* ou *praxéologie* relative à un type de tâches serait un "système à quatre composantes : ce type de tâches, des techniques permettant de les accomplir, le discours technologique associé et son fondement théorique".

Si ce modèle permet de rendre compte des pratiques à travers la différentiation tâches-techniques-technologies-théories, il ne semble pas prendre en compte l'essence de chacune de ces quatre composantes. En effet, si cette distinction offre un statut aux objets qui sont engagés dans une pratique (suivant les quatre types de rôles qu'ils peuvent jouer), elle ne traite pas de la nature de ces objets. Pour répondre à ce questionnement, [Bosch et Chevallard, 1999] partent d'un constat : "le peu d'instruments matériels utilisés (papier et crayon, tableau et craie, règle et compas, machine à calculer, ordinateur) sont généralement considérés comme de simples *supports*, des *aides* parfois indispensables, mais qui ne sauraient en aucun cas faire partie de l'activité elle-même. Les autres objets, sinon matériels, du moins *sensibles*, qu'active le mathématicien (écritures, formalismes, graphismes, mots, discours, etc.) peuvent parfois jouir d'une certaine spécificité : ils ne sont pourtant supposés intervenir dans son activité qu'en tant que *signes,* occupant la place d'autres objets qu'ils *représenteraient.*" Ces auteurs estiment donc que la pertinence des "*instruments matériels, visuels, sonores et tactiles*" qui sont engagés dans les pratiques mathématiques est sous-évaluée. Ainsi, afin de traiter ce "problème de la 'nature' des objets mathématiques et celui de leur 'fonction' dans l'activité mathématique", ils proposent de distinguer deux types d'objets :

- D'une part, les objets *ostensifs* qui désigneront les objets ayant "une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquièrent pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il des objets matériels quelconques et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes.
- D'autre part, les objets *non ostensifs* qui sont alors "tous ces 'objets' qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement -au sens où on leur attribue une existence- sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invoqués* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). Ainsi les objets 'fonction' et 'primitive d'une fonction' sont-ils des objets non ostensifs que nous avons appris à identifier et à activer par le moyen de certaines expressions, écritures et graphismes particuliers mis en jeu dans des pratiques et situations tout autant particulières."

Comme nous pouvons le constater, cette dichotomie est basée fondamentalement sur le critère transinstitutionnel qu'est la perceptibilité, par conséquent les objets matériels et les objets symboliques se fondent en une même classe : celle des ostensifs, à savoir des objets "concrètement manipulables" par le sujet humain.

Par ailleurs, "toute activité humaine se laisse décrire en apparence comme une manipulation d'objets ostensifs. Mais l'analyse la plus sommaire révèle que l'opérateur humain ne peut la réaliser (et ne sait éventuellement en rendre compte) qu'en évoquant ou en invoquant, à l'aide d'objets ostensifs appropriés, des objets *non ostensifs* qui n'apparaissent pas forcément spécifiques de l'activité. Ecrire $2 + 3 = 5$ peut être vu comme une simple manipulation d'objets ostensifs, mais ne saurait s'effectuer intentionnellement sans l'intervention de certains objets *non ostensifs spécifiques*, telle la notion d'addition (ou, s'il y a seulement copie d'une "patron" d'écriture, la notion de "reproduction" ou de "recopiage"). Plus généralement, nous (les auteurs) poserons le principe que, *en toute activité humaine, il y a co-activation d'objets ostensifs et d'objets non ostensifs* . . . réciproquement, la *co-activation d'ostensifs et de non-ostensifs est toujours présente et apparaît à tous les niveaux d'activité*, aussi bien au plan de la technique que de son environnement technologico-théorique. La technique qui conduit à écrire $(x^3 + x + 1) + (x^2 + 4x -2) = -1 + 5x + x^2(1 + x)$ suppose une manipulation d'ostensifs écrits (parenthèses, lettres, chiffres, etc.), oraux (petit discours du type "x plus 4x, 5x. . . ") et gestuels (par exemple pour grouper les termes de même degré et vérifier qu'on n'en a oublié aucun). Cette manipulation est guidée par des non-ostensifs, parmi lesquels la notion d'arrangement des termes par ordre décroissant des exposants, la notion de "termes (ou monômes) de même degré", celle de "factorisation par x^2", ou encore la notion de "reste d'ordre 2", etc."

En fait, les objets ostensifs et les objets non-ostensifs entretiennent des relations dialectiques puisque si la manipulation d'ostensifs affecte les non-ostensifs, ce sont ces derniers qui guident cette manipulation. Nous retrouvons à juste titre cette imbrication dans les rapports technique-technologie, puisque d'une part, "la mise en œuvre d'une technique se traduit par une *manipulation d'ostensifs réglée par des non-ostensifs"* et d'autre part, étant de l'ordre des idées, des concepts et des notions en ce qu'ils sont 'justificatifs' et 'explicatifs', les non-ostensifs arriveraient presque à nous apparaître du côté de la *technologie.* Cependant, une approche 'consensuelle' serait de considérer que les ostensifs mis en jeu dans une technique et ceux engagés dans la technologie correspondante partagent certains non-ostensifs. En d'autres termes, l'utilisation d'un ostensif lors de la mise en œuvre d'une technique se justifierait par des non-ostensifs dont une partie -éventuellement- pourrait être explicitée à travers des ostensifs qui feraient partie de la technologie correspondante. Par exemple, la technique qui consisterait à dériver une fonction rationnelle peut être justifiée par la technologie constituée des formules de dérivation d'un rapport de deux expressions. Le couple technique-technologie correspondant à la tâche 'dériver la fonction $\frac{x^3-2x+5}{x^2+1}$' par exemple, partagerait le non-ostensif lié au concept de dérivée.

TECHNIQUE	TECHNOLOGIE
Ostensifs	**Ostensifs**
non-ostensifs	

Cependant, les ostensifs et les non-ostensifs sont "des *émergents* de la praxis humaine, sans qu'on puisse établir *a priori* d'antériorité des uns par rapport aux autres", bien qu' "une manipulation ostensive suppose du non-ostensif et que, inversement, le non-ostensif ne puisse vivre qu'à travers de l'ostensif".

En résumé, l'approche anthropologique décrit l'activité mathématique en termes d'organisations praxéologiques qui "se donnent à voir" à travers les ostensifs qui constituent les tâches, techniques, technologies et théories (composants desdites praxéologies) ainsi qu'à travers les diverses façons de les manipuler. Or ces ostensifs peuvent être appréhendés suivant leur *registre* (oral, écrit, graphique, gestuel ou matériel) qui détermine leur *nature*, ou suivant leur *fonction* qui peut se situer soit sur le plan *sémiotique* : "dès qu'ils sont pris dans des pratiques institutionnelles déterminées, les objets ostensifs ont le pouvoir d'évoquer des complexes d'objets ostensifs et non-ostensifs avec lesquels ils entrent en interrelation", soit sur le plan *instrumental* : "les objets ostensifs sont alors des entités qui permettent, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail." Par ailleurs, comme nous allons le voir dans l'exemple qui suit -proposé par les auteurs-, les deux dimensions sémiotique et instrumentale sont dialectiquement liés :

" L'écriture

$$7\text{m/s}^2 = \frac{7\ m}{(1\ s)^2} = \frac{7 \times 10^{-3}\ km}{(\frac{1\ h}{3600})^2}$$

n'a pas de sens au motif qu 'on ne peut pas élever au carré des durées ou diviser des distances par des durées au carré'. En réalité, on signifie par là qu'il n'existe pas, dans l'institution où se réalise l'affirmation, de complexes d'objets auxquels une telle écriture puisse être reliée, c'est-à-dire d'organisations praxéologiques incluant des techniques de manipulation de cet ensemble d'ostensifs et, surtout, des discours technologiques et théoriques permettant de décrire et de justifier ces pratiques, en en délimitant le domaine de validité."

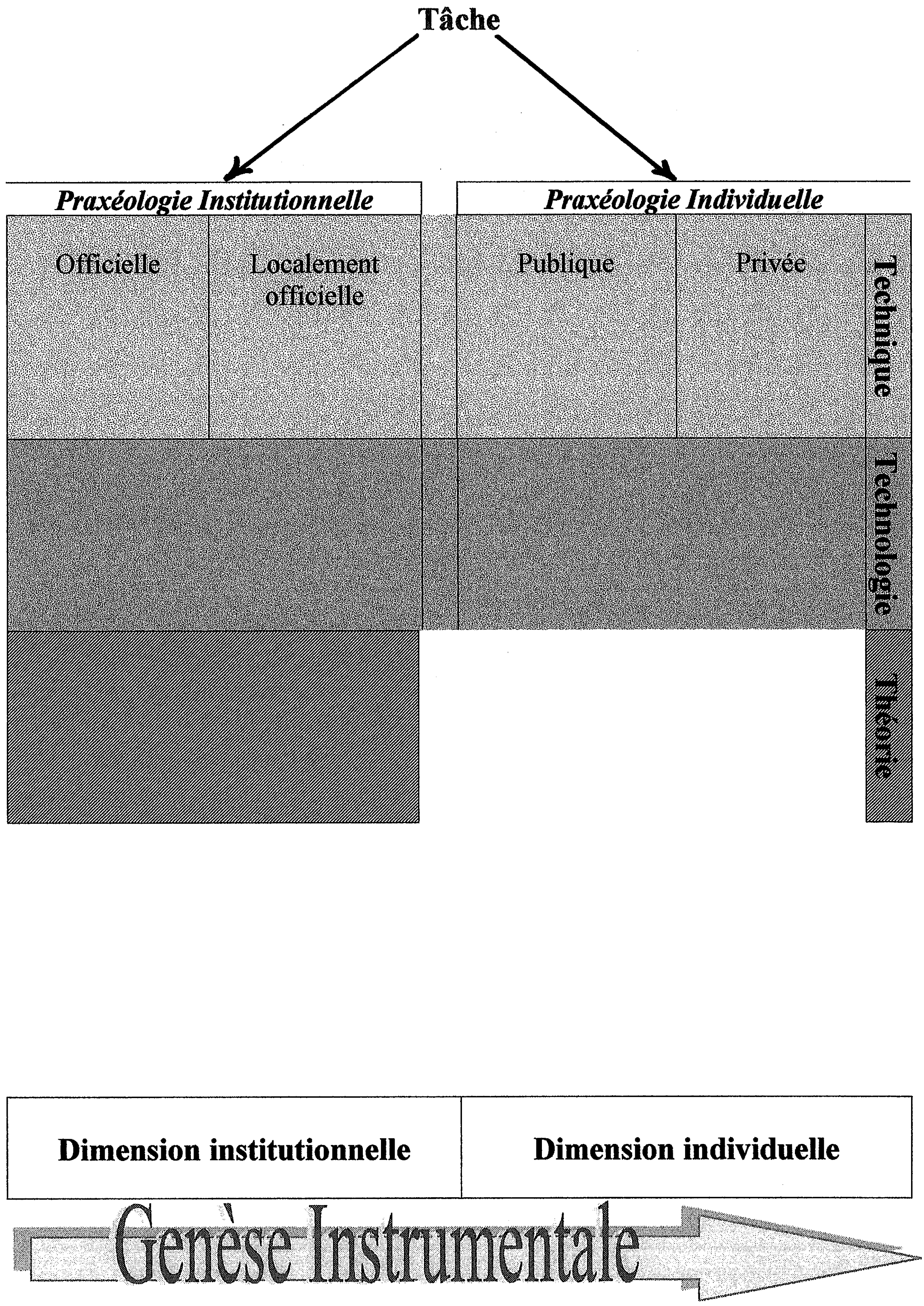
Comment articuler alors cette approche avec celle de l'ergonomie cognitive?

Nous avons vu dans ce qui a précédé que pour un type de tâches donné, une technique se traduisait par la 'manipulation concrète' d'ostensifs. Une technique serait alors *une manière de manipuler* des ostensifs, étant donné qu'elle est définie comme 'une manière de faire'. Dans la mesure où les artefacts sont des *objets fabriqués* [Rabardel, 1995], matériels ou symboliques, nous pouvons les considérer comme une classe d'ostensifs : celle qui correspond au registre matériel. Dans ce cas particulier, nous dirons qu'*une technique est une manière de manipuler des artefacts.* Nous pensons que cette manière de manipuler est sous-tendue par des *schèmes d'utilisation* (ibid.). En ce sens, une technique se traduirait par la mise en œuvre d'un schème intégrant de manière articulée un ou plusieurs artefacts. Autrement dit, une technique se traduirait par la mise en œuvre d'un système articulé d'instruments, où chaque instrument est une 'entité mixte formée d'un artefact (ou ostensif matériel) et d'un schème d'utilisation'.

Par ailleurs, dans son approche anthropologique Chevallard modélise les pratiques mathématiques en ne considérant que les praxéologies institutionnelles, à savoir les techniques, les technologies et les théories qui gravitent autour d'un type de tâches dans une institution donnée. Pour notre part et compte tenu du fait que l'ostensif (matériel) qui est au centre de notre recherche, la TI92, n'est pas pris en charge *a priori* institutionnellement, nous considérerons pour tout type de tâches (institutionnelles) deux types de praxéologies différentes :

- des *praxéologies institutionnelles* qui se composent de techniques, de technologies et de théories institutionnelles. Nous distinguerons de plus deux types de techniques : d'une part, des techniques *officielles* qui font partie du *savoir* 'prévu' dans les programmes diffusés au niveau national. D'autre part, des techniques *localement officielles* qui accompagnent éventuellement celles qui sont *officielles* mais qui sont spécifiques à l'institution *locale* représentée par l'enseignant. Citons à titre d'exemple, les techniques à but mnémonique (mnémotechniques) du type "l'ami de mon ami est mon ami . . ." que certains enseignants proposent à leurs élèves pour retrouver le signe d'un produit de facteurs. Citons également des techniques utilisant des artefacts (matériels ou symboliques) non connus ou non pris en charge institutionnellement, tels que la TI92 par exemple. Nous pouvons même définir les techniques *localement officielles* comme étant des techniques qui mettraient en œuvre des *instruments non institutionnels*, où le terme instrument est pris dans son acception artefact-schèmes d'utilisation. Ceci signifierait donc soit l'utilisation d'artefacts *non institutionnels* (au sens où ils ne font pas partie des ostensifs usuels des pratiques institutionnelles), soit la mise en œuvre - pour des artefacts, institutionnels ou non - de modes opératoires non prévus institutionnellement.

- des *praxéologies individuelles*, où, pour le même type de tâches institutionnelles l'élève mobilise des techniques (englobant aussi des techniques artisanales propres à l'élève sans existence officielle même au niveau local), et des technologies mais pas de théorie. Nous distinguerons deux types de techniques : des techniques *publiques* correspondant à la composante *publique* du travail de l'élève [Coppé, 1993] et des techniques *privées* correspondant à la composante *privée* de l'activité de l'élève et qui sont donc moins accessibles (et restent souvent non accessibles) au 'regard institutionnel'. L'intérêt de distinguer ces types de praxéologies nous semble d'autant plus grand que, dans


Tâche
Praxéologie Institutionnelle
Praxéologie Individuelle
Officielle
Localement officielle
Publique
Privée
Technique
Technologie
Théorie
Dimension institutionnelle
Dimension individuelle
Genèse Instrumentale

l'environnement-TI92, le travail de l'élève est encore moins 'contrôlable' par l'enseignant que dans un environnement classique.

Et la genèse instrumentale?

L'instrumentation :

Dans la mesure où elle est tournée vers les schèmes, l'instrumentation concernerait l'émergence et l'évolution de cette composante en fixant l'artefact correspondant. Autrement dit, l'étude de l'instrumentation suppose la donnée d'un artefact (ou ostensif) et se traduit par l'étude de la genèse des schèmes mobilisés par l'utilisateur pour résoudre un type de tâches donné. Les processus d'instrumentation accompagneraient donc l'évolution des techniques pour un type de tâches et un ostensif (artefact) donnés.

L'instrumentalisation :

Rappelons tout d'abord que l'instrumentalisation est orientée vers le pôle artefact. Elle concerne l'évolution matérielle et fonctionnelle de cette composante. Hormis les transformations matérielles que peut subir un ostensif (ou artefact), celui-ci concernerait donc l'évolution de son statut.

Ainsi, l'étude de la genèse instrumentale, qui est celle des processus d'instrumentalisation et d'instrumentation se traduit-elle par la prise en compte de trois dimensions : la transformation matérielle de l'ostensif, l'évolution des schèmes d'utilisation et l'évolution du statut de l'ostensif.

Instrumentation	**Instrumentalisation**
Evolution de Schèmes d'Utilisation	**Transformation matérielle de l'ostensif** **Evolution du statut de l'ostensif**

Genèse Instrumentale

Par ailleurs, ces trois composantes peuvent également traduire le *rapport du sujet* (l'utilisateur) *à un objet ostensif donné*. En ce sens, l'étude de la genèse instrumentale (où l'ostensif se mue en instrument) revient à l'étude du rapport à l'ostensif en question.

Alors que la transformation matérielle de l'ostensif peut se réduire dans le cas de la TI92 à une *personnalisation* allant de la gestion des répertoires à la programmation en passant par le téléchargement de jeux électroniques, l'étude de l'évolution du statut de l'ostensif TI92 (ou de ses sous-ostensifs que sont les commandes) nous semble beaucoup plus complexe. En effet, mis à part la difficulté méthodologique à observer ce type d'évolution, il nous paraît nécessaire de faire un détour théorique par l'approche anthropologique pour mieux cerner cette composante de la genèse instrumentale. Plus précisément, il nous semble plus qu'utile de considérer les dimensions instrumentale et sémiotique dans le cas où plusieurs ostensifs sont en "concurrence" pour la résolution d'une tâche, les facteurs *instrumentalité* et *sémioticité* sont à prendre en compte. Rappelons que l'instrumentalité d'un objet ostensif est sa *valence instrumentale*. Ainsi, par exemple, selon Chevallard et Bosch déjà cités, "dans l'usage algébrique ordinaire, la notation $\sqrt{\ }$ d'une part, et la notation à l'aide de l'exposant fractionnaire $\frac{1}{2}$ d'autre part, ont un rendement voisin lorsqu'on les utilise pour effectuer le travail suivant : $\sqrt{2x3} = \sqrt{2}\ x\ \sqrt{3}$;
$(2 \text{ x } 3)^{1/2} = 2^{1/2} \text{ x } 3^{1/2}$. En revanche, pour calculer la dérivée de la fonction $\sqrt{x}$ la seconde notation se révèle instrumentalement supérieure en ce qu'elle permet d'effectuer un travail qu'on ne peut formellement reproduire à l'aide de la première : $\sqrt{x} = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}\ x^{\frac{1}{2}-1}$
$= \frac{1}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Nous (les auteurs) dirons que, par rapport à la technique de dérivation employée (et il en irait de même par rapport à la primitivation), la notation exponentielle a une *plus grande instrumentalité* que la notation $\sqrt{\ }$: elle permet la mise en œuvre d'une technique qui ne peut se réaliser au moyen de la notation $\sqrt{\ }$. L'instrumentalité d'un ostensif dépend ainsi du nombre de techniques dans lesquelles il peut intervenir et elle sera d'autant plus grande que ces techniques se montreront robustes et fiables dans l'accomplissement des tâches concernées. ".

Par ailleurs, la *sémioticité* d'un objet ostensif ou sa *valence sémiotique* "désigne le fonctionnement dudit ostensif comme *signe* . . . la valence sémiotique d'un ostensif fonctionne en étroite relation avec sa valence instrumentale : dans un cas on peut ainsi manipuler $\frac{dy}{dx}$ comme un quotient *, dans l'autre il apparaît comme un tout figé, inerte (pour désigner la dérivée de la fonction $y = y(x)$). La complexe dialectique de l'instrumental et du sémiotique conduit ainsi à différents cas de figure. L'ostensif peut notamment perdre son instrumentalité en perdant sa sémioticité, par exemple parce que les techniques de manipulation qui le rendaient opératoire ont cessé d'être intelligibles et justifiables. En sens inverse, l'ostensif peut acquérir une plus grande instrumentalité par le fait d'un travail technologique. Pour le dire autrement, dans un cas l'emploi de l'ostensif se trouve " privé de sens " du fait de l'obsolescence des technologies associées aux techniques qui le mobilisaient jusque-là, tandis que, dans un autre cas, de nouvelles technologies pourront venir " (re)créer du sens " en justifiant cet emploi".

Transparence des ostensifs-TI92 :

Considérons maintenant les ostensifs-TI92 à la lumière de ces deux notions que sont l'instrumentalité et la sémioticité. Nous pouvons les différencier en trois grandes catégories qui ne sont pas forcément disjointes :

- Une première catégorie d'ostensifs conçus pour résoudre des tâches mathématiques usuelles, et que nous pouvons classer en trois sous-catégories principales :

  a - Des ostensifs référant directement à des ostensifs usuels du travail en p/c.

---

* Comme dans les manipulations suivantes [ibid.] :

$$y = \arcsin x \Rightarrow \sin y = x \Rightarrow \cos y\, dy = dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

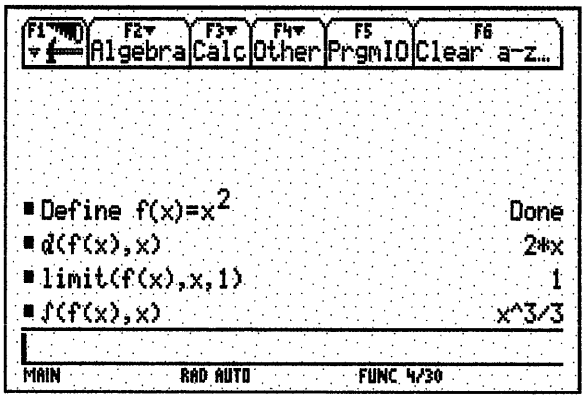
$$\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow dy = y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx + C \Rightarrow \ln|y| = x + C \Rightarrow y = k e^x$$

Exemples :

d(f(x),x) pour désigner f'(x)

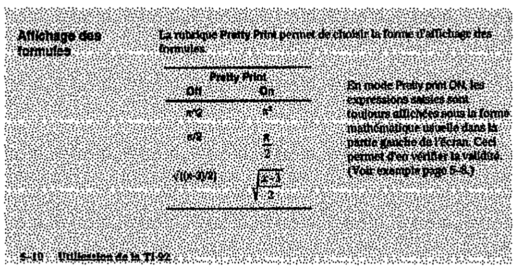
limit(f(x),x,1) pour désigner $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$\int (f(x),x)$ pour désigner $\int f(x)dx$



→ **pour le calcul de la dérivée**
→ **pour le calcul de la limite**
→ **pour le calcul d'une primitive**

Ce souci de référence (chez les concepteurs) aux ostensifs-p/c est matérialisé par la présence de la commande *Pretty Print* qui permet de transformer l'écriture en ligne en écriture usuelle :

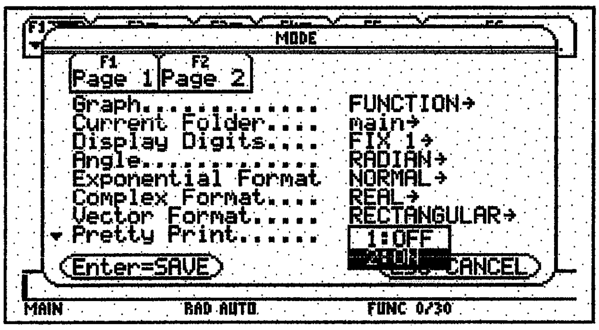

Affichage des formules

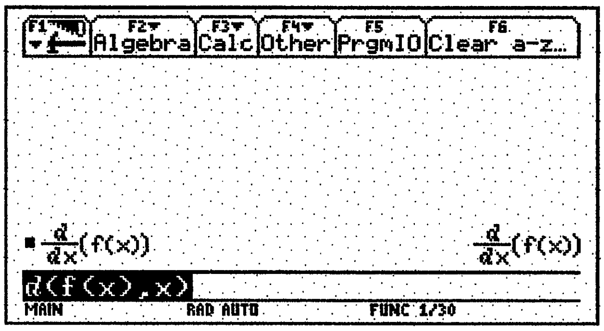
La rubrique Pretty Print permet de choisir la forme d'affichage des formules.

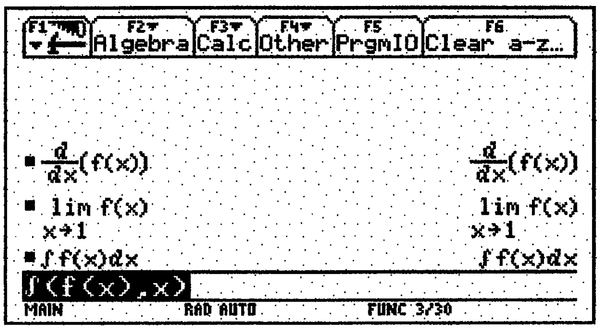
Pretty Print Off	On
π^2	π^2
π/2	$\frac{\pi}{2}$
√((x-3)/2)	$\sqrt{\frac{x-3}{2}}$

En mode Pretty print ON, les expressions saisies sont toujours affichées sous la forme mathématique usuelle dans la partie gauche de l'écran. Ceci permet d'en vérifier la validité. (Voir exemple page 5-8.)

5-10 Utilisation de la TI-92

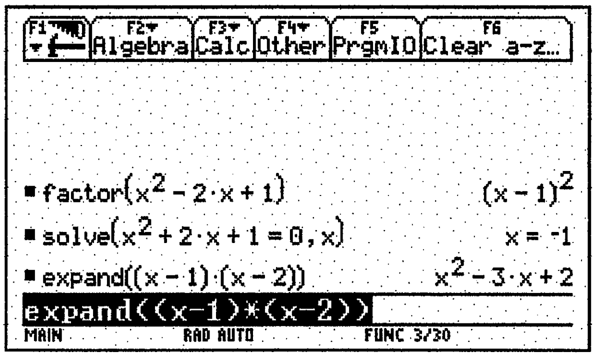




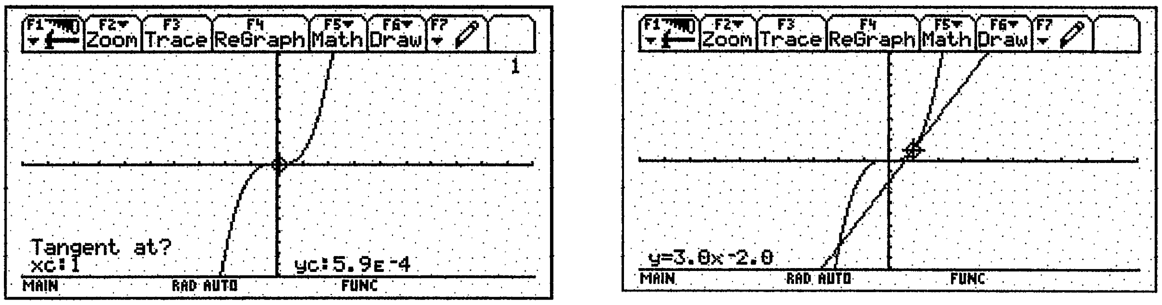


b - Des ostensifs ne correspondant pas à des ostensifs-p/c mais ayant cependant pour fonction de résoudre des tâches usuelles de l'environnement p/c.

<u>*Exemples*</u> :

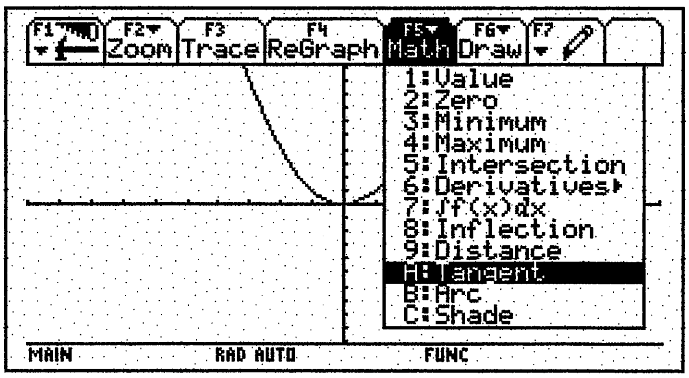


→ **pour factoriser des expressions**
→ **pour résoudre des équations**
→ **pour développer des expressions**



pour tracer la tangente et calculer son équation

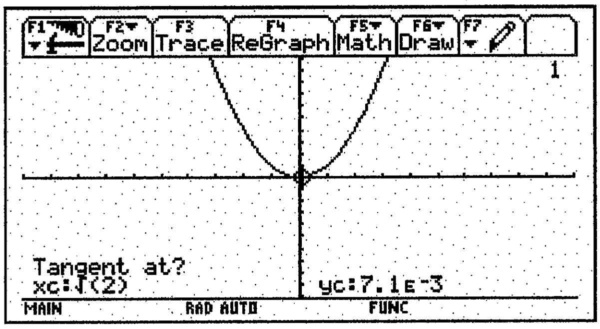
<u>Exemple</u> : l'ostensif-TI92 "*Tangent*" qui se présente sous la forme d'une commande se situant dans l'application GRAPH

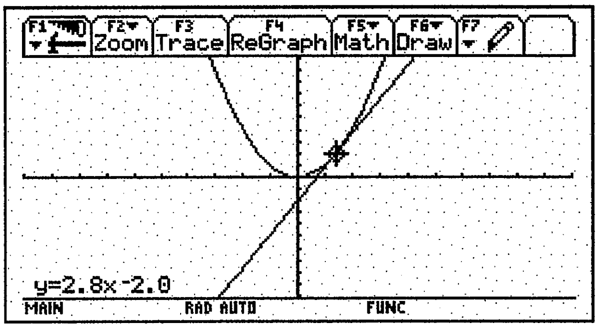


Cette commande est censée, comme l'indique la manuel de *Texas Instruments* (Cf ci-après), donner l'équation de la tangente en un point donné de la courbe

Note. Les deux points peuvent être sur la même courbe, ou sur des courbes distinctes.	Distance entre deux points	Distance [F5] [9]	Définir le premier puis le deuxième point.
	Tangente	Tangent [F5] A	1. Choisir la courbe à utiliser. 2. Définir le point.
	Longueur d'un arc de courbe	Arc [F5] B	1. Choisir la courbe à utiliser 2. Définir les deux extrémités de l'arc.
Note. Voir aussi l'utilisation des styles Above et Below page 7-10.	Ombrage	Shade [F5] C	Hachure la partie de plan définie par : $\{M(x,y) \in P / a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ 1. Appuyer sur [F5] C 2. Choisir la courbe représentant *f*, puis celle représentant *g*. 3. Définir les valeurs de *a* et *b*.

Par exemple, l'équation de la tangente à la courbe de la fonction définie par $x \mapsto x^2$ au point d'abscisse $\sqrt{2}$ est y= 2.8 x - 2.



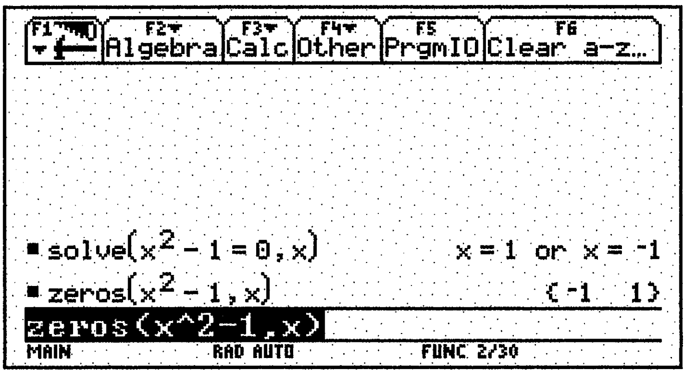


Cette équation n'est donc qu'une approximation de l'équation de la tangente qui est :

$$y = 2\sqrt{2}\ x - 2$$

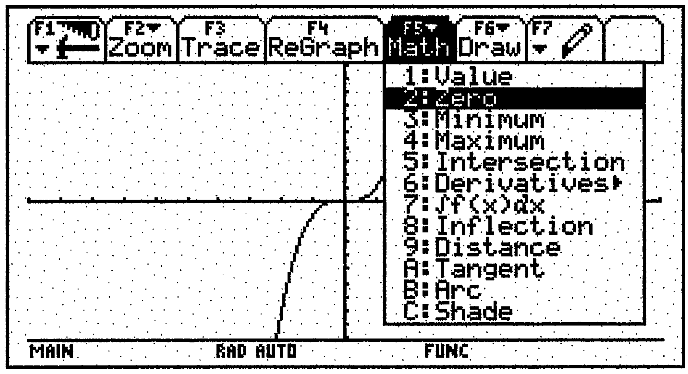
Ainsi, l'ostensif-TI92 "*Tangent*" ne résout qu'approximativement la tâche P/C qui est de "chercher l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $\sqrt{2}$ ".

<u>*Remarque*</u> : Alors que les deux ostensifs-TI92 "*Solve*" et "*Zeros*" obéissent aux mêmes algorithmes de résolution, ils ne partagent pas la même syntaxe et n'affichent pas le résultat sous la même forme :

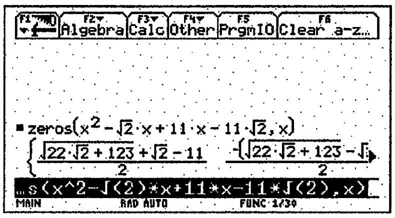


Nous constatons ainsi la coexistence de deux ostensifs-TI92 ayant une même fonction et dont l'écart ne se situe qu'au niveau de la syntaxe et de la forme du résultat. Mais ceci n'est pas toujours le cas.

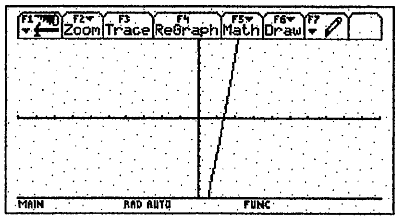
Considérons la commande *Zero* accessible dans l'application GRAPH :

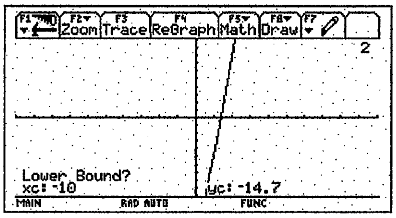


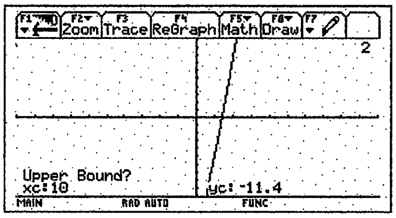
Bien que cet ostensif évoque, par son nom, celui qui se trouve dans l'application HOME, l'écart entre les deux est beaucoup plus important que celui qui a été mis en évidence dans l'exemple précédent. En effet, alors que l'ostensif '*Zeros*' a pour fonction de chercher les zéros dans l'ensemble IR (ou même C) et peut afficher les résultats sous forme exacte ou approchée, l'ostensif '*Zero*' ne fournit qu'un zéro (quand celui-ci existe et est accessible à la machine) à la fois, dans un intervalle donné - par l'utilisateur - et n'affiche le résultat que sous une forme approchée.

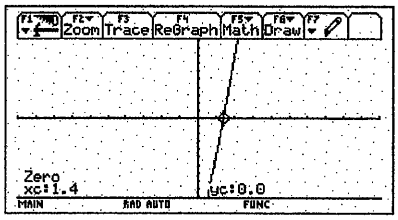


← **HOME** **GRAPH** →









c - Des ostensifs qui ne font référence à aucun objet mathématique de l'environnement p/c.

<u>*Exemples*</u> : *Define - ZoomFit - ZoomStd* . . .

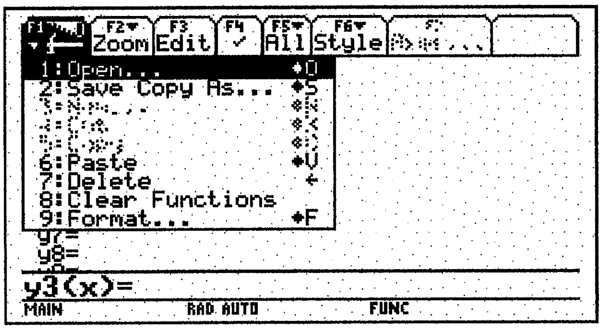
Il est admis que des outils tels que la TI92 sont puissants. De là à considérer que les ostensifs-TI92 sont d'une puissance et d'une efficacité qui leur confèrent une instrumentalité bien supérieure à celle des ostensifs-p/c, il n'y a qu'un pas . . . que nous ne franchirons pas. En effet, avant de comparer les ostensifs intervenant dans les deux environnements (TI92 et p/c), il nous semble nécessaire de s'interroger sur leur nature et leur fonctionnement. Pour cela, prenons un exemple :

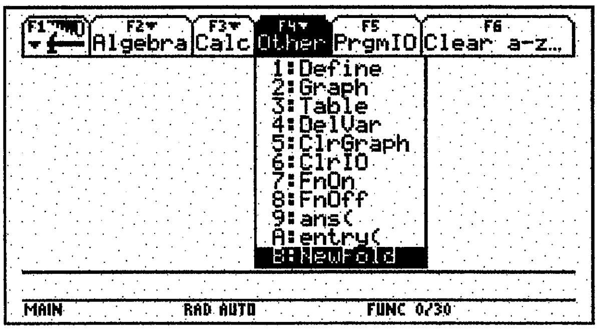
Dans l'environnement p/c, le fait de savoir écrire correctement l'ostensif " $\lim_{x \to 1} f(x)$ " ne permet nullement de calculer cette limite. Pour résoudre cette tâche de calcul de limite, une ou plusieurs techniques sont nécessaires, ce qui suppose la mobilisation de connaissances mathématiques. En somme, la présence d'un tel ostensif dans un travail p/c peut être dans un objectif de traitement. Mais, et c'est là où la distance entre les deux types d'ostensifs nous paraît des plus significatives, cette présence peut avoir d'autres visées : à savoir la communication (cas de la rédaction comme élément du contrat), l'organisation du travail ou encore l'argumentation.

Par ailleurs, la présence de l'ostensif " $\lim_{x\to 1} f(x)$ " dans un environnement TI92 suppose celle de la tâche du calcul de limite, donc celle d'une technique. Ainsi, un ostensif-TI92 serait en réalité un condensé d'un ostensif et d'une technique. Cette différence fondamentale nous pousse à considérer avec précaution les comparaisons entre "ostensifs"-TI92 et ostensifs-p/c même lorsque ceux-ci sont homonymes. En revanche, il nous semble bien plus utile de situer ces comparaisons par rapport aux objectifs didactiques des activités où lesdits ostensifs apparaissent. Ainsi, au lieu d'opposer a priori deux ostensifs homonymes, il conviendrait plutôt de prendre en compte les connaissances visées (par l'enseignant) et de les comparer à celles que chacun des ostensifs en question permet de mettre en jeu.

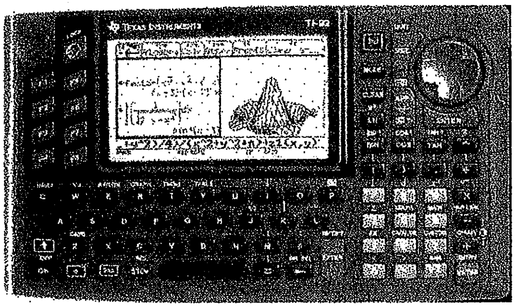
En fait, et en raison de toutes ces considérations, les ostensifs-TI92 sont, quel que soit leur degré de parenté avec les ostensifs usuels (p/c), de nouveaux objets mathématiques au sens où ils ont une nature et un fonctionnement propres, et dans la mesure où leur utilisation mobilise des connaissances spécifiques. Ainsi, "*solve*", "*factor*" ou "*expand*" sont des objets nouveaux mais également "*limit*" ou "*d*".

- Une deuxième catégorie d'ostensifs qui fait référence au monde informatique tels que : '*Open*', '*Save Copy As*' ou '*NewFold*'.





Cette référence est flagrante non seulement par l'existence d'ostensifs tels que ceux évoqués ci-dessus, mais également par la structure même de l'interface, que ce soit au niveau de l'écran (existence et fonctionnement des menus déroulants) ou au niveau du clavier (choix de la disposition de type QWERTY qui est un des deux standards existant sur le marché mondial de l'informatique)



- Enfin une troisième catégorie d'ostensifs qui fait référence à un tiers-monde culturel que nous dénommerons *e-culture* ou *culture électronique* (télévision, radio, jeux électroniques, caméscopes, cinéma, PAO* . . .). La forme même de la machine semble fortement inspirée de consoles de jeux électroniques. La présence - très importante - des ostensifs de cadrage (*ZoomFit, ZoomStd* . . .) dans l'application GRAPH nous montre également la prégnance de l'emprunt. En effet, le terme même de Zoom désigne une métaphore qui se veut évocatrice de phénomènes dont l'utilisateur (l'élève) est censé avoir l'habitude de par son expérience sociale, que ce soit au contact d'un caméscope, d'un appareil photo, d'un logiciel de PAO ou même en tant que téléspectateur.

* Publication Assistée Par Ordinateur

Conclusion :

Nous avons proposé tout au long de cette partie théorique un certain nombre d'outils susceptibles de nous aider dans l'analyse des données expérimentales que nous possédons. Cependant, notre approche ne saurait être considérée en dehors de la problématique qui lui a donné naissance. Aussi a-t-on mis en évidence, dans le chapitre concernant la dimension cognitive, les deux facettes de notre artefact (la TI92) :

- D'une part, en tant qu'objet technique ayant un fonctionnement propre et des contraintes spécifiques, que nous avons essayé de classer en les situant par rapport à des niveaux d'information, ces derniers répondant à des critères d'accessibilité et de visibilité pour l'utilisateur (l'élève).
- D'autre part, en tant qu'objet "mathématique" permettant, entre autres objets, de résoudre des tâches d'ordre mathématique.

Toutes ces considérations nous semblent nécessaires pour répondre aux questions que nous nous sommes posées au départ. Ainsi, la prise en compte des différents types de contraintes et des niveaux de connaissances qui peuvent entrer en jeu lors d'une manipulation de la machine, nous semble primordiale si l'on veut repérer et étudier les facteurs pouvant rendre efficace la gestion de tels objets comme instruments du travail mathématique. De même, la mise en évidence du caractère double de l'artefact (TI92), comme objet technique et comme objet "mathématique", nous paraît nécessaire si l'on veut savoir comment l'utilisation de la machine combine des connaissances mathématiques et des connaissances-machine.

Par ailleurs, l'adaptation des notions d'*instrument* (artefact + schèmes) et celle de *genèse instrumentale* introduites par Rabardel nous paraît fructueuse pour notre problématique. Cette approche nous semble permettre : d'une part, d'appréhender la dimension développementale qui sous-tend l'évolution de l'utilisation de la machine, et d'autre part de mettre l'élève au centre même de l'activité. Tout ceci nous fournit un cadre pour étudier la construction des connaissances accompagnant cette utilisation, et plus généralement pour étudier l'évolution du rapport de l'élève à l'artefact TI92. Or ce rapport ne peut être considéré indépendamment de l'institution où l'élève, l'artefact et les tâches coexistent, dans la mesure où l'on s'est proposé dans notre problématique de chercher comment les connaissances - qui entrent en jeu dans l'utilisation de la TI92 - s'articulent avec celles visées par l'institution scolaire et comment leur apprentissage est pris en charge par ladite institution.

Dans cette perspective, il nous a semblé fort utile d'opter pour le modèle proposé par Chevallard dans son approche anthropologique des pratiques sociales, et plus précisément celles qui sont "à mathématiques". En effet, cette modélisation permet :

- D'une part, de considérer les objets - qu'ils soient matériels, gestuels, écrits, oraux ou écrits - comme dépendant fortement des pratiques où ils interviennent et donc des institutions qui mettent en jeu ces pratiques.
- D'autre part, de distinguer la nature des objets (qui est déterminée par les registres auxquels ces objets appartiennent) et leur fonction qui peut être d'ordre sémiotique ou instrumentale ou, comme c'est le plus souvent le cas, combiner ces deux dimensions.

En outre, le modèle *(type de) tâches / (type de) techniques / technologies / théories* que cette approche propose, nous semble offrir un moyen de situer les objets en leur affectant un statut dans l'activité.

Enfin, par la distinction *ostensif / non ostensif*, ce cadre théorique nous permet de prendre en compte la dimension perceptive d'un objet dans notre analyse des pratiques qui le mettent en jeu.

Ceci dit, nous nous proposons à travers cette recherche de répondre à des questions plus spécifiques, liées à l'artefact TI92 et se réduisant au niveau d'apprentissage et aux tâches choisis. En voici les principales :

- Comment la diversité des registres et la puissance des ostensifs offerts par la TI92 vont-elles se répercuter sur l'activité des élèves ? Que vont-elles renforcer et que vont-elles masquer ?
- Y a-t-il des connaissances mathématiques derrière les connaissances-machine de la TI92 ? Si oui, à quels niveaux, relativement à notre *typologie des contraintes* vont-elles intervenir le plus ?

- Quelle sera l'influence de la dimension institutionnelle sur les pratiques instrumentées - TI92 ? Est-elle plus forte que la dimension personnelle même quand le contrat change, comme ce sera le cas dans les entretiens ?
- Est-ce que pour tous les élèves, les processus d'instrumentation évoluent durant l'année ? Si oui, de quoi cette évolution tient-elle compte et qu'affecte-t-elle en priorité ?
- Comment évolue l'instrumentalisation ? et plus spécifiquement, comment évolue le statut des applications-TI92 et comment ces dernières s'articulent-elles entre elles, et avec l'environnement p/c ?
- A quel niveau faut-il agir - dans la prise en charge institutionnelle - pour améliorer l'instrumentation ? Dans quelle direction faudrait-il orienter la gestion institutionnelle de la machine ?

Contexte de la recherche :

Nous avons participé durant les deux années 1995-96 et 1996-97 à un projet sur l'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée. Cette recherche qui porte plus précisément sur les modes d'appropriation de la calculatrice TI92 en classe de Première S, se situe dans le prolongement d'une étude menée de 1993 à 1995 par l'équipe DIDIREM sur l'intégration du logiciel DERIVE à l'enseignement des mathématiques [Abboud & al, 1995].

Dans cette partie de notre thèse, nous nous baserons sur les données de cette recherche et sur certains de ses résultats. Précisons par ailleurs, et compte tenu de la complexité des processus qui semblaient sous-tendre l'utilisation d'un tel outil, qu'un ensemble diversifié de données a été pris en compte notamment :

- des observations régulières de séances de classe portant sur l'enseignement de l'analyse,
- un suivi des élèves par le biais de trois questionnaires au rythme d'un par trimestre,
- un suivi par entretiens avec un nombre plus limité d'élèves (au nombre de neuf durant l'année 1995-96 et six l'année suivante) choisis pour présenter des profils diversifiés tant dans leur rapport aux mathématiques que dans leur rapport aux technologies informatiques.

Méthodologie :

Compte tenu de notre problématique et de notre cadre théorique, il nous a paru nécessaire pour l'étude de considérer un recueil de données diversifié, concernant à la fois l'enseignante, les élèves, le fonctionnement de la classe et plus globalement le fonctionnement institutionnel.

Pour ce qui est de cette partie expérimentale, nous la subdiviserons en deux sous-parties qui traiteront respectivement de la première et de la deuxième année d'expérimentation. Par ailleurs, chacune de ces sous-parties sera structurée de la même manière, conformément à l'esprit de la partie théorique. Ainsi, il y aura un chapitre sur la dimension institutionnelle, où l'analyse s'effectuera sur la base d'observations de classe et un autre sur la dimension individuelle, où nous allons prendre en compte les entretiens, un contrôle spécifique mais également des questionnaires.

1ère ANNEE D'EXPERIMENTATION

1ERE ANNEE D'EXPERIMENTATION :

Dimension Institutionnelle :

Pour ce qui est de l'enseignante, nous avons décidé d'essayer de cerner sa stratégie d'intégration de la calculatrice à travers les documents produits pour faciliter aux élèves la prise en main de la machine, la progression au fil de l'année dans l'introduction des commandes de la calculatrice, le type d'intégration effectivement pratiqué dans les séances d'enseignement. Nous souhaitions nous appuyer sur trois types de données : les documents de familiarisation, le cahier de bord de l'enseignante, l'observation régulière de séances d'enseignement. En fait, la rédaction régulière d'un cahier de bord mentionnant pour chaque séance son thème et ses objectifs, les types d'utilisation et leur durée approximative au cours de la séance, les applications et commandes sollicitées, en distinguant ce qui était a priori prévu de ce qui résultait de décisions en temps réel, le tout accompagné des commentaires nécessaires à la compréhension des décisions prises, s'est révélé beaucoup trop coûteux. Nous nous sommes donc finalement contentés des deux autres sources de données.

Pour ce qui est du fonctionnement de la classe, nous avons procédé à des observations régulières : une par mois environ, l'éloignement du site d'observation ne permettant pas une fréquence plus grande. Nous avons cherché de ce fait à centrer les observations sur la partie analyse de l'enseignement qui correspondait plus directement aux choix globaux effectués.

Pour ce qui est du fonctionnement institutionnel, il existait dans l'établissement un système de contrôles communs bi-trimestriels. Nous avons voulu, à partir des textes de ces contrôles négociés au sein de l'équipe enseignante, accéder aux attentes de l'institution à ce niveau. Les élèves de la classe expérimentale disposaient des calculatrices pour ces contrôles. Nous avons systématiquement organisé les entretiens peu après un contrôle commun pour pouvoir faire reconstituer par les élèves leur utilisation de la machine lors du contrôle et essayer de mettre en rapport cette reconstitution avec leur production écrite et leurs résultats. Pour des raisons de présentation, nous avons choisi de prendre en compte dans ce chapitre les observations de classe uniquement, l'utilisation de la machine en devoir commun étant traitée dans le chapitre consacré à la dimension individuelle, où une rubrique y est consacrée dans chaque entretien.

Nous allons essayer ainsi, observation par observation, de mettre en évidence certains points qui nous semblent pertinents dans le fonctionnement en classe avec la machine, tels que l'introduction des ostensifs-TI92 et l'approfondissement dans l'utilisation de certains d'entre eux. Nous prendrons en compte deux dimensions desdits ostensifs : en tant qu'objets techniques ayant leurs propres modes opératoires, et en tant qu'objets mathématiques partageant des non ostensifs avec d'autres ostensifs usuels (papier/crayon). Bien entendu, ces deux dimensions peuvent être imbriquées et nous ne manquerons pas de souligner alors le lien dialectique qui peut exister entre les connaissances mathématiques et les connaissances-machine qui entrent en jeu.

Par ailleurs, nous essaierons également de repérer la genèse de techniques instrumentées et de stratégies, sans oublier de considérer la répartition du travail en classe entre les phases individuelles et collectives, en distinguant ce qui se passe à la calculatrice rétroprojetable de ce qui se déroule au tableau. Nous n'oublierons pas toutefois de scruter l'évolution du statut des différentes applications qui peuvent être mises en œuvre dans l'utilisation de la TI92.

Situations observées :

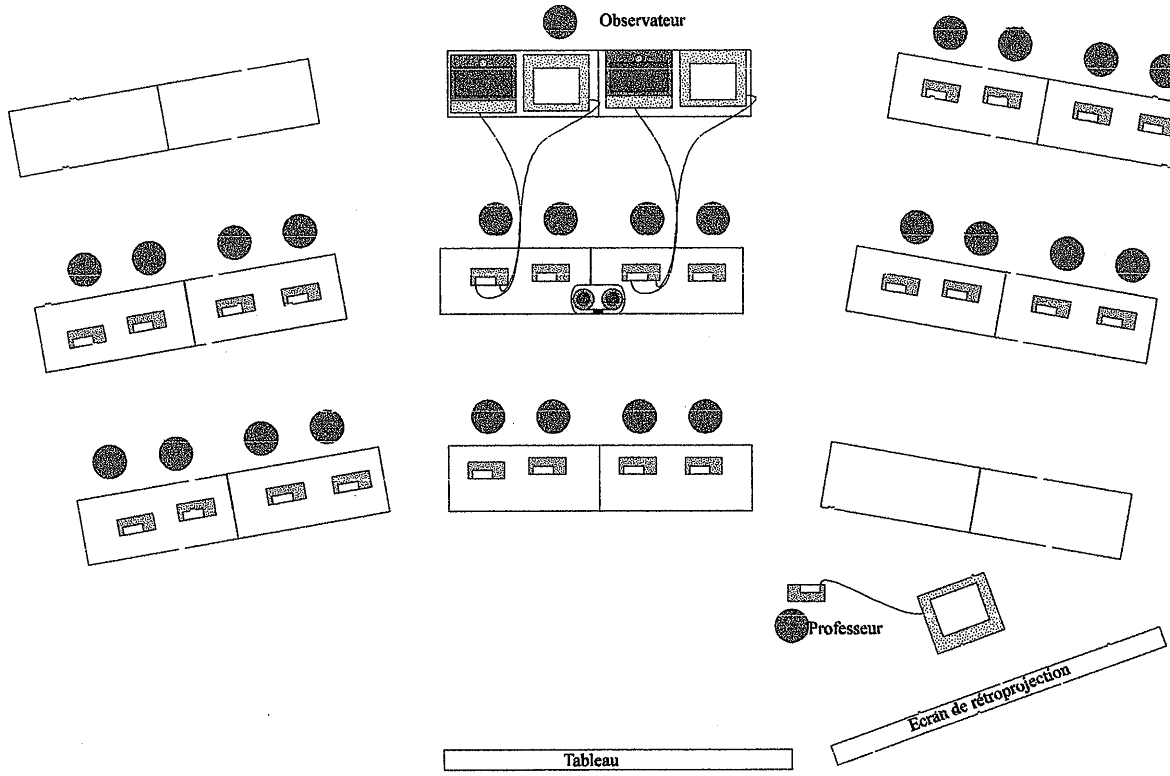
Voici un tableau qui retrace globalement les dates des séances observées, les thèmes abordés, les objectifs visés ainsi que la durée et la répartition entre travail collectif et individuel :

Date	Thèmes	Objectifs	Type de séance
20 Décembre	Prise en mains de la TI92 Notion de dérivée	Familiarisation TI92 Introduction cinématique de la notion de dérivée Lien vitesse / notion "algébrique" de tangente	Séance de deux heures en classe entière, alternant phases collectives et travail par binômes
22 Janvier	Optimisation	Modélisation d'une situation physique Exploitation de la notion de dérivée pour la résolution d'un problème d'optimisation.	Séance en demi-groupes (1h par demi-groupe) suivie d'une synthèse collective d'une heure

11Mars	Limites à l'infini	Exploration avec la TI92 de situations d'indétermination Elaboration de stratégies d'étude pour les limites de fonctions polynômes et rationnelles	Séance de deux heures en classe entière
1er Avril	Dérivées de fonctions composées	Elaboration de conjectures par utilisation du tableur Formulation du théorème et exploitation	Séance de deux heures en classe entière
20 Mai	Suites	Introduction de la calculatrice dans l'étude des suites (sens de variation)	Deux séances d'une heure en demi-groupes
3 Juin	Suites	Etude d'une suite définie par récurrence avec la TI92	Séance d'une heure en classe entière

Méthodologie d'observation :

Pendant les premières séances, la tablette rétroprojetable n'était pas encore disponible. Nous n'avions alors pu recueillir que des enregistrements audio en plus de la prise de notes, sachant que chaque observateur a essayé de suivre quatre élèves voisins. Par la suite, dès que cela a été possible, nous avons utilisé chacun, une tablette rétroprojetable et un ordinateur portable pour récupérer les écrans correspondant au travail de l'élève suivi. Par ailleurs, nous avons enregistré à l'aide d'un magnétophone le discours de l'enseignante et avons noté ce qui se passait tant sur l'écran de rétroprojection qu'au tableau. Pour donner une idée du dispositif, nous proposons le schéma suivant paru dans [Artigue & al, 1995]



Nous avons choisi de traiter de manière plus exhaustive les deux premières séances observées, en intégrant un résumé de leur déroulement. En ce qui concerne les autres, nous nous tiendrons aux résultats de notre analyse pour ne pas alourdir la présentation.

Observation 1 : introduction de la notion de dérivée (décembre 95)

Contexte :

Les machines ont été distribuées à la séance précédente ainsi que le document élaboré pour la prise en mains. Quelques élèves absents reçoivent la machine en début de séance. Sur le plan mathématique, l'enseignement en cours concerne l'introduction de la notion de dérivée. Cette notion a été préparée dans un cadre cinématique par l'étude du mouvement d'un mobile animé d'un mouvement rectiligne, la distance étant une fonction polynôme du second degré du temps. Différents calculs de vitesse moyenne ont été effectués en considérant des instants donnés et des durées données.

Objectifs :

La séance construite a pour objectif d'assurer le passage, dans ce contexte, à la notion de vitesse instantanée, de faire le lien entre la droite passant par le point d'abscisse a de la courbe et de coefficient directeur la vitesse instantanée et la tangente à la courbe au sens algébrique du terme, c'est à dire la droite passant par ce point et ayant une intersection double avec la courbe, enfin d'approcher le point de vue approximation en demandant d'évaluer l'erreur commise en approchant la courbe par sa tangente.

Deux exercices sont prévus :

Exercice 1

Un mobile se déplace sur un axe x'x et sa position à l'instant t par rapport à l'origine O, est donnée par son abscisse d(t) = 2*t^2 + 8*t avec t dans [0 ; 4].

1) Calculer la vitesse moyenne entre l'instant a et l'instant a+h.

2) Que peut-on dire de cette vitesse moyenne lorsque h tend vers 0 ?

3) a) Ecrire l'équation de la droite de coefficient directeur m, passant par le point A d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction d.

b) Peut-on déterminer m pour que cette droite coupe la précédente en deux points confondus ?

c) Déterminer la fonction g telle que y=g(t) soit l'équation de la tangente en A à la courbe.

d) Quelle erreur commet-on lorsque l'on prend g(a+h) comme valeur approchée de d(a+h) ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3-6x+2$.

1) Tracer la courbe représentative de f pour x appartenant à [-2 ; 2].

2) a) Ecrire l'équation de la droite de coefficient directeur m, passant par le point d'abscisse -1 de la courbe représentative de la fonction f.

b) Peut-on déterminer m pour que cette droite coupe la droite précédente en deux points confondus ?

c) Déterminer la fonction g telle que y=g(t) soit l'équation de la tangente en A à la courbe.

d) Tracer cette tangente.

e) Quelle erreur commet-on lorsque l'on prend g(-1+h) comme valeur approchée de f(-1+h) ?

3) Mêmes questions en remplaçant le point A d'abscisse -1 par le point B d'abscisse 0.

4) Mêmes questions en remplaçant le point A d'abscisse -1 par le point E d'abscisse a.

Dans le premier exercice, la fonction est, comme dans le travail préparatoire, une fonction du second degré mais on s'intéresse à un point d'abscisse a, dans le second, le même travail est proposé pour une fonction polynomiale du troisième degré, pour deux abscisses numériques : -1, 0 avant de passer au cas général.

Les élèves sont censés travailler en binôme, sur une période de deux heures, l'enseignante prenant en charge des bilans collectifs réguliers. L'enseignante fait l'hypothèse que le travail dans le module formel de la TI92 va leur permettre de gérer plus facilement, les calculs algébriques relativement complexes nécessités par cette séance et aider le passage au cas général attendu.

Déroulement :

Après distribution des machines, la séance commence par une phase collective, avec appui de la machine rétroprojetable, orientée vers la prise en mains de la machine, qui semble à l'enseignante d'autant plus nécessaire que, pour des raisons de grèves, certains élèves étaient absents à la séance précédente où les machines ont été distribuées. Cette phase va durer un quart d'heure, les élèves présents à la séance précédente y participent très activement, les réponses fusent.

8h20 : Les points suivants sont successivement abordés :

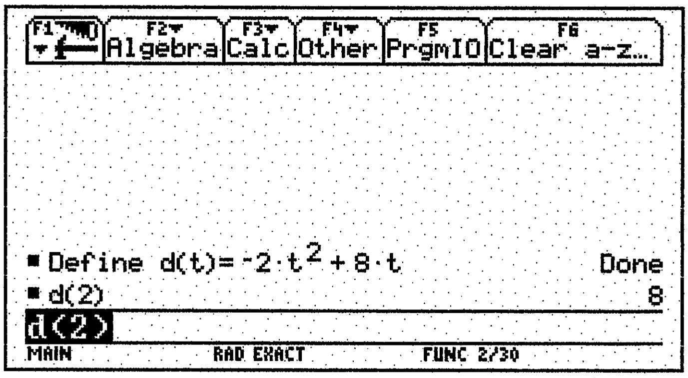
- Le changement d'applications : rappel des deux modes principaux, la touche diamant pour les applications Home, Y=, Graph, Window, Table et Tblset et la touche APPS valable pour toutes les applications.
- La touche Mode déjà utilisée pour changer les modes graphiques, pour partager l'écran en deux et préciser ce qui est mis dans chaque fenêtre, choisir le nombre de décimales en calcul approché, les unités d'angles, dans la séance d'initiation. L'enseignante passe en revue les quatre premières rubriques du menu MODE : Graph, Current Folder, Display Digits, Angle, en commentant chacune d'elles, puis elle passe à la page 2. Elle explicite les différents types de partage d'écran puis montre comment choisir les applications correspondant à chaque fenêtre, rappelant qu'à la séance précédente, ils ont ainsi utilisé Window Editor pour sauver des calculs. Elle passe ensuite à Split Screen Ratio et explique le sens des rapports donnés.
- La création d'un répertoire. Elle fait créer un répertoire Dérive où sera sauvegardé le travail de la séance. Elle effectue les opérations à la rétroprojetable et les élèves font de même sur

leur propre machine. Elle précise que le nom d'un répertoire est d'au plus 8 lettres, que la commande Newfold non seulement crée un répertoire mais envoie automatiquement dans ce répertoire, c'est à dire l'institue comme répertoire par défaut. Elle insiste sur la nécessité de structurer en répertoires, pour une machine dotée d'autant de mémoire, pour s'y retrouver aisément. Suite à la demande d'un élève, elle montre comment changer de répertoire courant dans Mode, en insistant sur la nécessité d'appuyer deux fois sur Enter.

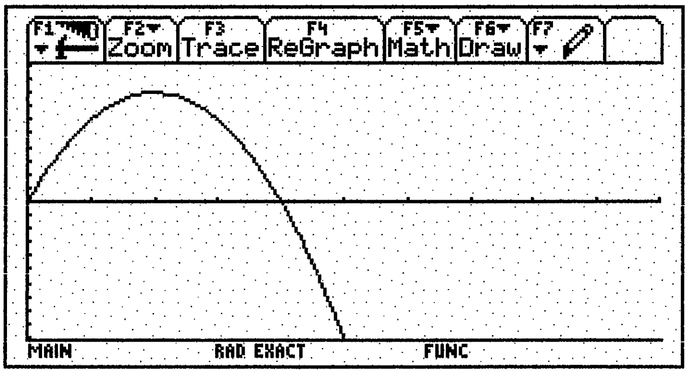
- La ligne d'état. Elle précise le sens de toutes les indications fournies.
- Le *nettoyage* de l'écran par Clear Home dans le menu F1, et la désaffectation des variables par F6. Elle montre sur un exemple que Clear Home ne désaffecte pas les variables mais que F6 libère les 26 adresses mémoires d'une seule lettre de a à z. Elle insiste sur la nécessité de le faire avant de commencer un nouvel exercice.

8h35 : Commence ensuite le travail sur les deux exercices qu'elle introduit en disant que, dans le premier, ils vont reconnaître quelque chose qu'ils ont fait pendant les deux séances précédentes. Collectivement, elle prend en charge la définition de la fonction d(t). Plusieurs élèves disent tout de suite qu'il faut aller dans F4 et faire Define, quelques uns disent F3. L'enseignante précise que si l'on a oublié que c'est dans F4, on peut toujours taper « define », et que l'on peut aussi aller chercher la commande dans 2nd Catalog. Elle montre comment faire et leur montre qu'alors la ligne d'état précise la syntaxe de la commande, ici : var(arg1,...)=expr.

Elle entre ensuite l'expression sur la rétroprojetable, chacun le faisant à sa place et explique pour les absents qu'il n'y a pas de touche carré comme sur les calculatrices, que pour les puissances, il faut utiliser la touche ^. Plusieurs élèves ne pensent pas à faire Enter quand ils ont fini de taper l'expression, d'autres se sont trompés de signe -, chaque fois, l'enseignante, qui circule, répercute au niveau collectif.



Elle fait tester collectivement que tout va bien en faisant calculer d(2), puis passe au tracé graphique, en demandant à un élève de la piloter. Il propose d'aller dans Y=. Elle demande si c'est la seule possibilité et un autre propose « diamant GRAPH ». L'enseignante montre que ça ne marche pas et indique elle-même la possibilité utilisant la commande GRAPH du menu F4 de Home. Elle passe ensuite à Y=. Plusieurs élèves demandent comment effacer les fonctions qui restent de la séance précédente dans Y=. D'autres élèves demandent s'ils peuvent rentrer d(t) alors que la machine indique y1(x). Elle fournit collectivement les informations correspondantes. Ensuite, elle fait fixer la fenêtre de tracé. Il n'y a pas de problème, les élèves travaillant depuis le début de l'année avec les calculatrices graphiques et elle propose de prendre [0,10] comme intervalle pour y.

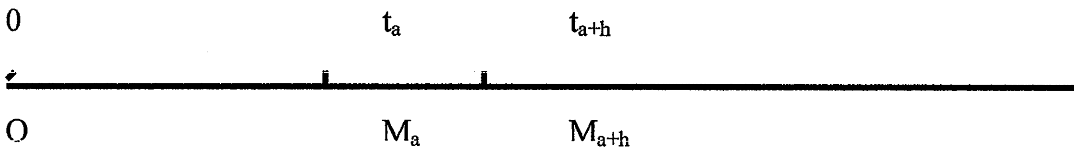


C'est la fin de ce lancement collectif qui a pris une dizaine de minutes et les élèves doivent maintenant travailler de façon autonome, l'enseignante et les observateurs étant là pour dépanner, en cas de besoin.

8h48 : Quelques problèmes liés à la calculatrice sont rencontrés : utilisation de graph dans Home avec une syntaxe incorrecte : graph d(x)= , non *nettoyage* des fonctions de la séance précédente dans Y– qui conduit à des messages d'erreurs lors du passage à GRAPH : *undefined variable*, grille mise par inadvertance. L'enseignante reprend ce point collectivement en montrant l'accès via Format dans le menu F1 de l'application GRAPH puis les élèves se remettent au travail.

Visiblement, cela ne va pas de soi pour la plupart d'entre eux. Ils recherchent dans leurs cahiers la définition de la vitesse moyenne et ont du mal à adapter les calculs faits à la nouvelle situation où interviennent deux variables : a et h. D'autres ont du mal à substituer a+h dans l'expression de d(t). La plupart font d'abord le calcul à la main avant de passer à la machine, ils ne pensent pas qu'il suffit d'entrer le quotient $\frac{d(a+h)-d(a)}{h}$ pour obtenir le résultat.

Ils restent bloqués dans le calcul littéral à effectuer. D'autres demandent la résolution du quotient en entrant : *Solve* (d(a+h)-d(a)/h), sans succès. Au bout d'une dizaine de minutes, l'enseignante décide de faire une intervention collective, sur cette notion de vitesse moyenne. Elle dessine un axe : sur lequel elle place les instants et les noms des points :



Elle demande ensuite comment trouver la vitesse moyenne entre l'instant a et l'instant a+h. Elle évoque leurs déplacements quotidiens pour susciter des réponses. On entend un peu de tout : le temps divisé par la vitesse, le temps par la distance, la distance par le temps.
Les discussions entre élèves sont animées avant d'arriver à la réponse : $M_{a+h}M_a/h$. De plus cette intervention n'est pas suffisante pour un certain nombre qui n'arrivent pas à exprimer ce quotient avec la fonction d. Finalement, un seconde intervention collective s'avère nécessaire pour que tout le monde dispose de la formule : $\frac{d(a+h)-d(a)}{a+h-a}$.
L'enseignante demande de faire les calculs à la main et de vérifier à la machine ensuite.
On note de grands décalages entre élèves. Certains ont terminé et passent à la suite, d'autres en sont toujours à calculer d(a+h).

9h15 : Point collectif avec détail du calcul de $d(a+h)=-2(a+h)^2+8(a+h)$. L'enseignante fait expliciter par les élèves la suite des opérations à effectuer pour terminer le calcul, ce qui n'est pas inutile, certains ayant perdu le fil, s'apprêtant à factoriser par (a+h).
Ceux qui, en avance, en sont à la question suivante : « Que peut-on dire de cette vitesse moyenne lorsque h tend vers 0 ? » concluent en général rapidement au vu de l'expression formelle, en remplaçant h par 0 pour obtenir -4a+8. Le groupe de Vincent, lui, se lance dans des calculs numériques avec la calculatrice, en prenant des valeurs de h de plus en plus petites : 3/4, 0.5, 0.1, 0.01, 0.00001 et arrive à la même conclusion.

9h30 : L'enseignante récapitule le calcul au tableau arrivant à l'expression : 8-4a-2h pour la vitesse moyenne que tous ou presque ont fini par obtenir. Elle prend en charge ensuite le passage à la limite qui visiblement ne pose pas dans ce cas particulier de problème aux élèves et essaie de faire faire le lien avec la notion de vitesse instantanée. C'est difficile. Les élèves sont d'abord silencieux. Elle évoque alors l'affichage du compteur de vitesse et la réponse inattendue qui se dégage est que ce qu'affiche le compteur de vitesse est faux. Enfin, un élève parle de vitesse instantanée. L'enseignante lui demande ce que ça veut dire pour lui. Il répond : « une vitesse croissante ». Les autres sont appelés à l'aide et quelqu'un propose : « la vitesse à l'instant t » sans pouvoir préciser plus. Un autre dit alors : « la vitesse entre deux points très proches ». L'enseignante confirme que ce qu'affiche le compteur, c'est bien une vitesse moyenne entre deux instants très proches puis définit théoriquement la vitesse instantanée comme limite de la vitesse moyenne lorsque l'intervalle de temps tend vers 0.

Elle essaie ensuite de faire le lien avec le travail de la séance précédente où un calcul analogue avait été fait avec non pas t=a mais t=1 et avec des valeurs de h successives de 0.1, 0.01.... pour lequel ils étaient déjà passés à la limite. La plupart n'ont pas l'air de se souvenir vraiment. Elle les envoie chercher dans leur cahier. L'attention baisse.

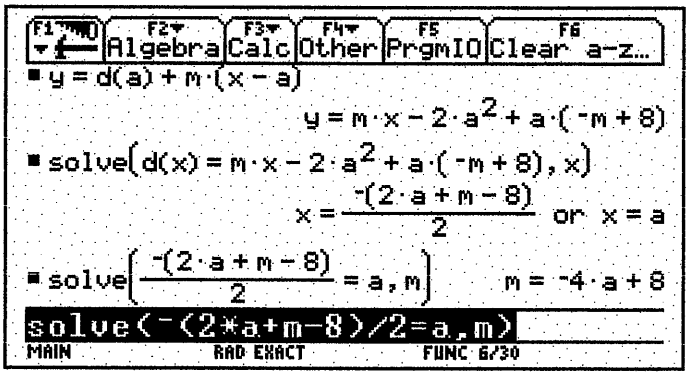
Un élève ne trouve pas comme les autres parce que sa variable h était déjà affectée. L'enseignante le mentionne collectivement et insiste une fois de plus sur la nécessité de libérer les variables, chaque fois que l'on commence un nouveau travail. Elle précise aussi comment libérer une seule variable, par exemple ici h si l'on a fait des essais numériques et que l'on veut revenir au calcul littéral en utilisant la commande Delvar. Un élève demandant où se trouve cette commande, elle répond puis leur rappelle que s'ils ont oublié dans quel menu elle est, ils peuvent aller la chercher dans Catalog, en tapant d pour avoir la liste des commandes commençant par d et elle détaille à nouveau l'opération correspondante.

On arrive maintenant à la question 3 : l'équation de la sécante. Les équations de droites ont été revues la semaine précédente. Les élèves peuvent faire les calculs à la machine mais il leur est demandé de marquer la définition et la façon dont ils obtiennent l'équation de la droite de coefficient directeur m sur le cahier. En fait, les notes prises par les élèves jusqu'à présent sont plutôt de type brouillon. Le temps avançant très rapidement, l'enseignante reprend la main assez vite et se fait dicter par les élèves la succession des calculs permettant d'arriver à l'équation : y-d(a)=m(x-a).

Elle attire leur attention sur la nécessité, dans l'entrée en machine de cette équation de rajouter un signe de multiplication entre m et (x-a) et demande pourquoi. Un élève répond de façon floue : « sinon ça fait une variable ». Elle demande de préciser et un autre dit : « ça ferait comme d(a) ». Elle reprend et commente cette réponse, insiste sur l'importance de ce signe multiplié et leur demande de le noter. Elle écrit elle-même au tableau :

d(a)	m*(x-a)
↑	↑
fonction	multiplication

9h45 : Les élèves se remettent à travailler en binômes. L'entrée de l'équation ne pose pas de problème mais la question b : déterminer m pour que la droite coupe la courbe précédente en deux points confondus, elle, arrête presque tout le monde. Certains égalent l'équation de la droite et celle de la fonction et s'arrêtent là. D'autres sont perdu au milieu des t et des x, d'autres veulent faire tracer la droite pour voir mais la machine refuse vu la présence du paramètre m. Quelques uns enfin, avec une aide assez légère, arrivent à piloter la calculatrice pour obtenir les deux racines de l'équation d(x)=d(a)+m(x-a), en fonction de a et m, c'est à dire en demandant la résolution par rapport à x, et concluent que les deux points d'intersection seront confondus si ces deux racines sont égales. Il faut alors, si l'on travaille à la machine, résoudre une nouvelle équation, de variable m cette fois, a restant un paramètre. Inutile de dire que cela ne va pas de soi et que, la syntaxe de la machine obligeant à préciser par rapport à quelle variable on résout une équation, ils ne peuvent éviter le problème (aucun ne cherche ici à procéder par essai/erreur).



Assez vite, l'enseignante va reprendre une fois de plus la main, pour faire détailler les étapes :

- entrée de l'équation de la sécante qui donne à l'affichage : $y=mx-2a^2+a(-m+8)$
- résolution du système formé de cette équation et de l'équation de la courbe (sur proposition d'un élève).

L'enseignante fait préciser que les solutions du système seront les coordonnées des points d'intersection de la courbe et de la droite s'ils existent, qu'il y a nécessairement au moins une solution correspondant aux coordonnées du point A. Elle leur demande d'écrire le système sur leur cahier avant de résoudre avec la machine.

En fait, cela n'a pas suffi à remettre tous les élèves sur les rails ; certains sont encore perdus dans les t et les x, d'autres essaient toujours de faire tracer la droite. L'enseignante est obligée une fois de plus d'intervenir pour régler le problème de la dénomination des variables.

10h : Bilan collectif sur la stratégie de résolution du système. Les élèves proposent de procéder par substitution, en gardant l'équation de la droite. L'enseignante écrit le nouveau système au tableau :

$$y=mx-2a^2+a(-m+8)$$
$$mx-2a^2+a(-m+8) = -2x^2+8x$$

Elle rappelle que l'on connaît déjà une solution de la deuxième équation que l'on veut maintenant résoudre x–a et leur demande comment, sachant cela, ils s'y prendraient s'ils avaient à résoudre à la main. Elle veut les faire penser à la factorisation par x-a, mais ils ne sont pas du tout branchés dans cette direction et elle les laisse retravailler seuls quelques minutes.

Quelques élèves ont maintenant terminé et reconnaissent avec étonnement dans la valeur de m trouvée, la vitesse instantanée en a, calculée précédemment : 8-4a.

La fin de la séance approche et l'enseignante fait un dernier bilan, détaillant la résolution avec la machine rétroprojetable. Elle arrive ainsi à 8-4a mais n'a pas le temps d'aller plus loin. Elle demande pour les vacances (c'était la dernière séance avant Noël) de se familiariser avec la machine, de faire l'exercice 2 et d'apprendre à résoudre les systèmes avec la machine en suivant le document distribué.

Analyse :

La première phase de cette situation laisse penser que la familiarisation avec la TI92 peut s'opérer dans de bonnes conditions. Les nombreuses réponses qui fusent montrent que beaucoup d'élèves se souviennent de ce qui a été vu lors de la séance d'introduction. Dans le reste de la séance, tous les élèves ne manifestent pas le même rapport à la machine mais on ne note aucun phénomène de rejet.

Bien sûr, la petite introduction faite ne suffit pas à rendre la machine opérationnelle dans l'application HOME pour les calculs sollicités dans la suite et l'on voit l'enseignante confrontée à la multitude de petits problèmes qui se produisent dans une phase de première initiation comme ici. Etant donné qu'il s'agit en général de problèmes classiques sur lesquels elle souhaite attirer l'attention de la classe, elle va très souvent les répercuter collectivement, en s'appuyant éventuellement, pour reproduire les problèmes des élèves, sur la calculatrice rétroprojetable. C'est sans aucun doute intéressant vis à vis de la connaissance de la machine mais n'aide pas à maintenir le fil mathématique de la séance, déjà très difficile à tenir.

Lors de cette séance, l'enseignante (M.) introduit un nombre relativement important d'ostensifs-TI92. Nous pouvons également remarquer la diversité des ostensifs utilisés dans cette séance par rapport aux catégories que nous avons distinguées auparavant (Cf Transparence des ostensifs-TI92). Citons à titre d'exemples *NewFold* ou *Current Folder* qui font partie de la deuxième catégorie (puisqu'ils font référence au monde informatique), ainsi que *ClearHome* ou encore *Solve* qui font partie de la première catégorie et plus précisément des deuxième et troisième sous-catégories.

Parallèlement à l'introduction de ces nouveaux objets, nous pouvons remarquer la genèse de nouvelles 'habitudes' spécifiques de l'environnement TI92. Il en est ainsi de la structuration des répertoires (*M. insiste sur la nécessité de structurer en répertoires " pour une machine dotée d'autant de mémoire pour s'y retrouver aisément"*), du *nettoyage* de l'écran par *ClearHome*, de la désaffectation des variables par *F6* (*M. insiste sur la nécessité de le faire avant de commencer un nouvel exercice*) ou par *DelVar* (*M. insiste une fois de plus sur la nécessité de libérer les variables, chaque fois que l'on commence un nouveau travail*). Par ailleurs, d'autres 'habitudes' sont déjà installées que ce soit à la suite de l'utilisation de la TI92 durant les deux premières séances comme le fait de définir systématiquement les fonctions dans HOME par *F4-Define,* ou plus généralement en conséquence de l'utilisation des calculatrices graphiques (présentes en classe depuis le début de l'année, à savoir près de trois mois avant l'arrivée des TI92) comme le fait de fixer la fenêtre de tracé dans WINDOW. Nous pouvons également constater des changements dans la gestion d'une part du travail collectif - travail individuel et d'autre part du travail machine - travail p/c. En effet, le travail collectif (où M. alterne tableau et rétroprojetable) semble avoir plusieurs fonctions :

- l'introduction de nouvelles fonctionnalités de la machine,
- la réponse à des problèmes qui risquent d'être récurrents dans les pratiques à venir concernant autant la libération des variables que la syntaxe. Ceci est d'ailleurs l'occasion pour l'enseignante de faire des distinctions fondamentales telles que celle entre *ab* et *a*b* ou de préciser l'importance de l'indication de la variable lors de la résolution d'une équation. Soulignons ici que le discours explicatif sur la différence entre *ab* et *a*b*, vu qu'il concerne le traitement interne, correspond à des connaissances-machine de niveau 3,

- le contrôle du temps de travail individuel qui a tendance à se prolonger dans cet environnement vu la multiplicité des actions possibles et le manque de familiarité avec la machine à cette époque de l'année.

Concernant la gestion du travail par rapport au p/c, nous remarquons à plusieurs reprises, l'insistance explicite de M. sur le passage prioritaire par le travail - p/c, installant par là - même une des clauses caractéristiques de ce type de contrat.
Par ailleurs, l'utilisation de l'ostensif *Solve* nous a paru à deux moments très utile pour cerner le type de rapport qui se construit :

- Tout d'abord, quand pour transformer l'expression (d(a+h)-d(a))/h, des élèves ont proposé de faire *Solve* (d(a+h)-d(a)/h) (voir *Déroulement* ci-dessus). A travers cette instrumentation, hormis le problème de la syntaxe, nous pouvons déduire que l'ostensif *Solve* n'a pas encore de statut mathématique clair, puisqu'il semble fonctionner ici en tant que commande qui servirait à transformer des expressions algébriques, un peu à la manière d'une manipulation qui consiste à taper ENTER après l'expression en question.

- Ensuite, l'utilisation par l'enseignante du même ostensif *Solve* pour résoudre l'équation d(x)=d(a)+m(x-a). Ici, la contrainte syntaxique (nécessité de préciser la variable de résolution) entraîne une réflexion sur l'équation en question et sur le statut de m, de a et de x. Ainsi, la mobilisation d'une connaissance-machine de niveau 1 peut être sous-tendue par des connaissances mathématiques.

"Dans la gestion de l'activité proposée ensuite pour l'approche de la notion de dérivée, l'enseignante est confrontée à de multiples difficultés que nous allons essayer d'analyser. L'hypothèse faite est que l'utilisation de la TI92 va permettre une généralisation de calculs numériques effectués dans une séance précédente et une approche cinématique de la notion de dérivée. En fait, on s'aperçoit que sur ce plan, les élèves, pour la plupart ne gardent que peu de trace de ces calculs qu'ils ont du effectuer en position d'exécutants sans en percevoir nécessairement bien le projet global. La désorganisation de cette fin d'année, du fait des grèves, n'aide sans doute pas non plus. La généralisation ne s'appuie donc pas sur un contexte déjà bien intégré. A ceci s'ajoutent des difficultés grandes dans le calcul algébrique demandé, d'autant plus visibles que les élèves sont trop peu familiers avec la machine pour savoir la piloter pour produire les résultats attendus. Le calcul de d(a+h) par exemple en arrête plus d'un très longtemps. Face à ces difficultés, l'enseignante est partagée entre deux choix :

- soit exploiter le plus possible la machine, mais en intervenant fortement du fait du manque d'instrumentation constaté pour avancer dans la résolution, quitte à revenir plus tard sur les déficiences algébriques constatées,

- soit gérer ces déficiences, en exigeant un calcul papier crayon préalable à l'entrée en machine, et en gérant tous les problèmes liés à la réalisation de ce calcul.

Le premier choix permettrait certes d'avancer plus vite, mais on peut légitimement s'interroger sur le sens que les calculs menés pourraient prendre pour les élèves. L'enseignante privilégie donc le second.

Une seconde difficulté de la situation est liée à l'approche cinématique choisie ici et à la notion de vitesse instantanée. Cette notion n'a rien de spontané et le travail que les élèves ont pu faire par ailleurs en physique ne les y prépare pas puisque les vitesses à ce niveau sont toujours des vitesses moyennes même si l'on parle de vitesse à l'instant t. En fait, il s'agit là d'un concept qui se construit par passage à la limite, comme l'ont bien montré les travaux de M.Schneider (par exemple [Schneider, 1989]) et on peut penser que le travail sur la notion de dérivée peut aider cette conceptualisation plutôt que l'inverse. A la réflexion, il nous semble qu'un approche géométrique ou graphique serait sans doute plus appropriée.

L'enseignante essaie aussi dans cette séance de lier la tangente au sens algébrique du terme à la parabole à l'approche cinématique effectuée, faisant reconnaître dans le coefficient directeur de la tangente, la vitesse instantanée calculée précédemment. Il s'agit sans doute là d'un choix a priori tout à fait raisonnable, l'enseignement faisant trop souvent l'impasse sur l'articulation nécessaire des conceptions de la tangente héritées du cercle avec la conception de l'analyse, avec des effets négatifs maintenant connus ([Castela, 1995]). En revanche, le dispositif dans lequel s'inscrit cette articulation nous semble ici très complexe, vu le niveau des élèves. Il y a sans aucun doute à organiser cette articulation, en étant très attentif dans le choix des variables de la situation, au coût technique de cette articulation.

Nous voudrions également souligner qu'une telle séance d'introduction de la notion de dérivée, quelle que soit l'approche choisie, nous semble être nécessairement une séance complexe de gestion difficile. Il nous semble peu raisonnable d'espérer pouvoir l'instituer, vu de plus les contraintes temporelles de l'enseignement, dans un fonctionnement essentiellement a-didactique. Les propositions d'activités qui en apparence vont dans ce sens, ne sont, nous semble-t-il, a-didactiques qu'en façade et mettent généralement l'élève en position d'exécution, dans une démarche expérimentale qui le dépasse. Une telle séance, si l'on veut que l'élève n'en perde pas la cohérence globale, suppose nous semble-t-il une gestion donnant à l'enseignant un rôle plus important. Il importe de trouver les moyens de problématiser réellement pour l'élève les mathématiques qui vont intervenir, de lui laisser une autonomie maximum, sans que les difficultés techniques de nature algébrique inhérentes au type de travail demandé n'effacent la cohérence globale de la situation et ne fassent perdre son fil. Même avec l'assistance de la TI92, même avec des élèves plus familiers avec cet outil, comme cela sera le cas en 1996-97, au moment de l'introduction des dérivées, ceci est loin d'aller de soi. C'est ce qui nous a incité à privilégier, pour l'année 1996-97, au niveau expérimental ce domaine de la dérivation, avec l'objectif de construire une ingénierie didactique complète et institutionnellement viable."

Observation 2 : problème d'optimisation - la cuve (janvier 96)

Contexte :

L'observation a eu lieu le 21 janvier 1996. La notion de dérivée avait été introduite à la rentrée de janvier, après la phase d'approche menée avant les vacances de Noël. C'était un des premiers problèmes d'optimisation que les élèves rencontraient.

L'observation s'est déroulée dans les conditions suivantes : deux séances de recherche d'une heure en binômes par demi-classes suivies d'une heure de synthèse collective. Il était d'autre part demandé aux élèves de rédiger individuellement pour la semaine suivante un compte-rendu du travail effectué, prenant en compte la synthèse.

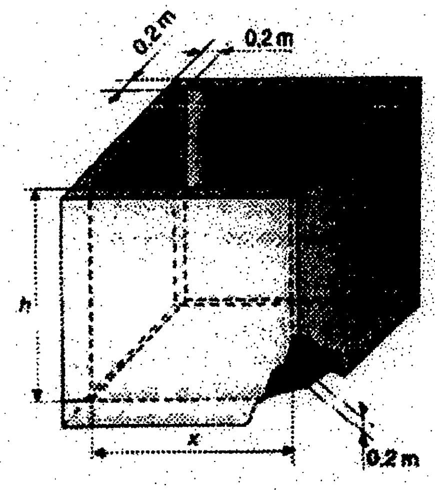
L'enseignante avait réalisé dans le module GEOMETRY de la TI92 rétroprojetable une représentation géométrique de la cuve qui servait à introduire collectivement le problème.

Activité proposée : le problème de la cuve

Il s'agit d'un problème d'optimisation classique mais nettement plus complexe sur le plan de la modélisation et sur le plan du traitement technique que les deux problèmes déjà traités par les élèves (aire maximum pour un rectangle de périmètre donné, aire minimum

Un maçon doit réaliser une cuve en béton parallélépipédique de base carrée de 20 cm

d'épaisseur et pouvant contenir $4m^3$



On désigne par x (en m) le côté du carré intérieur et par h (en m) la hauteur intérieure de la cuve.

On veut déterminer x et h pour que le volume de béton utilisé soit minimal.

1) Exprimer le volume de béton en fonction de **x seul.** On notera V(x) ce volume.
2) Tracer la courbe représentative de V avec votre calculatrice.
3) La fonction V semble-t-elle avoir un minimum ?
4) Si oui, pour quelle valeur de x est-il approximativement obtenu ?
5) Calculer V'(x) à la main.
6) Vérifier votre résultat avec la calculatrice. Les deux résultats ont-ils la même forme ? Comment être sur qu'ils sont identiques ?
7) Justifier le sens de variation de la fonction V. V admet-elle un minimum ? Déterminer alors les dimensions de la cuve pour lesquelles ce volume est minimal.

pour une boîte de conserve de volume donné). C'est pourquoi la modélisation était relativement guidée, l'enseignante pensant que les élèves ne pouvaient dépasser à ce moment de l'année le degré d'autonomie donné ici. Les deux variables x et h étaient donc introduites et l'on précisait qu'il fallait exprimer le volume en fonction de x seul.
Pour arriver à l'expression du volume, les élèves pouvaient :

- soit décomposer le volume en sous-volumes correspondant aux parois latérales et au fond de la cuve et additionner les volumes correspondants. Les risques d'erreurs dans ce cas étaient loin d'être négligeables (problèmes d'intersection, erreurs dans les évaluations de dimensions notamment).
- soit calculer le volume de béton comme différence entre le volume extérieur de la cuve et son volume intérieur, calcul facile dès que l'on avait déterminé les dimensions extérieures de la cuve puisque le volume intérieur était connu. Il fallait en revanche penser à utiliser une démarche soustractive.

Une fois cette expression obtenue, il fallait mobiliser la relation entre x et h fournie par la donnée du volume intérieur de la cuve pour éliminer la variable h.
Ces deux opérations faisaient donc de l'opération de modélisation une opération relativement complexe et l'enseignante avait prévu de faire le point au bout d'un quart d'heure environ, pour faire expliciter l'ensemble de la démarche.

Ensuite, l'étude du problème commençait par une exploration graphique se situant dans la continuité des approches développées en seconde pour ce type de problème. Elle devait conduire à conjecturer l'existence d'un minimum pour la fonction obtenu approximativement pour x=2.

La résolution exacte commençait avec la question 3 dans laquelle on demandait de calculer la dérivée à la main. L'enseignante avait fait ce choix avec plusieurs objectifs :

- un objectif d'entraînement technique avec ici la possibilité ensuite de faire comparer divers modes de calcul suivant la forme choisie pour l'expression du volume : forme semi-factorisée : $V(x)=(x+0.4)^2(\frac{4}{x^2}+0.2)-4$, forme développée ou fraction rationnelle et attirer l'attention sur l'importance d'un tel choix,
- un objectif de comparaison d'écritures algébriques, à partir des différentes formes trouvées, formes P/C et TI92. C'était la raison de la question 4.

La fin du problème était classique mais n'était pas techniquement évidente. En effet, la dérivée obtenue, à partir de l'expression développée était égale à

$$V'(x) = 0.4x - \frac{3.2}{x^2} + 0.16 - \frac{1.28}{x^3}$$

La factorisation de cette expression n'allait pas de soi, sans la calculatrice. Si l'on partait pour le calcul de la dérivée de la forme semi-factorisée, la factorisation était plus facile mais l'étude du signe du second facteur : $1-\frac{8}{x^3}$ risquait de poser problème aux élèves.

La TI92 permettait de mettre V'(x) sous la forme : $\frac{2(x-2)(5x+2)(x^2+2x+4)}{25x^3}$. Ensuite, il fallait remarquer que x étant positif le signe de V'(x) était celui de x-2, pour aboutir au tableau de variation et conclure qu'il y avait bien un minimum et un seul pour x=2.
On n'abordait pas dans cette séance d'une heure la généralisation à une épaisseur e quelconque, qui permet de montrer que la valeur du minimum est obtenue, quelle que soit l'épaisseur, pour une valeur de x de 2m et une hauteur de 1m, généralisation ensuite à un volume quelconque, pour lesquelles la machine devenait encore plus indispensable.

Déroulement :

Nous présentons d'abord succinctement la recherche de deux élèves A. et son voisin C. dans le deuxième groupe observé. On verra que l'enseignante, tirant les enseignements du fonctionnement du premier groupe, ne laissera pas les deux élèves sécher trop longtemps sur la modélisation. Dans le premier groupe, elle avait voulu laisser plus les élèves trouver par eux-mêmes et avait finalement dû intervenir à plusieurs reprises, finir par faire préciser collectivement les dimensions intérieures et extérieures de la cuve et insister sur la relation donnée entre x et h via le volume intérieur. La démarche soustractive avait, quant à elle, fini par diffuser.

Travail par binômes :

9h15 : Après le lancement de la séance, Anne écrit sur sa feuille : "Le volume de béton" puis elle s'arrête. Assez vite, l'enseignante (M.) qui circule dans la classe vient l'aider. Elle lui fait formuler que le volume extérieur est égal au produit : longueur, largeur, hauteur. Puis elle lui rappelle qu'avec ça, elle a aussi l'intérieur de la cuve. Puis M. passe à C. qui a écrit :

$$[(x+0.4)(x+0.4)(x+0.4)] - [(x+0.2)x.x]$$

puis s'est lui aussi arrêté. Elle lui demande d'expliquer sa formule en montrant le début. C. répond que c'est un cube. M. lui montre alors la hauteur marquée sur la figure. C. acquiesce que ce n'est pas un cube mais en revanche ne voit pas comment faire les calculs sans h. M. lui conseille de les faire d'abord avec h, qu'il l'éliminera ensuite. Elle lui fait également préciser les dimensions extérieures et intérieures, remarquer le renseignement donné dans le texte (volume intérieur) et conclut en lui disant que donc il est prêt.

C. réécrit alors correctement le volume de béton sous la forme :

$$[(x+0.4)(x+0.4)(h+0.2)] - [h.x.^2]$$

A. a de son côté écrit :

$$\text{Vint} : h.x.x$$
$$\text{Vext} : (h+0.2)(x+0.2)(x+0.2)$$

A. regarde ce que fait C. et lui demande pourquoi il a mis x+0.4. Il le lui explique et elle corrige. Ensuite elle ajoutera une troisième ligne exprimant le volume de béton comme différence des deux volumes.

C. se lance dans des transformations algébriques de V(x) écrivant successivement :

$$V(x) = [(x+0.4)^2(h+0.2)] - [h.x.^2]$$
$$V(x) = [(x^2+0.16+0.8x)(h+0.2)] - [h.x^2]$$

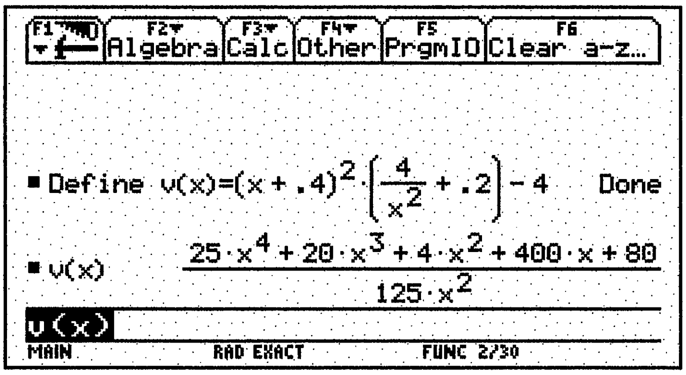
9h25 : Il peine ensuite sur le développement du produit de facteurs. L'observateur (O.) lui dit qu'il peut s'aider de la TI. Il ne le fera pas.

A., après avoir demandé à C. comment il fait, transforme son expression en :

$$V(x) = [(x+0.4)^2(h+0.2)] - 4.$$

Ils comparent leurs résultats mais se trouvent tous les deux bloqués. O. intervient une nouvelle fois au bout d'un moment et leur demande s'ils n'ont pas un renseignement qui leur permet d'exprimer h en fonction de x. Cette question débloque instantanément la situation. Ils écrivent $h = \frac{4}{x^2}$ puis font la substitution, arrivant enfin à : $V(x) = [(x+0.4)^2(\frac{4}{x^2} + 0.2)] - 4.$

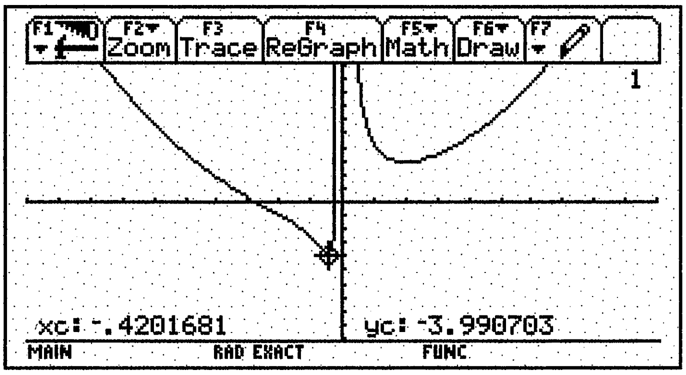
Ils passent alors à la suite. C. entre la fonction V dans la calculatrice par *F4-Define* correctement, sans oublier de parenthèses, sans oublier non plus le signe de multiplication entre les deux facteurs. L'enseignante passe et il lui demande ce qu'il doit faire maintenant avec la calculatrice. M. lui dit de faire afficher V(x) pour voir ce que cela donne. Il obtient :



M. lui demande ce qu'a fait la machine (C. répond qu'elle a développé) puis le renvoie au texte du problème.

De son côté, A. a directement rentré l'expression de V(x) dans Y= et elle demande à l'enseignante si ça va. M. acquiesce et s'en va.

C. passe dans Y=, entre y1(x)=V(x) puis fait tracer.



Il utilise ensuite *Trace* et se positionne au minimum négatif qui est effectivement le minimum absolu. Il passe ensuite dans TblSet, fixe l'abscisse de départ à -4 et le passe à 1 et fait afficher un tableau de valeurs dans TABLE. Il passe ensuite à un pas de 0.1. Il va très vite dans ses manipulations et finalement stabilise l'affichage autour de -0.4 :

x	y1
-4.	1.832
-3.	.35644444444
-2.	-.928
-1.	-2.488
0.	undef
1.	4.232
2.	2.912
3.	3.4497777778

x=-4.

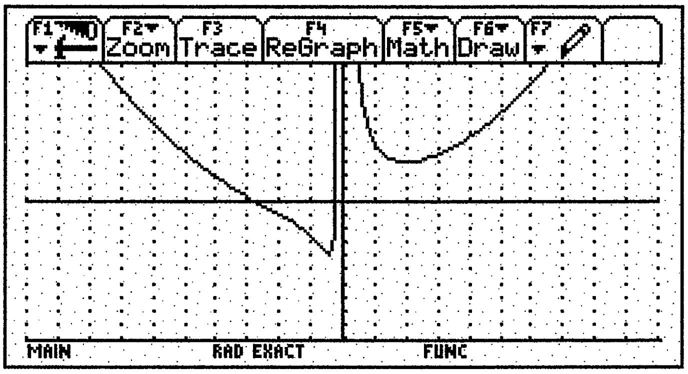
MAIN RAD EXACT FUNC

x	y1
-.8	-2.968
-.7	-3.247306122
-.6	-3.547555556
-.5	-3.838
-.4	-4.
-.3	-3.553555556
-.2	.008
-.1	32.018

x=-.1

MAIN RAD EXACT FUNC

Pendant ce temps, A. rencontre des difficultés à obtenir le tracé. En effet, elle a l'option grille, ce qui lui donne ceci :



et ne sait pas comment s'en sortir. O. finit par lui expliquer comment faire.

C. est satisfait de ce qu'il a trouvé, note les valeurs trouvées dans TABLE et est prêt à passer à la suite. O. intervient une fois de plus pour lui faire remarquer que dans son problème, x est toujours positif. C. rajoute des valeurs absolues à -0.4, puis repasse dans TABLE pour voir l'évolution des valeurs, toujours par pas de 0.1 à partir de 0.

x	y1
0.	undef
.1	96.05
.2	32.072
.3	17.875777778
.4	12.128
.5	9.122
.6	7.3111111111
.7	6.1195510204

x=.7

MAIN RAD EXACT FUNC

A. lui demande comment il a fait pour obtenir le minimum. C. lui dit d'aller dans TABLE et lui montre sa machine. Elle ne comprend pas bien alors il s'arrête et lui explique comment utiliser TblSet pour fixer le départ à 0 et le pas à 0.1, puis dans TABLE faire défiler les valeurs jusqu'au minimum. A. lui demande si le minimum c'est 0. C. répond que non. A. fait alors les manipulations sur sa propre machine et déclare qu'elle trouve 2. C. est d'accord et ils notent le résultat obtenu sous la forme :

"La fonction semble avoir un minimum pour $x \approx 2$."

A. rajoute à côté : ♦TblSet.

9h40 : Ils passent ensuite au calcul de la dérivée. C. part du quotient donné par la machine, en posant : $u(x) = 25x^4+20x^3+4x^2+400x+80$ et $v(x) = 125x^2$. A. part de l'expression qu'elle a obtenue : $V(x) = \frac{0.2[x^4+8x^3+16x^2+16x+3.2]}{x^2}$ et prend pour u(x) le terme entre crochets. Elle n'a visiblement pas repéré que l'expression donnée par la machine contient les coefficients .8 et .16 et non 8 et 16. O. ne le voit pas non plus.

C. écrit la formule de dérivation d'un quotient avec un + au lieu d'un -. O. lui fait remarquer son erreur. Ensuite il utilise la calculatrice pour faire tous les calculs de coefficients. Il réduit ensuite l'expression obtenue à la main, obtenant :

$$\frac{(650x^5+2500x^4-50000x^2-20000x)}{15625x^4}$$

Pendant ce temps, A. fait ses calculs complètement à la main et arrive à :

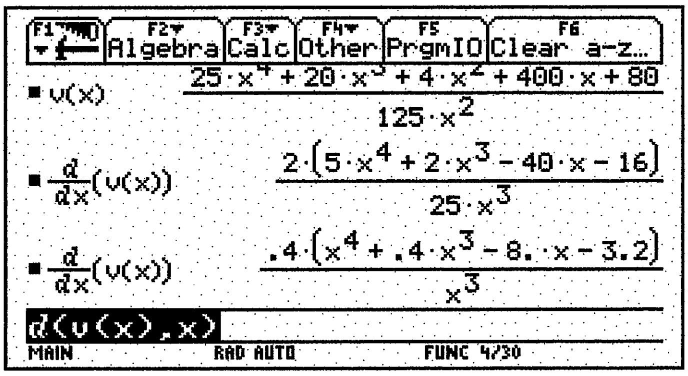
$$\frac{4x^5+24x^4+32x^3+16x^2-2x^5-16x^4-32x^3-32x^2-6.4x}{x^4}$$

expression qu'elle réduit en :

$$\frac{2x^5+8x^4-16x^2-6.4x}{x^4}$$

et elle rajoute enfin le coefficient multiplicatif : 0.2. Ce calcul est correct, compte tenu du point de départ.

9h50 : C. fait dériver à la machine et obtient : $\frac{2(5x^4+2x^3-40x-16)}{25x^3}$. Il se demande si c'est la même chose que ce qu'il a déjà. M. passe et lui conseille de comparer les degrés. C. constate que du point de vue des degrés, ça marche s'il simplifie son numérateur par x, mais trouve quand même les coefficients très différents. Pour comparer les deux résultats, il a l'idée de rentrer sa dérivée p/c et il constate alors que la machine lui renvoie l'expression de la dérivée machine. Il est très content et demande à A. où elle en est. A. a elle aussi fait calculer la dérivée à la machine. Elle est en mode automatique, ce qui explique les différences d'affichage.



Elle obtient en effet:

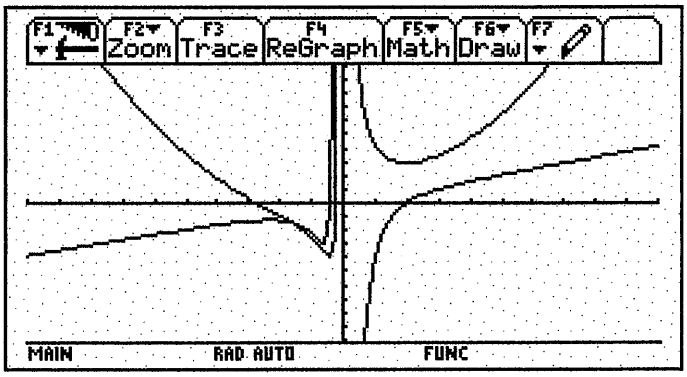
$$\frac{.4(x^4+.4x^3-8x-3.2)}{x^3}$$

qu'elle compare à sa valeur P/C :

$$\frac{0.2(2x^5+8x^3-16x-6.4)}{x^4}$$

et conclut que c'est bon.

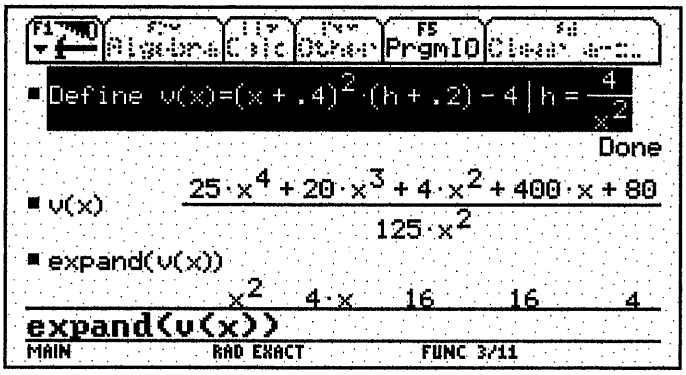
9h55 : Ils passent à la question 5. C. définit la dérivée comme nouvelle fonction, en sachant rappeler l'expression sur la ligne de commande pour éviter de la retaper, puis il s'arrête ne sachant trop que faire. A. fait de même, en appelant u la nouvelle fonction. Elle l'entre dans Y= pour la faire tracer puis ne sait plus trop que faire non plus.



O. essaie de les aider, en leur demandant comment trouver le sens de variation. C. répond qu'il faut trouver le signe de la dérivée mais lorsque l'observateur leur demande s'ils peuvent le faire avec la machine, il n'obtient pas de réponse. O. demande alors s'ils peuvent le faire à partir du tracé de A. et ils y arrivent mais ils ne voient pas d'autre moyen possible.

Phase collective :

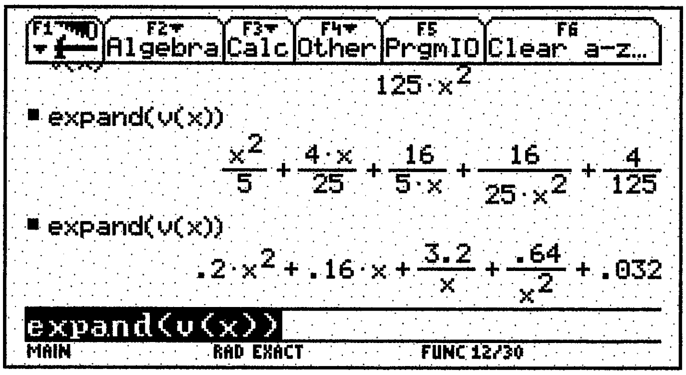
M. fait d'abord préciser les méthodes utilisées par les élèves pour calculer le volume. les deux méthodes prévues ont été rencontrées mais, comme on pouvait s'y attendre, aucun élève ayant utilisé la méthode additive n'a abouti. M. ne rentre pas dans les détails de cette méthode et demande l'expression finalement trouvée par différence. M. l'entre dans la rétroprojetable puis fait raconter aux élèves ce qu'ils ont fait ensuite. Elle en profite pour montrer l'utilisation de la barre "tel que" pour les substitutions.



Elle fait ensuite répertorier toutes les expressions différentes obtenues dans la classe à partir de la question : "Est-ce l'expression que vous aviez obtenue ?" et les écrit au fur et à mesure au tableau. Les élèves proposent bien sûr l'expression semi-factorisée et l'expression développée :

$$V(x) = 0.2x^2 + \frac{3.2}{x} + 0.16x + \frac{0.64}{x^2} + 0.032.$$

Elle demande comment obtenir cette expression à la machine. Les réponses oscillent entre *Factor* et *Expand* puis ce dernier l'emporte. Elle le fait et obtient une expression à coefficients fractionnaires qu'elle écrit au tableau. Il s'agit maintenant de savoir si elles sont égales, ce que les élèves vont vérifier collectivement, coefficient par coefficient. M. demande ensuite si l'on pourrait quand même obtenir la première forme à la machine et un élève propose de faire : ♦ ENTER. M. le fait et commente, en expliquant que la valeur approchée ainsi obtenue est en fait une valeur exacte car les dénominateurs des fractions sont des puissances de 5.



Elle passe ensuite à la définition et au tracé de la fonction qu'elle effectue à la rétroprojetable puis demande quelles sont ses particularités. Un élève dit qu'elle n'est pas définie en 0. A la question de M. : Est-ce que c'est une surprise ? Est-ce qu'on pouvait le prévoir ? , après un moment de silence quelqu'un répond : "oui, parce qu'il y a un x au dénominateur". M. acquiesce puis revient au problème physique posé, en faisant remarquer que x représente une longueur et que donc l'ensemble de définition de la fonction est]0,+∞[.

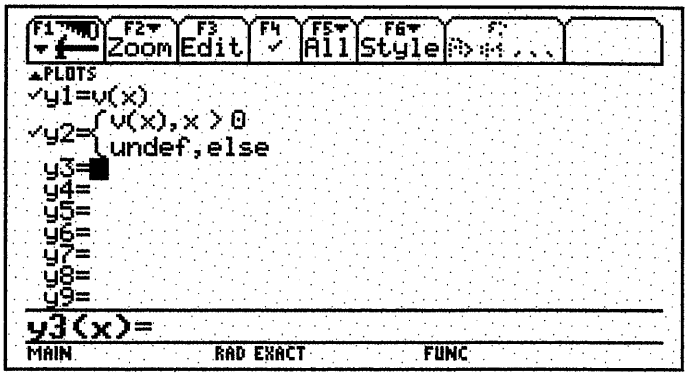
10h30 : M. profite de la circonstance pour introduire la fonction *When* qui n'a jamais été utilisée encore. Elle va la chercher dans Catalog, explique la syntaxe :

*when (*x > 0, v(x) , undef*)*

tout en faisant les manipulations : > à aller chercher dans MATH Test, *undef* qui est un mot réservé, un nom de variable qui signifie que la fonction n'est pas définie... Ca va trop vite, les élèves sont perdus, ils n'arrivent pas à faire les manipulations correspondantes sur leur machine. Elle reprend en détail, en précisant que when on peut le taper directement puis en écrivant la syntaxe au tableau sous la forme : when (condition , valeur si oui , valeur si non).

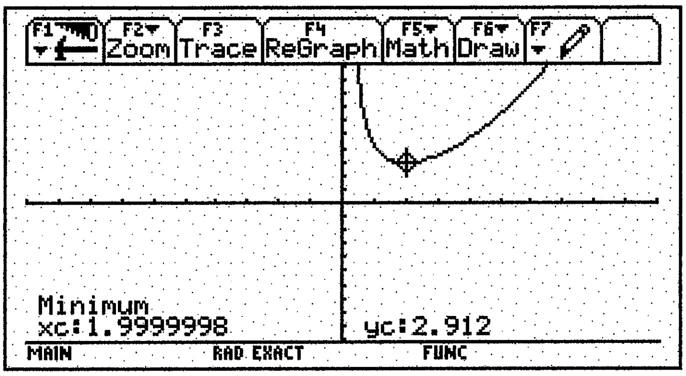
Elle passe ensuite à l'écran graphique pour leur montrer que la portion gauche de la courbe a bien disparu, puis leur laisse le temps de faire eux-mêmes les manipulations.

Certains cherchent sans succès undef dans Catalog. Elle leur conseille de le taper. Elle montre ensuite que l'affichage dans Y= se fait alors sur deux lignes puis précise qu'on aurait pu utiliser la même définition dans Home.



On revient ensuite au graphe et M. demande si la fonction semble avoir un minimum. Les élèves répondent qu'elle semble d'abord décroissante puis croissante puis proposent d'utiliser Trace pour chercher le minimum. Elle le fait, tout en disant qu'avec 2nd ils peuvent faire bouger le curseur plus vite et arrive à un minimum entre 1.93 et 2.10.

Elle demande ensuite comment faire pour avoir quelque chose de plus précis. Plusieurs élèves proposent d'aller dans TABLE. Elle passe d'abord dans TblSet et conseille un pas de 0.1. Puis elle revient à TABLE et fait défiler les valeurs en commentant : on a l'air d'avoir un minimum pour 2. Est-on sûr ?. Réponse en chœur : « non », ce qui confirme ce que laissait penser l'observation de C. et A., à savoir que l'attention des élèves a été attirée sur la distinction exact / approché. Elle prend un pas de 0.05 pour confirmer puis demande comment faire pour être vraiment sûrs. Un élève propose de faire F5-Min. Elle le fait, en commentant encore une fois : vous savez que la notion de minimum est une notion locale, alors on me demande l'intervalle sur lequel il faut chercher le minimum.



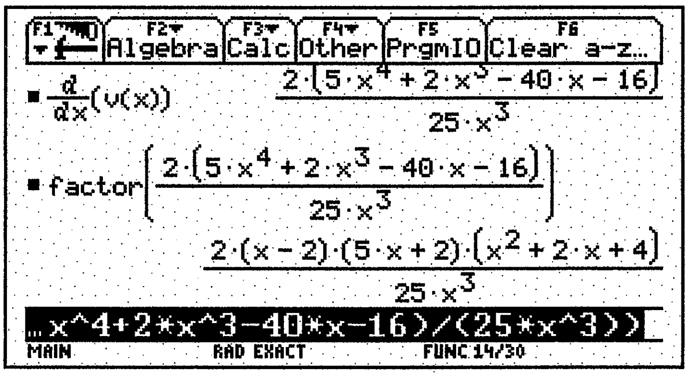
Finalement, elle obtient : 1.9999 et comme valeur 2.912 et demande : donc, est-ce que la machine a fait un calcul exact ? Plusieurs élèves répondent non et elle insiste fortement sur le fait que dans l'écran graphique, quand on utilise F5-Min, la machine ne calcule les valeurs que pour un nombre fini de points : 238-1 correspondant aux 238 pixels, entre xmin et xmax, qu'elle fait une table de valeurs pour ces points et ensuite donne la plus petite valeur de sa table, que c'est du calcul approché.

Après cette parenthèse, on revient à la question : comment trouver exactement ? A. propose la dérivée, parce que quand la dérivée s'annule, il y a un extremum. M. demande si c'est bien sûr et fait expliciter la condition de changement de signe. Elle revient ensuite aux quatre formes obtenues pour V(x) et demande laquelle choisir si on veut dériver à la main. L'accord se fait sur l'expression développée décimale, plusieurs disent qu'ils ont commencé avec les autres et ne s'en sont pas sortis. M. fait détailler ce premier calcul puis passe à la forme avec dénominateur $125x^2$ et conseille dans ce cas là de mettre 1/125 en facteur pour ne pas avoir des coefficients trop compliqués. Elle passe ensuite à la forme semi-factorisée et là fait détailler les calculs car visiblement certains ont essayé et se sont trompés, en introduisant des fonctions intermédiaires. Le calcul de la dérivée de $(x+0.4)^2$ pose visiblement problème et les réponses fausses fusent. M. détaille la composition.

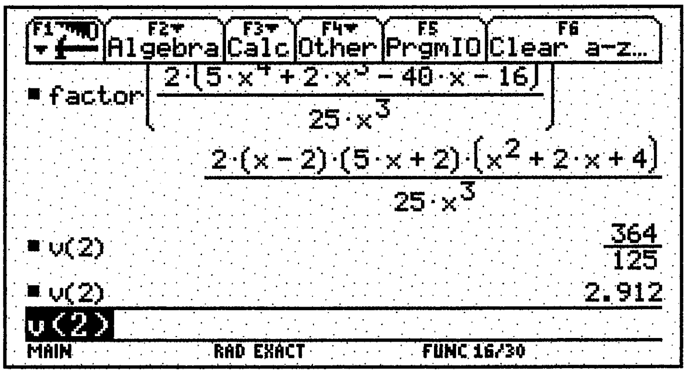
On arrive enfin au signe de la dérivée. L'expression de la dérivée dont on part est la dernière obtenue :

$$V'(x) = 0.4x.(x+0.4)(1 - \frac{8}{x^3})$$

mais les élèves ne voient pas comment déterminer le signe du second terme. M. laisse ceci momentanément en suspens, revient à la dérivée donnée par la machine et la fait factoriser, obtenant :



Les élèves retrouvent les valeurs 2 et -0.4 déjà rencontrées et il reste le trinôme du second degré. M. fait chercher les racines, et calculer mentalement le discriminant qui se trouve être négatif. Tout est préparé maintenant, M. fait détailler tous les raisonnements qui conduisent au signe de la dérivée, tracer le tableau de variation et conclure à l'existence d'un minimum en 2, en le faisant justifier soigneusement. Elle demande ensuite quelle est la valeur du minimum. Plusieurs élèves répondent : 2.912. M. fait remarquer qu'a priori c'est une valeur approchée, la valeur exacte du minimum est V(2), soit : 364/125. En faisant ♦ ENTER, on obtient 2.912, mais a-t-on égalité entre les deux nombres ou seulement égalité approchée ?



C. dit que ça doit être égal parce qu'autrement y aurait d'autres décimales. M. fait lire 364/125 comme une fraction décimale et conclure. On conclut en cherchant la hauteur de la cuve : 1mètre.

La séance se termine. L'enseignante demande aux élèves de rédiger individuellement un compte-rendu du travail effectué.

Analyse :

Lors de cette séance, nous remarquons tout d'abord, le peu de fonctionnalités nouvelles introduites par M. Celles-ci se restreignent à l'utilisation de *when* (pour limiter le domaine d'étude aux valeurs positives comme conséquence de la modélisation) et *GRAPH-F5-Min.* Les contraintes syntaxiques de cette dernière commande ont donné lieu à un discours justificatif se référant à des connaissances mathématiques ("*Vous savez que la notion de minimum est une notion locale, alors on me demande l'intervalle sur lequel il faut chercher le minimum*"). De plus, M. saisit l'occasion pour soulever une autre question fondamentale spécifique de cet environnement, à savoir la distinction exact-approché. Pour expliquer le caractère approximatif des résultats que peut donner cette commande, M. tient un discours sur le fonctionnement interne qui accompagne la mobilisation de ladite commande qui correspondrait à des connaissances-machine de niveau 3 (*"dans l'écran graphique, quand on utilise F5-Min, la machine ne calcule les valeurs que pour un nombre fini de points : 238-1 correspondant aux 238 pixels, entre xmin et xmax, qu'elle fait une table de valeurs pour ces points et ensuite donne la plus petite valeur de sa table. C'est donc du calcul approché."*)

Soulignons que les élèves observés sont en général sensibles (au-delà du binôme cité) au fait que *Trace* ou TABLE ne donnent que des valeurs approchées, même si ces valeurs, comme c'est le cas ici, ont l'air de valeurs exactes. On voit sans doute là l'effet du travail soutenu sur ces questions, dans le cadre de l'instrumentation des calculatrices graphiques, au premier trimestre. Ce n'est pas aussi net pour F5-Min, dont le fonctionnement est plus caché d'où l'intervention de l'enseignante à ce niveau.

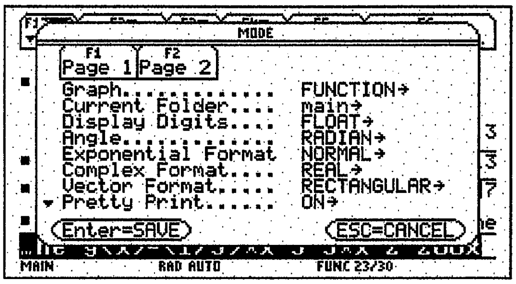
Regardons maintenant de près deux 'passages' de cette séance :

- Le premier concerne l'équivalence de l'expression

$$V(x) = 0.2x^2 + \frac{3.2}{x} + 0.16x + \frac{0.64}{x^2} + 0.032$$

et de celle fournie par la machine. L'hésitation des élèves entre les ostensifs *Factor* et *Expand* pour transformer l'expression-TI92 nous informe sur le statut confus (à cette époque de l'année) des objets mathématiques correspondants, à savoir la "factorisation" et le "développement".

- Le deuxième concerne la question posée par l'enseignante sur l'égalité exacte ou approchée des deux valeurs de v(2) trouvées à la machine : 364/125 et 2.912. La réponse affirmative d'un des élèves prétextant qu'"*autrement il y aurait d'autres décimales*" nous renseigne sur le type de rapport aux nombres que peuvent avoir certains élèves. Précisons qu'a priori rien n'est moins certain que l'égalité de ces deux nombres. En effet, la conclusion dépend du nombre de décimales que la machine permet, information qui est disponible dans MODE :



Ainsi, si le nombre de décimales inscrit dans MODE (et qui peut être modifié par l'élève) est égal à 3 par exemple, alors qu'aucune déduction n'est permise a priori (sauf si l'on se base, comme l'a fait l'enseignante, sur le fait que "tout nombre entier divisé par une puissance de 5 est un décimal"). La prise en compte de cette information (qui se situe au niveau 2 des connaissances-machine) est donc ici nécessaire pour une interprétation correcte des résultats-machine. Cet exemple illustre bien, nous semble-t-il, la complexité du travail qu'induit un artefact comme la TI92 ainsi que l'importance d'une prise en compte du niveau 2 des connaissances-machine dans la construction du rapport aux objets mathématiques (ici, les nombres et la distinction exact/approché) dans un tel environnement.

Limites.

1. Soit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur IR par :
$f_1(x) = 2x^2 \qquad f_2(x) = -3x^2 \qquad f_3(x) = -x^2 \qquad f_4(x) = -2x^2 + 4$
Déterminer les limites de chacune de ces fonctions en $+ \propto$
Déterminer les limites des fonctions f_1+f_2; f_1+f_3; f_1+f_4 en $+ \propto$
Si l'on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ *peut-on conclure pour l'éventuelle limite de f(x) + g(x) en* $+ \propto$*?*

2. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x$.
Sur votre calculatrice :
- Définissez la fonction f
- "Devinez" la limite de $f + \propto$ (courbe représentative, valeurs numériques ...)
- Vérifiez en utilisant la commande limite de votre calculatrice.
- Définissez la fonction g telle que $f(x) = 2x^3 \times g(x)$
- Faites développer g(x),

Pouvez-vous en déduire la limite de g en $+ \propto$ *?*
Celle de f ?

3. Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 - 200x$.
Sur votre calculatrice :
- Définissez la fonction f
- "Devinez" la limite de $f + \propto$ (courbe représentative, valeurs numériques ...)
- Définissez la fonction g telle que $f(x) = \frac{1}{3}x^3 \times g(x)$
- Faites développer g(x),

Pouvez-vous en déduire la limite de g en $+ \propto$ *?*
Celle de f ?

4. Soit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur IR par :
$f_1(x) = 2x^2 \qquad f_2(x) = 3x \qquad f_3(x) = x^2 \qquad f_4(x) = x^4$
Déterminer les limites de chacune de ces fonctions en $+ \propto$
Déterminer les limites des fonctions $\frac{f_1}{f_2}$ $\frac{f_1}{f_3}$ $\frac{f_1}{f_4}$ en $+ \propto$
Si l'on sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ *et que* $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ *peut-on conclure pour l'éventuelle limite de* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *?*

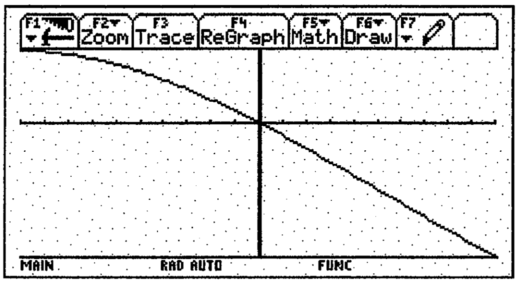
5. Soit les fonctions f et g définies sur IR par :
$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x \quad et \quad g(x) = -5x^2 + 10x - 4$
- Déterminer les limites de f et de g en $+ \propto$
- Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ en $+ \propto$

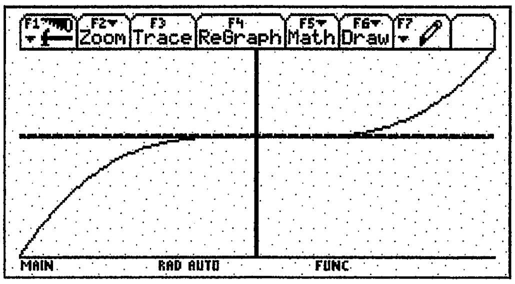
Observation 3 : Limites à l'infini (mars 96)

L'objectif de cette séance, qui comporte des exercices sur le calcul de limites à l'infini (voir ci-contre), est d'explorer des situations d'indétermination avec la TI92 et d'élaborer des stratégies d'étude pour les limites de fonctions polynômes et rationnelles.
La machine n'était pas permise pour résoudre le premier exercice, lequel a duré environ une heure.
Quand M. commence à utiliser la rétroprojetable, pour la résolution du deuxième exercice, elle suit une technique devenue standard à cette époque de l'année :

- Définition de la fonction dans HOME par *F4-Define*
- Définition également dans Y=
- Tracé en *ZoomStd* dans GRAPH

M. exploite ensuite l'application TABLE ainsi que TblSet (par le changement du pas, ce qui correspond au deuxième niveau de connaissances) pour faire observer à ses élèves le comportement de la fonction pour des valeurs très grandes, avant d'introduire la commande *limit* de l'application HOME et sa syntaxe. Ensuite, M. met en garde les élèves contre la présence du signe + devant ∞ (en effet, si l'utilisateur tape successivement + et ∞ et s'il valide par ENTER, la machine affiche un message d'erreur de syntaxe. Nous nous situons donc ici au niveau 1 des connaissances-machine). Quelques instants plus tard, M. introduit la commande *ZoomFit* en parlant sommairement de sa fonction, à savoir "*quand on fixe l'intervalle sur x, la calculatrice adapte automatiquement l'intervalle [ymin,ymax] aux variations de la fonction sur l'intervalle fixé sur x*". Un peu plus tard, M. calcule la valeur du maximum dans HOME en précisant que c'est une valeur exacte, avant d'utiliser ♦ENTER (qui semble être devenu une manipulation familière) pour obtenir une valeur approchée.
Notons que les élèves ont été très perturbés par les effets de l'ostensif *ZoomFit*. Ainsi, pour la fonction définie dans l'exercice 3 par $f(x)=\frac{1}{3}x^3-5x^2-200x$, l'utilisation de cette commande quand l'intervalle [xmin ; xmax] vaut respectivement [-10 ; 10] et [-100 ; 100] par exemple conduit aux tracés suivants :



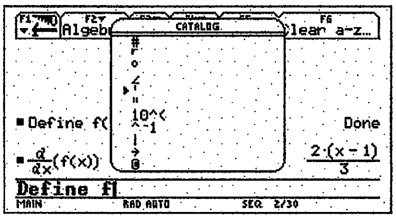


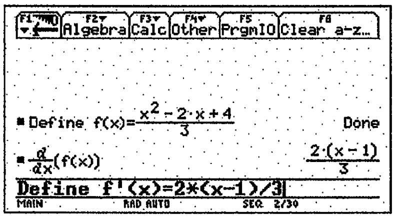
Les élèves semblaient trouver bizarre que dans la fenêtre la plus large on ne retrouve pas localement les variations obtenues dans l'autre. Derrière cette remarque se profile une conception erronée de l'ostensif *ZoomFit* : ce serait "une commande qui fournit une fenêtre adéquate en fonction de [xmin ; xmax]. Par conséquent, on obtient toutes les variations sur ledit intervalle"

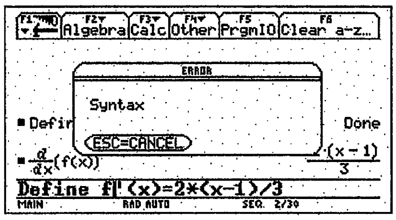
Observation 4 : Dérivées de fonctions composées (avril 96)

L'objectif de cette séance est tout d'abord l'introduction du théorème sur la dérivation de fonctions composées de la forme $f \circ u$ avec u : $x \mapsto ax+b$, puis le ré-investissement de la définition de la dérivée via l'étude de la fonction définie par : $x \mapsto \sqrt{ax+b}$.
Le scénario prévu vise à utiliser l'application DataEditor, la partie tableur de la TI92 - qui sera d'ailleurs introduite à cette occasion - pour pouvoir traiter plusieurs exemples simultanément, favoriser la comparaison $(f \circ u)'(x)$ et f', et par conséquent l'élaboration de conjectures. Le théorème de dérivation sera admis à la suite de cette phase puis exploité dans des cas divers où les calculs de dérivée seront effectués en p/c puis vérifiés à la machine. Un autre objectif sera également de faire déterminer l'intervalle maximum de dérivabilité de la fonction composée sachant que la machine ne prend pas en charge ce type de tâche.

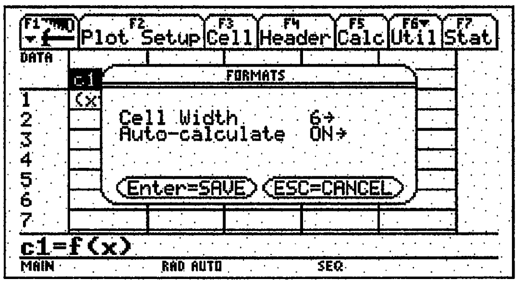
Dans les observations précédentes, nous avons mis en évidence dans le discours de M. essentiellement des connaissances-machine de niveau 1 (relatives à la syntaxe) et des connaissances-machine de niveau 3 (quand les explications concernent le traitement interne). Cette observation d'une séance faisant intervenir pour la première fois (en classe) l'application *Data Editor* dans une activité (calcul de la dérivée de fonctions composées), met en jeu quant à elle les trois premiers niveaux de connaissances-machine. Tout d'abord, le premier niveau qui concerne la syntaxe et ce que la TI92 tolère comme notation. Ainsi, l'écriture f' désignant usuellement la fonction dérivée n'est pas acceptée par la machine en tant que nom de fonction:







Ensuite, le deuxième niveau qui correspond aux changements d'options dans la fenêtre suivante : (*Cell Width* pour modifier la taille des cellules - *Auto-calculate* pour activer ou supprimer le calcul du contenu des colonnes définies à partir d'autres colonnes)



Enfin, le troisième niveau qui apparaît au moment où M. essaie d'expliquer le processus sous-tendant l'affectation à la lettre f par exemple, de la fonction définie par $x \mapsto \sqrt{x}$ à la place de la fonction définie par $x \mapsto x^3$. Son discours est le suivant : *"Il y a d'une part l'écran et d'autre part la mémoire .*

@@@ (dessin)

Lorsque f est définie, sur l'écran on voit : Define $f(x) = x^3$ *par exemple et dans la mémoire l'adresse f(x) est occupée par* x^3*. Si on redéfinit f(x) comme* $\sqrt{x}$*, sur l'écran on a les deux définitions, mais dans la mémoire* $\sqrt{x}$ *remplace* x^3 *à l'adresse f(x)."*

Le troisième niveau de connaissances-machine a également été mobilisé lorsque M. a parlé à deux reprises de la dépendance des applications HOME et DataEditor. En effet, cette dernière application tient compte des informations entrées dans l'application principale HOME.

Par ailleurs, nous avons également observé dans cette séance le même dispositif qu'auparavant dans la gestion du travail collectif - travail individuel avec un recours plus fréquent à la

rétroprojetable compte tenu de la perturbation qu'a engendrée l'introduction de l'application DataEditor dans le déroulement de la séance (à cause notamment de l'activation ou non de l'option *auto-calculate* ainsi que de l'oubli par certains élèves du signe * dans la définition d'une des fonctions).
Soulignons enfin la mise en garde de M. en début de séance qui semble devenir habituelle et qui concerne la libération des variables.

Observation 5 : Les suites (mai 96)

L'objectif de cette séance est d'étudier le sens de variation de trois suites qui sont sous la forme : $u_n = f(n)$ (voir ci-après) ; tout d'abord en conjecturant à l'aide de la TI92, ensuite en justifiant. Par ailleurs, c'est la première fois que la machine est utilisée pour les suites, d'où la distribution d'un document où sont décrites les manipulations à effectuer pour adapter la machine à travers lesquelles nous pouvons distinguer trois niveaux de connaissances-machine:

- un premier niveau lorsqu'il s'agit d'activer une application (♦WINDOW, par exemple) ou même dans le choix de SEQUENCE dans MODE.
- un deuxième niveau lorsqu'il est question par exemple des options TIME ou WEB du menu Y=*F7-Axes* pour le changement du mode de représentation graphique.
- un troisième niveau qui correspond à la distinction exact-approché (via l'indication "*pour des calculs exacts aller dans HOME, pour des calculs approchés utiliser TABLE*").

Durant cette séance, l'intervention de l'enseignante a été très fréquente entrecoupant ainsi la phase de travail individuel par de courtes phases collectives. Ceci semble dû au fait que c'est la première fois que la machine a été instrumentée dans ce domaine : les suites. De plus, certaines connaissances mathématiques (telles que calcul sur les puissances ou rappels sur l'étude de variation des fonctions, par exemple) qui ne semblaient pas disponibles chez la majorité des élèves nécessitaient un traitement collectif. Notons que l'ostensif *Factor* a été mis en œuvre pour transformer la quantité (v(n+1)-v(n)), et que la comparaison de résultats machine et p/c a fait l'objet d'un questionnement.

Pour travailler sur des suites avec la TI92

- Après avoir appuyé sur la touche **MODE**, sélectionner dans la rubrique Graph le mode **SEQUENCE** ;- Définir la suite dans l'éditeur **Y** = (◆ Y=) ;
  - pour une suite définie par récurrence, il faut donner l'expression de u_n en fonction de u_{n-1} et entrer la valeur du premier terme.

- Spécifier l'indice du premier terme dans l'écran WINDOW (◆ WINDOW) par la valeur du paramètre **nmin**.

Pour calculer les valeurs approchées des termes de la suite,

-Préciser lesquels (indice de départ, pas de l'indice) avec le module **TBLSET** (◆TblSet),

- Les visualiser à l'aide du module **TABLE** (◆ TABLE).

Pour faire des calculs exacts, passer dans l'écran **HOME,** en vérifiant avec la touche **MODE** que l'on est en mode **exact.**

Le mode de représentation graphique est choisi dans le menu **Axes** (écran Y= , touche F7) :

- l'option **TIME** permet de représenter les couples (n, u_n) (n en abscisse, u_n en ordonnée),
  Dans ce cas, dans l'écran WINDOW : xmin et xmax correspondent alors à nmin et nmax, ymin et ymax correspondent aux valeurs min et max de u_n

- l'option **WEB** construit la droite d'équation y = x et la courbe d'équation y = f(x). Il est alors possible de représenter les termes de la suite à partir de ces tracés, soit un par un (option TRACE de la rubrique BUILD WEB) soit en bloc (option AUTO).

Sens de variation d'une suite.

En utilisant votre calculatrice, remplissez le tableau suivant :

Terme général de la suite :	$u_n = 2^n - n$	$v_n = \dfrac{n}{2^n}$	$w_n = (-2)^n$
Calculez les valeurs approchées des 10 premiers termes :			

Pour chacune de ces trois suites, répondez aux questions suivantes :

1. La suite semble-t-elle monotone ?
2. Si oui quel semble être son sens de variation ?
3. Comment tester cette conjecture ?
4. Comment peut-on la démontrer ?

Faites le même travail avec la suite de terme général $t_n = \dfrac{1{,}1^n}{n^2}$

Observation 6 : Les suites (suite et fin - juin 96)

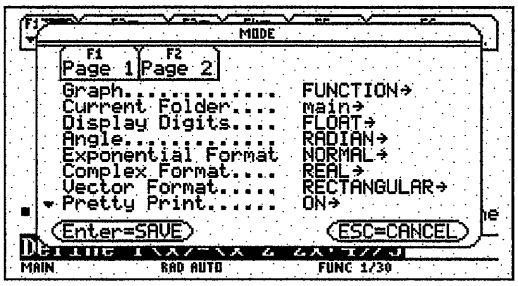
Cette séance est consacrée à l'étude de la suite définie par récurrence de la manière suivante :

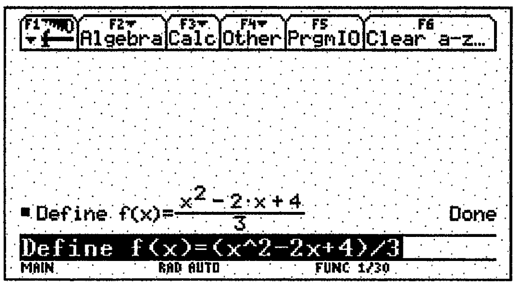
$$u_n = \frac{u_{n-1}^2 - 2u_{n-1} + 4}{3}$$

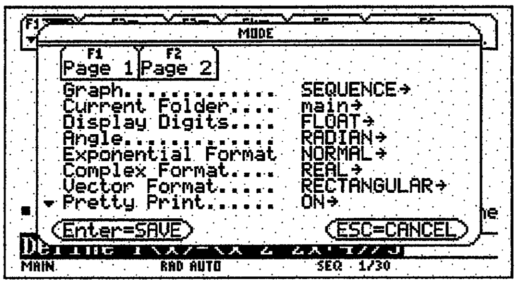
Durant cette séance, les connaissances-machine les plus mobilisées ont été de loin celles de niveau 2 concernant les changements optionnels (choix du mode SEQUENCE, du mode EXACT ou encore de la valeur initiale de la suite dans WINDOW par exemple). Cette multitude de choix à effectuer a forcé M. à intervenir fréquemment pour faire une mise au point collective (à la rétroprojetable). Par ailleurs, le tableau (donc le p/c) a été sollicité pour comparer des résultats-machine et des résultats-p/c (notamment pour comparer l'écriture-machine $[u_1(n-1)]^2$ et l'écriture usuelle $u_{n-1}{}^2$).

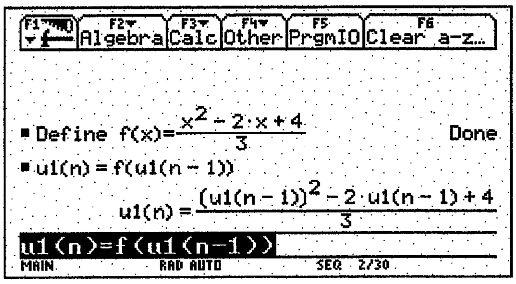
Par ailleurs, M. a insisté fortement sur la recherche des valeurs exactes de la suite pour conjecturer sur son sens de variation, en signifiant au passage que les valeurs trouvées dans TABLE (qui sont donc a priori approchées) ne suffisaient pas pour cette étude. Ainsi, elle signifie simultanément le statut de TABLE (application où les résultats sont approchés) et le rôle prioritaire du calcul exact sur le calcul approché.

Soulignons enfin la présence du niveau 3 à travers l'indication de M. suivante : *"Vous pouvez utiliser la fonction définie auparavant dans HOME en mode Function pour calculer $u_1(n) = f(u_1(n-1))$"*, ainsi la machine capitalise certaines données non seulement après un changement d'applications, mais également après changement de mode de représentation.



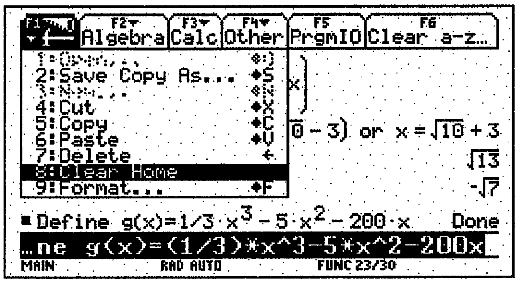


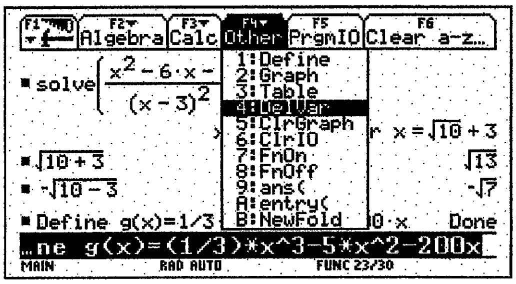




Conclusion :

Tout au long de l'année, nous avons remarqué une évolution dans le rapport institutionnel à la TI92, que ce soit sur le plan *technique* ou sur le plan *technologique* (au sens de Chevallard). Ainsi deux nouvelles habitudes se sont installées en classe, parmi lesquelles le quasi-rituel qui se traduit par le *nettoyage* de l'écran (à l'aide de la commande *F1-8 Clear Home* dans l'application HOME) et par la désaffectation des variables (à l'aide des commandes *F6* ou *F4-4 DelVar*).





Citons également la technique suivante quand il s'agit de tracer des courbes représentatives de fonctions :

- Définition de la fonction dans HOME par *F4-Define*
- Re-Définition dans Y=
- Tracé de la courbe représentative en *ZoomStd*

En ce qui concerne les connaissances-machine qui sont intervenues durant l'évolution de ce rapport institutionnel, trois des quatre niveaux précités dans la première partie de cette thèse peuvent être mis en évidence :

- Un premier niveau lorsqu'il s'agit de syntaxe, mais qui ne semble pas poser de problème pour les élèves
- Un deuxième niveau qui concerne les changements optionnels et qui est très présent, ce qui semble dû essentiellement à la volonté (de l'enseignante) d'affiner et de perfectionner l'utilisation de la TI92. En effet, le recours à TblSet pour un changement de pas ou de valeur initiale, la modification de la taille des cellules dans DataEditor ou le choix du mode de représentation graphique des suites sont autant d'exemples qui témoignent plutôt d'un niveau d'utilisation assez élevé, qui ne se réduit pas au niveau 0 qui consiste à ne mettre en jeu que le niveau 1 des connaissances-machine.
- Un troisième niveau qui transparaît dans le discours technologique de l'enseignante quand celui-ci a pour objectif l'interprétation et l'explication de certains comportements de la machine. Citons par exemple l'intervention de l'enseignante pour expliquer ce qui se passe au niveau de la mémoire quand on change le contenu d'une variable (cf. *Observation 4*), pour mettre en garde les élèves contre le caractère approché des calculs faits dans GRAPH ou TABLE par exemple, ou encore pour expliquer la différence pour la machine entre *a*b* et *ab*.

Par ailleurs, le travail en p/c semble de plus en plus prioritaire dans les activités en classe alors que le statut du travail-machine semble s'orienter plutôt vers la conjecture et le contrôle. Enfin, l'intervention de l'enseignante à la calculatrice rétroprojetable semble de plus en plus fréquente. Nous pouvons expliquer cela par le fait qu'il y ait de plus en plus de connaissances de niveau 2 à gérer. En effet, ce type de connaissances étant difficile à gérer (cf. *Observations 4* et *6*) pour tous les élèves, le recours à la rétroprojetable paraît être une solution économique pour synchroniser et canaliser le travail desdits élèves en classe. La fréquence des manipulations problématiques (correspondant essentiellement à des contraintes de niveau 2) nous semble justifier celle des interventions de l'enseignante à la rétroprojetable. Une autre raison qui nous paraît non moins importante est le fait que les séances d'introduction d'ostensifs-TI92 nouveaux correspondent également à celles où de nouvelles connaissances mathématiques sont introduites.
En fait, la gestion des techniques instrumentées et des technologies correspondantes s'est déroulée de façon irrégulière et souvent spontanée (malgré quelques choix clairs faits dès le début tels que celui d'utiliser de manière privilégiée l'ostensif *Define* et qui vise une rupture avec le fonctionnement calculatrice graphique) où les difficultés sont apparues à cause de la présence de deux types de technologie : celle qui correspond à l'environnement usuel et à

l'avancée du savoir en classe, et celle qui est liée à l'utilisation de la machine. De plus, malgré l'expertise de l'enseignante, beaucoup de problèmes imprévus sont apparus en cours de séance et qui montrent la nécessité d'un travail didactique plus grand et qui s'inscrive dans la durée, lequel aura lieu en préparation de la deuxième année d'expérimentation, et ce dans le cadre global dans lequel s'inscrit cette recherche ([Artigue & al., 1998]).

Dimension individuelle :

Le suivi par entretiens :

Le suivi d'élèves a pour objectif un accès plus fin que les questionnaires, aux processus personnels d'instrumentation de la calculatrice, en prenant en compte notamment la diversité des rapports possibles des élèves tant aux mathématiques qu'aux technologies informatiques. Neuf élèves ont fait l'objet d'un tel suivi en cette première année d'expérimentation. Pour tous ces élèves, nous avons effectué un dépouillement spécifique des questionnaires et du contrôle spécifique de fin d'année, et organisé par ailleurs trois entretiens au fil de l'année à partir de la fin du mois de janvier. Nous présenterons ci-après :

- les critères de choix utilisés pour sélectionner les élèves et leurs profils au moment du choix
- Les entretiens : nous commencerons par une présentation générale avant de préciser les objectifs et scénarios de chacun des trois entretiens. Nous donnerons ensuite les résultats, analyse et synthèse par entretien. Le troisième entretien porte notamment sur un contrôle spécifique à l'utilisation de la TI92.
- Les résultats par élève : un portrait de l'évolution de chacun des élèves observés est dressé à partir des éléments d'observations rassemblés en annexes.
- La synthèse des observations réalisées dans la classe.
- Une interprétation portant sur les processus d'instrumentation de la TI92.

Critères de choix :

Le choix des élèves a été effectué à la fin du mois de décembre. Afin de prendre en compte la diversité des rapports possibles aux mathématiques, nous nous sommes basés sur l'avis de l'enseignante et les notes du premier trimestre qui étaient alors disponibles. D'autre part, et pour prendre en compte la diversité des rapports possibles aux outils informatiques, nous avons pris comme critères les réponses au premier questionnaire, ainsi que l'avis de l'enseignante qui avait eu l'occasion de travailler avec eux pendant tout le trimestre dans l'environnement des calculatrices graphiques. Enfin, nous avons également croisé les catégories issues de ces deux premières dimensions avec la variable sexe.

En fin de compte, nous avons retenu des élèves représentatifs des différents niveaux rencontrés dans ces classes (sans prendre en compte cependant la catégorie des élèves très faibles), travaillant a priori de façon différente et ayant vis-à-vis des machines, des rapports allant de la méfiance à une certaine forme de dépendance.

Les élèves retenus et leurs profils :
Les neuf élèves suivis ont pour prénoms* (*en réalité, ce ne sont pas les vrais prénoms lesquels ont été modifiés pour des raisons de déontologie) Anne, Charles, Georges, Gérard, Francis, Françoise, Michel, Serge et Vincent. Ils sont tous équipés d'une calculatrice graphique mais seuls Georges, Serge, Vincent et Anne en disposent depuis plus d'un an. Georges est celui qui en a l'utilisation la plus systématique. Et tandis que Michel, Charles et Anne ont été aidés par leur professeur pour l'apprentissage de la calculatrice, Françoise attend de celui-ci une aide spécifique pour les tracés graphiques et Georges pour la programmation. Les autres élèves expriment des attentes plus vagues.
Gérard, Charles et Anne reconnaissent avoir obtenu des résultats graphiques surprenants. Michel, lui a été surpris pour des raisons de parenthésage. Serge a été parfois induit en erreur. Françoise, Michel et Francis vérifient souvent les résultats, tandis que Georges, Anne, Serge et Charles le font parfois seulement et Gérard Vincent, jamais.
Par ailleurs, seuls Vincent et Gérard expriment des réserves sur l'utilité de la calculatrice pour l'apprentissage des mathématiques. Vincent pense que la calculatrice ne l'aide pas à résoudre les problèmes et Gérard estime que la calculatrice ne l'aide pas à préparer ses contrôles. Cependant, tous sont d'accord pour dire qu'elle est utile en contrôle quand seul Gérard souligne avec franchise son utilité comme « aide-mémoire ».
Francis, Georges et Gérard ont un ordinateur chez eux, qu'ils utilisent souvent. Leur utilisation des logiciels couvre le traitement de texte, le dessin, les tableurs et les jeux informatiques. Ils pensent que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques.
Par ailleurs, Anne, Françoise, Charles et Michel ont également un ordinateur chez eux. Ils l'utilisent moins souvent, essentiellement pour des jeux informatiques, ou du traitement de texte. Enfin, Serge et Vincent n'ont pas d'ordinateur et leur utilisation de logiciels se limite aux jeux.

Vincent et Michel sont les seuls à émettre des réserves sur l'utilisation de l'ordinateur pour apprendre des mathématiques.

En géométrie, Serge, Gérard et Charles ont utilisé « le géomètre» ou « l'atelier de géométrie », et « dessiner l'espace » entre trois et dix fois. Ils les ont trouvés faciles d'accès et utiles à l'apprentissage de la géométrie.

Anne a quant à elle, utilisé un peu « l'atelier de géométrie » et « dessiner l'espace ». Elle les a trouvés faciles d'accès et y voit une aide possible à la compréhension. Françoise a la même opinion du « géomètre » qu'elle a cependant peu utilisé.

Pour leur part, Georges, Vincent, Francis et Michel n'ont utilisé que le logiciel « dessiner l'espace ». Georges et Francis le trouvent utile pour l'apprentissage de la géométrie dans l'espace. Michel, lui, pense que « le professeur c'est mieux ». Vincent a rencontré des difficultés à cause de son manque de familiarité avec l'ordinateur.

Par ailleurs, Gérard a utilisé en classe le logiciel DERIVE entre trois et dix fois pour résoudre des équations et des inéquations. Il pense qu'il n'est pas difficile à utiliser et utile car il permet de vérifier les résultats et de résoudre rapidement les exercices les plus difficiles .

Serge l'a, quant à lui, utilisé en classe une ou deux fois pour illustrer le cours et chercher des exercices . Il pense lui aussi qu'il est facile à utiliser, utile car il factorise et développe lui-même.

Hormis Gérard et Serge, aucun élève n'a utilisé DERIVE.

En conclusion de cette présentation rapide, Gérard et Georges ont un rapport très positif aux technologies informatiques. Ils disposent hors classe d'un environnement informatique et se sentent visiblement à l'aise avec ces outils.

Francis et Françoise ont quant à eux, un rapport positif aux technologies informatiques, et une certaine familiarité avec ces dernières, mais ont une faible pratique des logiciels de mathématiques et leur utilisation de la calculatrice graphique reste limitée.

Par ailleurs, Charles, Serge et Anne ont une opinion positive des technologies informatiques, mais ne font de ces technologies qu'un usage très modéré. C'est en particulier le cas de Anne qui a une calculatrice graphique depuis plus d'un an, mais qui ne l'utilise que pour des calculs numériques.

Enfin, Vincent et Michel ont un rapport plus nuancé vis à vis des technologies informatiques (réticences vis à vis des utilisations en contrôle, calculatrices jugées néfastes aux apprentissages) et une faible familiarité avec les environnements informatiques.

Passation :

Le premier entretien a eu lieu fin janvier. Les élèves disposaient alors de la TI92 depuis un à deux mois. Le second entretien a eu lieu en avril et mai, après les vacances de Pâques, tandis que le dernier s'est déroulé au mois de juin à la fin de l'année scolaire.

Chaque entretien était d'une demi-heure, sans doute une durée trop courte pour ce qui était prévu. Chacun comportait systématiquement les parties suivantes :

1. des questions visant à conduire l'élève à préciser l'utilisation qu'il avait faite de la TI92, en particulier pendant le contrôle précédant l'entretien (en général la même semaine ou la semaine précédente)
2. une étude de fonction à mener rapidement (environ 15 minutes) avec la calculatrice pour nous permettre de cerner l'évolution de l'instrumentation de la machine dans cette tâche classique du niveau de la première S.

Pourquoi l'étude de la variation des fonctions ?

- "c'est une tâche mathématique usuelle en première S. Amorcée en seconde sans calcul différentiel, en s'appuyant sur les fonctions de référence, elle se poursuit en première et la notion de fonction dérivée permet d'en faire une tâche routinière, pour des fonctions d'une complexité raisonnable. Dans l'enseignement p/c, elle vit dans des contextes soigneusement calibrés pour que l'étude du signe de la dérivée ne pose pas de problème. Elle s'appuie de plus sur un ostensif spécifique : le tableau de variation. Comment peut s'organiser le rapport à cette tâche avec une TI92, en jouant de façon efficace et cohérente sur les deux dimensions en interaction que sont la genèse instrumentale et la genèse mathématique?" [Artigue et Lagrange, 1999]
- c'est une tâche assez banale pour être traitée à différentes époques de l'année sans qu'il y ait besoin de rappeler beaucoup de résultats
- c'est une tâche qui incorpore des sous-tâches où un certain nombre d'objets mathématiques peuvent être investis en tant qu'*outils* [Douady, 1986], tels que la factorisation, la résolution d'équations ou encore la résolution d'inéquations. Ceci permet donc d'une manière économique d'avoir accès au rapport des élèves à plusieurs objets de savoir dans l'environnement en question et d'évaluer son évolution dans l'année.
- c'est une tâche qui met en jeu divers registres de représentations sémiotiques [Duval, 1995]

où la TI92 offre des ostensifs puissants et assez économiques (dont l'*instrumentalité* - au sens de Chevallard - est élevée) pour concurrencer les ostensifs-p/c, quand le contrat permet l'utilisation de la machine.

Tout ceci, à savoir le caractère familier de la tâche, la diversité des registres qui peuvent intervenir, la puissance et l'économie du travail permises, nous poussent à conjecturer l'émergence de techniques diverses qui dépendraient entre autres des profils des élèves suivis.

Par ailleurs, le temps court de l'entretien interdisait d'inscrire cette tâche dans une activité de modélisation, il s'agissait de l'étude tout à fait standard d'une fonction donnée par une expression algébrique. Nous rompions cependant avec la routine de la tâche en demandant aux élèves dans les deux premiers entretiens de commencer par un tracé graphique, avant de confronter les résultats de l'étude algébrique aux caractéristiques de ce tracé (les fonctions étant choisies pour qu'une instrumentation graphique réduite produise des incohérences à ce niveau). En ce qui concerne le troisième entretien, nous avons demandé aux élèves de formuler des conjectures sur les propriétés de la fonction à partir du tracé graphique puis d'essayer de les prouver.

Ainsi, l'objectif que nous visons à travers ces tâches est de chercher quelles mathématiques les élèves injectent dans leur travail pour analyser, interpréter dans des situations où la lecture la plus banale (ce qui correspondrait à une instrumentation de niveau 0) ne suffit pas même à produire des représentations perceptiblement satisfaisantes, et à interpréter correctement les variations. Précisons toutefois que tout ceci ne correspond pas à l'attitude de résolution que nous avons envie de promouvoir.

Dans la courte discussion qui suivait le travail de l'élève, nous lui refaisions suivre rapidement le fil de sa résolution, en demandant éventuellement des précisions sur des actions que nous avions du mal à interpréter, puis nous essayions de l'aider à aller plus loin pour essayer de cerner ce qui lui était accessible avec les médiations limitées prévues.

Les entretiens étaient audio-enregistrés. De plus, l'élève, pour l'étude de fonction, utilisait une calculatrice rétroprojetable reliée à une tablette qui nous permettait de suivre son travail, sans trop l'importuner. A partir du second entretien, il nous a été également possible d'enregistrer régulièrement des écrans de la calculatrice, reliée aussi à un ordinateur portable.

Ces conditions nous ont permis de suivre un nombre relativement important d'élèves, compte tenu des contraintes qui pesaient sur la réalisation des entretiens. Mais la durée d'une demi-heure est sans aucun doute trop courte pour permettre un travail dans de bonnes conditions. Suivant les élèves, suivant leur rapidité, les difficultés qu'ils rencontrent dans la phase d'étude de fonctions, nous avons obtenu des entretiens relativement disparates.

Dépouillement :

Les enregistrements des trois entretiens ont été dépouillés. A partir de l'ensemble des données recueillies - enregistrements, notes de l'observateur, brouillons des élèves -, une fiche a été constituée pour chaque élève rapportant ses réponses dans les différentes parties de chaque entretien.

Pour la partie étude de fonction, nous avons défini un type de « stratégie standard » prenant en compte les connaissances mathématiques ainsi que l'instrumentation disponibles au moment de l'entretien, et ceci dans le cadre de l'expérience partagée par les élèves au sein de la classe. Elle nous servait de référence pour situer les comportements réels observés.

Par ailleurs, pour chaque élève, les rubriques suivantes ont été renseignées :

. « Résolution » : il s'agissait d'une reconstitution du travail de l'élève pendant la phase de travail autonome, à partir des données recueillies, ainsi qu'une description de son interaction avec l'observateur pendant la phase de discussion.

. « Applications et commandes » : pour chaque application de la TI92, nous répertoriions les fonctions et instructions ayant été utilisées au cours de la résolution, en distinguant éventuellement dans la tâche différentes sous-tâches. Ceci devait nous permettre d'apprécier plus synthétiquement l'instrumentation de la machine ainsi que l'articulation entre le travail P/C et le travail avec la TI92, systématiquement mentionnée dans cette rubrique.

. «Techniques, stratégies développées »: il s'agissait ici des techniques et stratégies utilisées par les élèves dans la résolution de sous-tâches clefs pour l'entretien considéré.

Les données étaient synthétisées dans cette rubrique, non par rapport à la machine comme dans la rubrique précédente, mais par rapport à la tâche mathématique et à ses sous-tâches.

. «Erreurs, difficultés»: il s'agissait ici de synthétiser des parcours nécessairement différents selon les erreurs et difficultés recensées dans la phase de résolution autonome et la phase de discussion, en prenant en compte tous les types d'erreurs et difficultés rencontrés.

. « Sensibilité aux incohérences » : il s'agissait dans cette rubrique de prendre en compte une dimension que nous considérions comme essentielle dans l'instrumentation de la TI92 : la sensibilité des élèves aux incohérences éventuelles entre étude graphique et étude algébrique (qu'il s'agisse de résultats fournis par la machine ou produits en p/c), soit de façon autonome, soit avec la médiation de l'interviewer.

Entretien 1 :

Scénario de l'entretien :

Pour ce premier entretien, passé à la fin du mois de janvier, la notion de dérivée introduite fin décembre est une notion récente et les limites n'ont pas encore été travaillées. L'objectif à travers cet entretien (qui s'organise en quatre parties) est d'avoir accès au rapport personnel des élèves à la TI92, en complément des informations recueillies dans le questionnaire :

- D'une part, en essayant d'avoir des éléments sur l'*instrumentalisation* où la composante "transformation de la machine" serait prise en compte dans la *Partie 1* (où l'on questionne les élèves sur l'utilisation de la machine en dehors de la classe de mathématiques) et la *Partie 4* (où l'on essaie d'évaluer leur maîtrise de schèmes d'usage liés à des fonctionnalités qui ne sont pas forcément tournées vers des tâches mathématiques). Quant à la composante "statut de la machine" dans l'activité, elle se laisserait voir dans les *Partie 2* où on leur demande de décrire leur utilisation de la TI92 en devoir commun et *Partie 3* où ils ont à utiliser leur machine pour résoudre une tâche mathématique

- D'autre part, en essayant d'avoir accès à l'instrumentation de la TI92 dans deux contextes : celui de la *Partie 2* où le contrat didactique est de type habituel, et celui de la *Partie 3* où le contrat leur permet d'utiliser la machine sans avoir à fournir des preuves en p/c

Partie 1 :

Nous demandons d'abord à l'élève s'il a utilisé la TI92 en dehors du lycée la semaine précédente et si oui, combien de temps et pour quoi faire.

Partie 2 :

Nous le questionnons sur la manière dont il a utilisé sa TI92 au devoir commun précédent (cf. annexe 3) dans la partie analyse exclusivement, et lui demandons enfin son avis sur l'utilité de la machine. Nous pensons ainsi avoir accès à travers ses réponses, au rapport qu'il peut avoir à la machine quand le contrat est standard.

Partie 3 :

Cette partie est consacrée à l'étude de la fonction f définie par $f(x) = x(x+7) + \frac{9}{x}$. On demande aux élèves d'entrer la fonction dans leur calculatrice, de la faire tracer, puis d'étudier ses variations et de chercher si les résultats de cette étude sont cohérents avec le tracé obtenu. Le cas échéant, il leur est demandé de préciser les incohérences et d'essayer de les résoudre. Pour ce qui est du contrat, il leur est précisé qu'ils n'ont pas à justifier en p/c les résultats fournis par la calculatrice, mais qu'ils peuvent utiliser pour leur résolution le papier et le stylo qu'ils ont à disposition. Ensuite, nous faisons avec eux le point sur leur travail et essayons de tester l'effet de médiations en particulier en cas d'incohérences non repérées ou d'absence d'idées pour les interpréter et les dépasser.

La fonction est donnée sous cette forme-là pour repérer si les élèves pensent à la nécessité de réintroduire un signe de multiplication entre les deux facteurs et, si ce n'est pas le cas, pour étudier leurs réactions face au message d'erreur reçu, sachant que ce problème a déjà été traité en classe (cf. *Dimension institutionnelle* - Observation 1)

Par ailleurs, la fonction est choisie pour remplir un certain nombre de conditions :

- dans la fenêtre de tracé initiale, correspondant à l'option *ZoomDec* (qui correspond à la fenêtre par défaut, soit : [-11.9,11.9]x[-5.1,5.1]), le tracé n'est pas satisfaisant puisque les extrema locaux obtenus pour x=-3, -1.5 et 1 ont des valeurs respectives de : -15, -14.25 et 17, qui ne s'affichent pas dans la fenêtre en question
- Alors que dans les exercices usuels à ce niveau, les élèves sont habitués à se retrouver avec des fonctions polynômes du premier et du second degré, pour lesquelles ils mobilisent des algorithmes connus, l'étude du signe de la dérivée conduit ici à l'étude du signe d'un polynôme du troisième degré,
- la TI92 fournit les zéros de ce polynôme et sa factorisation en facteurs du premier degré grâce à l'utilisation des commandes *Zeros* (ou *Solve*) et *Factor* du menu *F2-Algebra* qui se situe dans l'application HOME ; ceci met en jeu des connaissances-machine (de niveau 1, puisque les seules contraintes à dépasser sont d'ordre syntaxique) et des connaissances mathématiques (telles que la connaissance du rôle d'une factorisation dans la tâche, par exemple). Par contre, la machine ne résout pas algébriquement l'inégalité $f'(x)>0$ (ce qui représente une connaissance-machine de niveau 3), donc l'élève sera obligé de faire

autrement cette étude, soit en p/c par l'utilisation d'un tableau de signes (ce qui est sous-tendu par des connaissances mathématiques), soit en combinant les deux environnements TI92 et p/c,

- la fonction comporte une singularité en 0. De plus, cette singularité induit au niveau du tracé, un phénomène graphique dont l'interprétation appelle des connaissances-machine (de niveau 2 et 3, ici) ainsi que des connaissances mathématiques (à travers le repérage de la singularité et son intégration au tableau de variation). En effet, sur le tracé apparaît un segment qui relie deux points de part et d'autre de x = 0, où il "devrait" y avoir une asymptote verticale. L'élève pourrait ainsi penser que la courbe est croissante au voisinage de x = 0 (ce qui n'est pas le cas en réalité) s'il ne se base que sur des critères perceptifs, sans connexion avec l'étude de la fonction.

Ainsi, du fait de la présence de toutes ces perturbations, l'obtention d'un tracé satisfaisant, l'étude du sens de variation de la fonction, le contrôle de la cohérence entre tracé et tableau de variation induisent une instrumentation de la calculatrice qui ne soit pas minimale par rapport au type de tâche envisagé et une adaptation des méthodes et techniques utilisées dans les exercices usuels à ce niveau, par mise en jeu de connaissances-machine et de connaissances mathématiques. De plus, le choix de la fonction a été fait de sorte que les contraintes ne se réduisent pas à celles de niveau 1, c'est-à-dire de type syntaxique (cf. *typologie des contraintes*), obligeant les élèves par là même à mobiliser les autres niveaux de connaissances-machine à travers les techniques qu'ils vont mettre en jeu et les technologies auxquelles ils vont avoir recours pour les justifier lors de la discussion avec l'interviewer.

Par ailleurs, les médiations a priori prévues pour la phase de discussion sont de plusieurs types :

- si les élèves n'ont pas obtenu de tracé satisfaisant, leur demander s'ils ne peuvent pas utiliser les résultats de l'étude théorique pour trouver une fenêtre mieux adaptée ; si cela ne donne pas de résultat, proposer une fenêtre adéquate pour pouvoir poursuivre,
- si des contradictions n'ont pas été relevées, essayer d'attirer l'attention des élèves sur elles et voir comment elles sont perçues et formulées,
- si des contradictions sont perçues mais non résolues, essayer d'aider les élèves à les résoudre.

Type de stratégies a priori :

Nous distinguons dans l'étude de la fonction trois sous-tâches.

1. Définir la fonction f

- Application : HOME : menu F4-1 (*Define*), ENTER, taper f(x) = x*(x+7) + 9/x puis ENTER

Notons que ces manipulations ne représentent pas la seule façon d'entrer une fonction pour la tracer, ceci peut être fait en allant directement dans l'application Y= ou dans l'application HOME, sans recours à *Define*, par la commande STO. En fait la définition est appelée ici par la question posée. De plus, cela a été une pratique institutionnelle permanente dans la classe (Cf. *Dimension institutionnelle*), justement pour marquer la rupture, au moins partiellement, avec les pratiques liées aux calculatrices graphiques et marquer d'emblée l'importance de l'application de calcul formel.

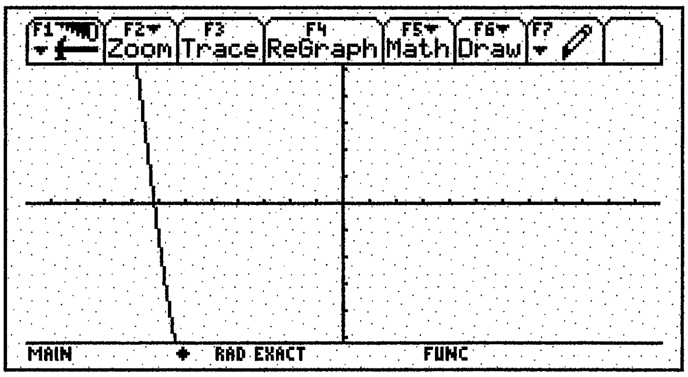
2. Tracer la courbe représentative de f

- Application Y= : ligne de commande y1(x) = , taper f(x) et ENTER

L'élève peut également retaper l'expression de f(x) mais c'est moins économique.

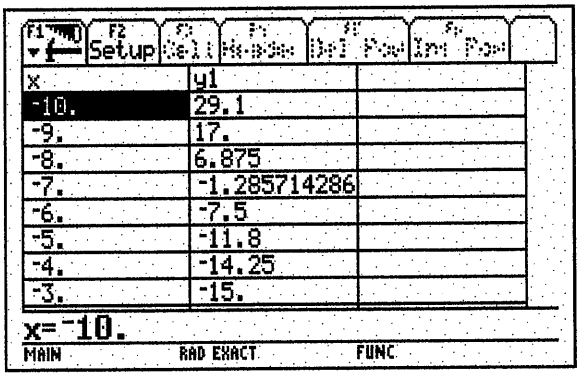
- Application GRAPH

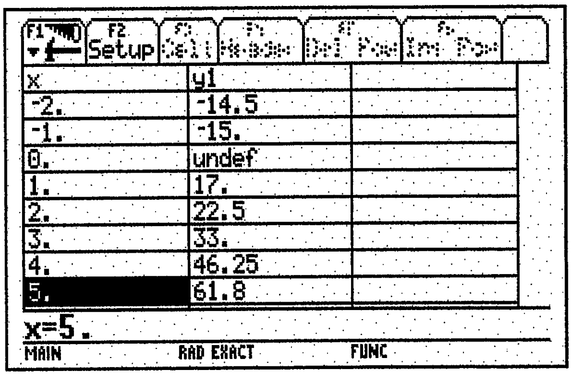
Le tracé dans la fenêtre initiale, ici la fenêtre *ZoomDec* donne le tracé ci-après.



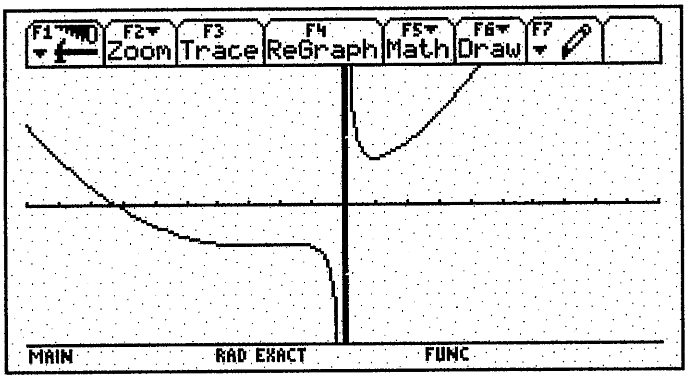
Il est à l'évidence non satisfaisant, la fonction étant définie pour tout x non nul. On peut penser ici, en nous basant sur des recherches faites antérieurement sur les représentations graphiques comme par exemple [Chauvat, 1998], que l'élève soit tenté d'agrandir la fenêtre en modifiant les caractéristiques de l'application WINDOW, par une méthode d'essais et d'erreurs. Nous retenons comme stratégie standard une stratégie plus élaborée et a priori tout à fait accessible aux élèves à cette époque de l'année :

- Application TblSet : fixer l'initialisation par exemple à -10, abscisse voisine du minimum dans la fenêtre initiale et laisser le pas à 1 (valeur initiale)
- Application TABLE : parcourir le tableau de valeurs jusqu'à 10, par exemple, pour couvrir l'intervalle du Range initial sur x, repérer les valeurs extrémales de f(x) dans la table.





- Application WINDOW : ajustement de la fenêtre en fonction des valeurs trouvées, par exemple à [-10,10] x [-30,30]
- Application GRAPH pour obtenir le tracé suivant :



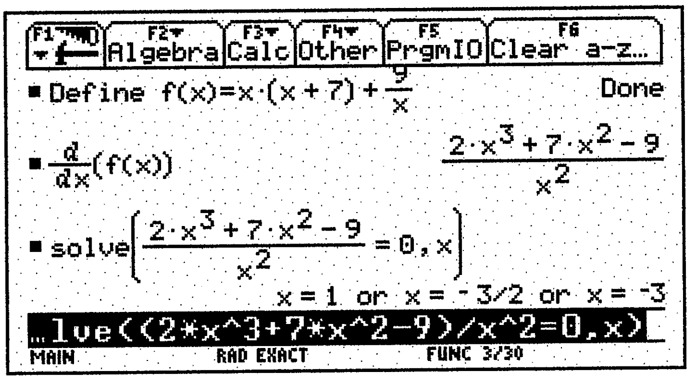
Une variante de la stratégie standard consiste à aller d'abord dans l'application TABLE et à ne repasser à l'application TblSet qu'en constatant que la valeur initiale de x est 0.

Une stratégie plus économique consisterait à faire un *ZoomFit* sur l'intervalle [-10,10] mais au moment où l'entretien a eu lieu, cette commande n'avait pas encore été introduite officiellement justement pour ne pas court-circuiter trop tôt le type de travail et d'articulation entre applications ci-dessus.

3. Etudier les variations de la fonction f

- Application HOME : Menu *F3-1* (*differentiate*) ENTER, taper f(x),x) puis ENTER - *Define* df(x) - *Zeros* (df(x),x) ou *Solve*(df(x)=0,x) ou *Factor* (df(x)) ou *Factor*(df(x),x)

Dans la stratégie standard, on utilise donc la différenciation formelle permise par la TI92, en utilisant le menu *F3* (plus souvent utilisée en classe que le raccourci 2nd8). Pour la recherche des racines, deux commandes sont utilisables et du même niveau, nous ne les séparons pas dans la stratégie standard. On peut aussi faire factoriser ou chercher les zéros de l'expression sans définir la dérivée comme fonction (cf. figure ci-dessous).



- Travail P/C

Une fois les racines calculées, le plus simple consiste à étudier le signe de la dérivée en P/C, en faisant un tableau de signes et en incluant la valeur 0 pour laquelle la fonction dérivée n'est pas définie. C'est cette stratégie que nous retenons pour la stratégie standard.

On s'appuie ensuite sur ce tableau de signes pour construire le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{3}{2}$	0	1	$+\infty$
x+3	–	+	+	+	+	
x+3/2	–	–	+	+	+	
x-1	–	–	–	–	+	

f'(x)	–	+	–	–	+
f (x)	↘	↗	↘	↘	↗

Il reste alors à déterminer les valeurs particulières correspondant aux extremums locaux, ce qui se fait très facilement via l'application HOME

- Application HOME : f(-3) - f(-3/2) - f(1)

On peut contrôler si on le souhaite en revenant au graphe de f.

Nous avons ainsi choisi un type de stratégie se basant sur l'articulation des applications d'une part, et sur l'utilisation des deux environnements que sont la TI92 et le p/c d'autre part. De ce fait, divers registres sont mis en jeu et différents ostensifs peuvent être choisis dans l'un ou l'autre environnement selon leur *instrumentalité* [Chevallard,...], et cela d'une manière qui nous parait accessible à cette époque de l'année et vu le type de contrat dans lequel s'inscrit cet entretien.

Par ailleurs, le type de stratégie proposé fait intervenir plusieurs niveaux de connaissances-machine :

- Le premier niveau à travers les contraintes de syntaxe liées à l'utilisation des commandes *Solve, Zeros, Factor* ou *Define,*

- Le deuxième niveau par le choix de la fenêtre de tracé dans WINDOW, et dans une moindre mesure par la modification de *TblSet,*

- Le troisième niveau à travers la prise en compte du caractère approché des applications GRAPH et TABLE, et du caractère exact de l'application HOME.

Partie 4 :

Cette partie est organisée sous forme de treize questions commençant toutes par : " Sais-tu avec ta machine faire . . . ". Elles concernent des ostensifs-TI92 rencontrés auparavant et plus ou moins fréquemment utilisés. Contrairement aux trois autres parties, celle-ci interroge des connaissances tournées exclusivement vers la machine, où les ostensifs qui interviennent appartiendraient à la deuxième catégorie (cf. *Partie Théorique-Transparence des ostensifs*). Par ailleurs, l'élève répond en principe sans toucher la machine. S'il a un doute, il peut la consulter mais on ne lui laisse pas de temps réel de recherche.

Résultats et analyse :

Précisons que, lors de ce premier entretien, nous avons rencontré quelques problèmes d'enregistrement qui se traduisent par des points d'interrogation dans certains tableaux, lorsque le croisement des données recueillies ne nous permet pas d'assurer une reconstitution fiable. Ceci explique aussi l'absence d'information, dans les premiers tableaux, sur les réponses apportées par Anne.

Partie 1 : Utilisation en dehors des cours de mathématiques

Utilisation de la TI92 en dehors des cours de maths, la semaine précédente		
	Combien de temps ?	**Pour quoi faire ?**
Anne	?	?
Charles	Moins d'une demi-heure	Application GEOMETRY
Francis	Entre une et deux heures	Pour des petits calculs dans HOME
Françoise	Une demi-heure	Application GEOMETRY
Georges	Environ deux heures	* Application GEOMETRY * Recopier un programme pour le discriminant, qu'il avait sur son ancienne calculatrice
Gérard	?	?
Michel	Ne l'a pas utilisée	
Serge	Environ deux heures	* Programmation d'un jeu * Application GEOMETRY
Vincent	?	Calculs pour la Physique

Comme le montre le tableau ci-dessus, l'utilisation en dehors des cours est loin d'être intensive. Par ailleurs, précisons qu'à cette époque de l'année, les élèves travaillaient sur les barycentres et que l'enseignante avait fourni une macro permettant de visualiser la position du barycentre de deux points en fonction des valeurs des coefficients barycentriques, un programme avec animation qui a eu beaucoup de succès et qu'ils utilisent pour anticiper et/ou contrôler les résultats des exercices donnés à faire à la maison ; ce qui explique le recours privilégié à l'application GEOMETRY

Partie 2 : Utilisation en devoir commun

Nous commençons par présenter un résumé du travail effectué par chaque élève lors du contrôle commun précédent dans la partie analyse :

Anne :

Nous ne disposons pas de l'enregistrement. Sa copie (7.5/20) montre une erreur dans le calcul des racines de la dérivée (les racines trouvées pour f' sont 360 et 1080), un tableau de variation incohérent avec le signe sur [0,10]. Il y a une erreur de signe dans le calcul de l'équation de la tangente. Le graphe est correct pour f, non pour la tangente, et cohérent avec le tableau de variation qu'il a dû servir à obtenir. La partie B est abordée : expression de V(x), calcul de V(5), sans détails de calcul.

Charles :

Il vérifie son calcul de dérivée à la TI92 et ne trouve pas le même résultat. Il écrit les deux résultats sur sa feuille puis continue avec son résultat P/C qui est en fait le résultat correct, l'autre étant : $f'(x)=-120x^4+225$. Il utilise son autre calculatrice (la graphique) où il avait implanté un programme pour vérifier les racines de la dérivée trouvées en p/c. Il fait ensuite un tracé erroné de la fonction quand il arrive à la question 5. Sur sa copie (3.5/20), le tableau de variation est faux bien que le signe de la dérivée soit correct, le graphe fourni est conforme au tableau. Il n'a pas fait la partie 2.

Francis :

Il calcule la dérivée à la main puis, pour contrôler son signe, la fait tracer. Plus tard, il fait aussi tracer la tangente et tombe sur une contradiction car il a oublié que c'était f' et non f qu'il avait fait tracer. Il mettra un peu de temps à comprendre son erreur. Son utilisation est standard dans la partie B où il arrive à la question 4. Sa copie (13.5/20) est soigneusement rédigée mais ne comporte pas de graphique

Françoise :

Elle a d'abord fait le calcul de la dérivée à la machine et également fait tracer f. Ensuite elle travaille en P/C jusqu'à la question 5 où elle réaffiche le tracé. Elle ne s'en sert pas dans la partie B. Dans sa copie (7/20), il y a une erreur dans le calcul de la racine négative, le signe de la dérivée est correct à cette erreur près mais le sens de variation faux. L'équation de la tangente est correcte et seule la tangente est tracée. Dans la partie B, l'expression de V(x) est trouvée mais les autres calculs sont faux.

Georges :

Il a défini d'emblée la fonction à étudier, puis vérifié avec la machine son calcul de dérivée. Il a vérifié son tableau de variation en faisant tracer la fonction. Il fait aussi tracer la droite qu'il a trouvée comme tangente à la courbe et repère à cette occasion une erreur de calcul. Dans la partie B, il utilise la machine de façon standard. Nous n'avons pas sa copie.

Gérard :

Il a beaucoup travaillé avec la machine : calcul de la dérivée, recherche des zéros et du signe (il a, dit-il, un programme qui le fait), utilisation de Table pour trouver des points pour le tracé, tracé de f pour voir l'allure. Dans la partie B, il dit avoir utilisé la fonction « maximum » de la calculatrice pour répondre à la question 5. Dans sa copie (8/20), les racines trouvées pour f' sont 360 et 1080, et le tableau de variation donne 250 et 0 pour les valeurs correspondantes de f. L'équation de la tangente est correcte ainsi que le tracé qui se trouve donc en contradiction avec le tableau de variation. Les calculs de la partie B sont faux.

Michel :

Il s'est servi de la machine pour vérifier des calculs faits à la main : vérification du calcul de la dérivée (fonction entrée à l'aide de la commande STO), contrôle du tracé, contrôle de la factorisation par développement. Sa copie (12.5/20) montre une erreur de calcul qui conduit à un discriminant négatif. Le tableau de variation donne donc une fonction croissante. le calcul de l'équation de la tangente ensuite est correct ainsi que le tracé graphique qui est, par conséquent, incompatible avec ce qui précède. Dans la partie B, il refait tous les calculs, ce qui lui évite de traîner son erreur et traite correctement toutes les questions jusqu'à la 4 incluse. La rédaction est très soignée.

Serge :

Il s'est servi de la machine pour vérifier le calcul de la dérivée, puis contrôler son tableau de variation en faisant tracer f. Dans la partie B, il dit ne pas avoir bien compris ce qu'on lui demandait et avoir fait factoriser par la machine. Sur sa copie (13.5/20), le calcul des racines est confus et peu détaillé et on a l'impression qu'il a également utilisé la machine pour trouver les racines de la dérivée. Le tracé est peu soigné mais correct. La partie B est traitée jusqu'à la question 4. Les calculs ne sont pas détaillés, visiblement la machine a été utilisée.

Vincent :

Il a fait d'abord les calculs à la machine (calcul de la dérivée, détermination de ses zéros) puis les a refaits à la main pour rédiger. Il fait tracer la fonction et sa tangente, trouve le résultat "bizarre", incrimine la fenêtre, va dans Table pour trouver des valeurs et trace à partir des points correspondants. Il s'est arrêté au début de la partie 2. Sur sa copie (8.5/20), la factorisation de f' est donnée sans justification, le reste de la partie A est correct, le tracé étant peu soigné. Dans la partie B l'égalité V(x)=f(x) est affirmée sur la base de l'expression factorisée de V(x).

Les réponses des élèves ci-dessus montrent clairement le statut de la machine, qui est utilisée comme outil de vérification de résultats obtenus à la main. Ceci semble se confirmer au vu de leur opinion sur l'aide que la TI92 peut fournir en contrôle (Cf tableau ci-dessous). Ce statut nous semble dû essentiellement à la nature du contrat, où il fallait justifier en p/c les résultats obtenus. L'application HOME quant à elle, est moyennement sollicitée. Dans la partie A du problème (cf. annexe 3), la TI92 sert à vérifier le calcul de la dérivée, parfois à contrôler le tableau de variation (par tracé de f). Mais la plupart des élèves n'utilisent pas la machine pour trouver ou contrôler les zéros de la dérivée et ne font tracer le graphe qu'arrivés à la question correspondante. Ils font éventuellement tracer la tangente trouvée pour contrôler graphiquement la tangence. Dans la partie B, quand ils la traitent, elle sert dans le calcul de V(5) et dans la factorisation. De plus, on notera que malgré des affirmations d'aides à la vérification, des incompatibilités évidentes ne sont pas toujours repérées et exploitées, notamment quand il s'agit du tableau de variation et du tracé.

	Utilisation au contrôle commun : avis global
Charles	*Je ne pense pas que ça m'a énormément aidé. Ca ne m'a pas gêné non plus*
Francis	*On peut pas dire qu'elle m'a fait perdre du temps.* *Ca m'a perturbé, le temps de comprendre ce qui se passait*
Françoise	*Ca m'a servi à aller plus vite, à vérifier aussi*
Georges	*Elle m'a aidé*
Gérard	*Ca m'a aidé, surtout pour la partie A*
Michel	*Elle m'a conforté dans ce que j'avais fait. C'est tout. . sans plus*
Serge	*Ca m'a aidé à vérifier que mes résultats étaient justes*

Partie 3 : Etude de fonction

Dans cette partie, nous présentons les informations synthétiques correspondant aux différentes rubriques. Pour ce qui est des applications et fonctionnalités, nous avons distingué dans deux tableaux ce qui relève de la première phase de tracé et ce qui relève ensuite de l'étude du sens de variation et de la mise en relation tracés/sens de variation. Pour ce qui est des stratégies et techniques utilisées par les élèves, nous nous focaliserons sur celles utilisées pour étudier les variations de f, en particulier étudier le signe de f', passer à un tableau de variation, déterminer des valeurs particulières de f et de f'. Enfin au niveau des incohérences éventuelles, nous serons particulièrement sensibles à la non prise en compte correcte de la singularité en 0 et aux effets qu'elle peut produire.

Applications et commandes :

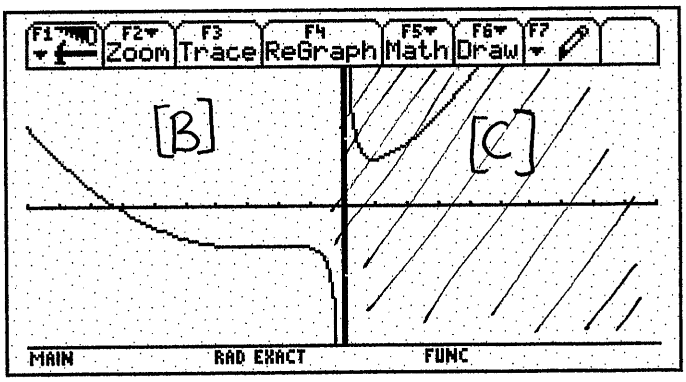
Pour résoudre cet exercice, l'élève a évidemment recours à des applications et à certaines commandes, qui sont regroupées dans les deux tableaux ci-après.

Légende :

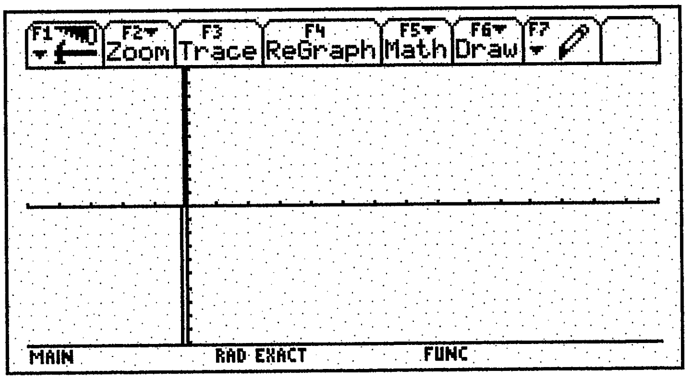
(n)	Utilisation n fois . Dans la colonne GRAPH/WINDOW, (n) désigne le nombre de fois où la fenêtre a été modifiée
*	L'élève définit la fonction dérivée dans Y=
¤	L'élève consulte l'application
Cal	Calcul numérique avec les opérations de base
SD	Sélection ou Désélection dans Y=
FI	Fenêtre initiale (dans cet entretien, *ZoomDec*)
W	Changement "manuel" de la fenêtre
g	Fonction correspondant au numérateur de la dérivée f '

L'indication « Types de tracés obtenus » désigne les types de tracés obtenus dans l'ordre chronologique, après chaque changement opéré dans l'application WINDOW . Entre les deux crochets, sont notés les bouts de la courbe obtenus, conformément au découpage suivant :

[A]	Portion correspondant à x négatif sur le tracé standard
[B]	Portion correspondant à x négatif complétant le tracé standard
[C]	Portion correspondant à x positif



Toujours dans la même colonne, l'indication [O] désigne le tracé suivant obtenu pour la fenêtre [-5,15]x[-10,10], non prévu dans l'étude a priori :



1 & 2 : Définir la fonction f et tracer sa courbe représentative

	HOME	Y=	GRAPH - WINDOW types de tracés obtenus	TblSet	TABLE
Anne	*Define*	*	FI [A] W [O] W [A]		
Charles		*	FI [A] W [A] ¤		
Francis		*	FI [A] W [AB]		
Françoise	*Define*	*	FI [A] W [A] W [ABC]		
Georges	*Define*	*	FI [A] W [AC] *ZoomOut* puis *ZoomBox* [ABC]		
Gérard	*Define*	*	FI [A] W [A]		
Michel	*Expand* *Define*	*			

Serge	*Define* *Graph*		FI [A] W [AB]		
Vincent	*Define*	*	FI [A]		

3. Etudier les variations de la fonction f

Pour ce tableau 5, nous avons rajouté une colonne (P/C) dans laquelle toute application qui apparaît signifie qu'elle précède un passage en Papier/Crayon .

Exemple : si dans cette colonne on lit : HOME (2), cela s'entend : pour répondre à la question, l'élève est passé deux fois de l'application HOME en P/C.

	HOME	**Y=**	**GRAPH - WINDOW** **types de tracés obtenus**	**TblSet**	**TABLE**	**P/C**
Anne	*d(* *Define* g	*	Courbes de f et de g ¤			HOME GRAPH (2)
Charles	*d(*	*	Courbes de f et df W [AB] W [ABC] W [ABC]		¤ (2)	TABLE (2) HOME
Francis	*d(* *Factor* *Define*	*	Courbes de f et df *F5-Max* *F5-Min* *Trace* *ZoomBox*	Change de pas	¤	
Françoise	*d(* Cal. *Solve*					HOME (2)

Georges	*d(* *Define* *Zeros* df(-4) df(-2) df(0) f(0) f(0.5) f(2) f(-1)	*	Courbe de df *ZoomOut* *Trace* *ZoomBox*			HOME (4)
Gérard	*d(* *Expand*		W [AC] W [ABC] W [ABC]	Change le pas	¤	HOME (2)
Michel	*d(* *STO* *Solve* (2)	* SD(2)	Courbes de f et df Courbe de f FI [A] Courbes de f et df		¤ (2)	HOME (2)
Serge	*d(* *Define* *Graph* *Solve* (2)		Courbes de f et df *Trace*	¤ Change de pas (2)	¤ (3)	
Vincent	*d(* *Define* *Zeros*	*	Courbes de f et df ¤		¤ (2)	HOME (2) TABLE

Applications et ostensifs utilisés pour l'étude du sens de variation

Techniques et stratégies des élèves :

Anne :

- Calcul de f' dans HOME
- Tracé de f et g dans la même fenêtre
- Lecture graphique à l'œil nu sur la courbe de g, pour trouver les racines et le signe de f'.

Charles :

- Calcul de f' dans HOME
- Parcours de TABLE
- Recopie d'un tableau de valeurs de f(x) en P/C, pour des x choisis en parcourant TABLE, dans lequel il rajoute des flèches
- Tracé de la courbe de f' pour le contrôle du tableau
- Changement de fenêtre dans WINDOW

Francis :

- Calcul de f' dans HOME
- Factorisation de f' (non utilisée ultérieurement)
- Tracé de la courbe représentative de f'
- Recherche des extremums sur la courbe de f (dans GRAPH à l'aide de *F5-Maximum* et *F5-Minimum*)
- Parcours de TABLE pour vérifier que f'(-3)=0
- Contrôle dans GRAPH à l'aide de *ZoomBox* et *Trace* sur la courbe de f' .

Françoise :

- Calcul de f' dans HOME (erreur d'inattention)
- Lecture graphique à l'œil nu pour déterminer les variations de f
- Repérage de l'erreur
- Re-calcul de f' dans HOME
- Recherche des racines de f' en P/C pour cause d'erreur : elle a considéré que la fonction g était un trinôme du second degré .

Remarque : pendant la résolution, Françoise fait deux erreurs : une erreur de recopie (elle a commencé à étudier les variations de x*(x+7) au lieu de celles de f(x)) qui lui est indiquée au bout d'un moment par l'interviewer, et une erreur de reconnaissance de type d'équation (second degré au lieu du troisième degré - voir ci-dessus), ce qui explique le fait qu'elle n'ait pas étudié les variations de f par manque de temps.

Georges :

- Calcul de f' dans HOME
- Recherche des racines de f' à l'aide de *Zeros* dans HOME
- Détermination du signe de f' en prenant un nombre dans chacun des intervalles délimités par les racines de f' et en calculant la valeur de la dérivée en ce point dans HOME
- Tracé de la courbe de f' pour le contrôle du signe, avec utilisation de *Trace, ZoomOut* et *ZoomBox*
- Repérage de la singularité et contrôle dans GRAPH puis dans HOME (calcul de f(0))

Gérard :

- Calcul de f' dans HOME
- Transformation de l'expression de f' dans HOME avec *Expand*
- Essai de détermination du signe de f' (alternance de signe, par analogie formelle avec un trinôme du 2nd degré)
- Parcours de TABLE après changement du pas dans TblSet
- Changements de fenêtre dans WINDOW se basant sur des informations recueillies dans TABLE

Lecture graphique pour contrôler les variations

Michel :

- Calcul de f' dans HOME
- Tracé de la courbe de f'
- Recherche des racines de f' à l'aide de *Solve* dans HOME
- Recherche du signe de f' :

  * en cherchant une valeur pour laquelle f' est positif par :

  Solve(f'(x) = 2, x), ce qui donne : x = 1,11562

  * en déduisant que sur [1 , + ∞ [, f'(x) est positif .

  * en complétant alors le tableau de variation en alternant les signes, dans les intervalles déterminés par les zéros de f'.
- Parcours de TABLE pour le contrôle du signe de f'.

Serge :

- Calcul de f' dans HOME
- Parcours de TABLE avec deux changements du pas dans TblSet .
- Lecture graphique sur la courbe de f avec *Trace*
- Détermination des racines de f dans HOME à l'aide de *Solve* à cause d'une confusion entre f et f '

Intervention de l'interviewer

- Tracé de la courbe de f'
- Détermination des racines de f' dans HOME à l'aide de *Solve*

Vincent :

- Calcul de f' dans HOME
- Développement de l'expression de f en P/C
- Re-calcul de f' en P/C

Temps d'arrêt dû au fait que les expressions de f ' ne sont pas les mêmes en p/c et à la TI92. L'interviewer intervient.

- Recherche des racines de f' à l'aide de *Zeros*
- Parcours de TABLE pour l'étude du signe
- Tracé de la courbe de f' pour le contrôle du signe
- Repérage de la singularité lors du parcours de TABLE.

Analyse :

Pour définir la fonction, tous les élèves ont utilisé *Define* dans l'application HOME, à part Francis et Charles qui la définissent directement dans Y=, ceci peut-être dans le but d'aller plus vite dans la résolution. Ainsi, pour presque tous les élèves, l'utilisation systématique de *Define*, prise en charge par l'enseignante semble déjà acquise (cf. *Dimension institutionnelle-Observation1*). Ils adoptent donc ici la technique standard. Par ailleurs, Michel utilise *Expand* pour développer l'expression de la fonction. Charles est le seul à ne pas avoir mis le signe * pour le produit de x par (x+7) ce qui aurait pu bloquer son travail si l'interviewer n'était pas intervenu. Pour faire tracer la courbe tous les élèves redéfinissent la fonction dans Y=, avant de la faire tracer dans GRAPH, sauf Serge qui utilise la commande *Graph* dans HOME. Cette possibilité avait en effet été présentée en classe (Cf. *Observation 1-DimInst*) mais peu utilisée. Par ailleurs, et à l'exception de Vincent et Michel, ils semblent considérer que la courbe tracée en *ZoomDec* est incomplète. Ce qui explique leur recours à l'application WINDOW pour re-cadrer. Cependant, deux élèves seulement ont réussi à obtenir la totalité de la courbe : Françoise, qui y est parvenue après deux heureux changements de fenêtre (en effet, elle ne doit sa réussite qu'à une démarche à tâtons), et Georges dont l'utilisation successive et efficace de *ZoomOut* et de *ZoomBox* témoigne d'un niveau d'instrumentation de la TI92 en avance par rapport à celui de ses camarades.

Sans doute pour des raisons de contrat didactique implicite, ou peut-être en se basant sur certains critères perceptifs tels que ceux présentés par [Chauvat, 1998], presque tous les élèves ont réagi à la représentation graphique de la fonction f dans la fenêtre initiale (en *ZoomDec*) . Ils ont eu recours au changement de fenêtre dans WINDOW avec des réussites très partielles (excepté Georges). Leurs stratégies de " pêche " (cf. [Artigue, 1997]) ne sont visiblement pas dans ce domaine réellement efficaces et la stratégie alternative décrite dans l'analyse a priori n'est manifestement pas disponible.

Pour étudier le sens de variation de la fonction f, les élèves, dans leur majorité, n'utilisent pas la stratégie standard. Pourtant tous sauf Anne, Charles et Gérard vont utiliser l'application HOME pour faire calculer les zéros de la dérivée ou même la faire factoriser. Mais seuls Georges et Michel vont exploiter cette information, en se basant sur le théorème-en-acte : « la dérivée change de signe à chacun de ses zéros et, entre deux zéros, elle est de signe constant ». Si l'on excepte le cas particulier de Françoise, les autres élèves vont soit directement, soit après détermination des zéros de f', utiliser des méthodes basées sur l'utilisation de l'application GRAPH ou de l'application TABLE ou des deux. On notera l'utilisation par Francis des commandes *F5-Maximum* et *F5-Minimum* de l'application GRAPH, à peine introduites en classe (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 2*), le tracé par Anne de la représentation graphique de la fonction correspondant au numérateur de la dérivée, pour lire graphiquement son signe, l'utilisation par Vincent à la fois du graphe de f' et du tableau de valeurs de f'. On notera également que Georges et Michel vont eux aussi recourir à l'application GRAPH (tracé de f') mais pour contrôler le travail effectué dans l'application HOME, et que Michel effectuera de plus un contrôle dans l'application TABLE. Par ailleurs, les observations de résolution laissent penser que l'utilisation des deux applications GRAPH et TABLE relève souvent davantage du tâtonnement que d'une stratégie stable.

Nous remarquons donc, que presque tous les élèves ont opté pour des stratégies et techniques de type calculatrice graphique qui reposent exclusivement sur les applications GRAPH et TABLE sans référence à l'expression de la fonction et avec une utilisation très limitée de l'application HOME.

Notons enfin la fragilité des connaissances mathématiques que la majorité d'entre eux pouvait avoir à cette époque de l'année (concernant l'étude de variation) et qui semble ici faire obstacle à une bonne instrumentation de la TI92 .

Prise en compte de la singularité en x=0 :

Georges prend conscience de la singularité en cherchant la valeur de la dérivée en 0. la TI renvoie -∞. Il regarde alors l'expression de la fonction, passe à l'application GRAPH, se déplace le long du graphe de f par *Trace*, puis repasse dans HOME, demande la valeur de f(0). la TI renvoie "*undef*". Georges repasse alors en P/C et écrit sur sa feuille « f(x) pas définie en 0, définie sur IR* », puis rajoute au tableau de variation déjà tracé, la valeur 0 et la double barre. Françoise, lorsqu'elle note la valeur de la dérivée trouvée à la machine sur sa feuille, rajoute x≠0. Ensuite elle perdra beaucoup de temps dans l'étude du signe et lorsqu'elle ébauchera un tableau de variation, elle n'y inclura pas la valeur 0. Vincent, Charles, Michel, Serge et Gérard découvrent la singularité presque accidentellement en parcourant TABLE. Anne et Francis, quant à eux, ne la remarqueront pas de façon autonome. Mais même si la majorité des élèves a repéré la singularité, il n'y a que Georges et Vincent qui ont intégré cette information à leur tableau de variation. Il est clair qu'à ce moment là de l'année, les élèves ne sont pas sensibles à l'existence d'une singularité à la seule vision de l'expression de la fonction. De plus, même si la singularité est repérée, elle n'est pas pour autant intégrée au tableau de variation, en dépit des contradictions que cela peut engendrer : la fonction est décroissante sur [-3/2,1] et la valeur en 1 est supérieure à la valeur en -3/2, par exemple.

Le temps de discussion ensuite est visiblement trop court pour permettre de lever les contradictions, lorsque l'interviewer aide les élèves à en prendre conscience.

Partie 4 : "Sais-tu avec ta machine faire . . ."

Nous donnons sous forme de tableau les résultats de cette partie, après avoir précisé pour chaque question la ou les réponses attendues. Nous n'avons pas pris en compte les deux premières questions (déplacement dans l'écran, recopie sur la ligne de commande), les manipulations des élèves pendant la phase de travail autonome nous ayant montré qu'elles correspondaient à des savoir-faire et techniques partagés par tous.

Question 3 : Comment effacer l'écran Home ? Réponse : F1-8 (Clear Home)

Question 3' : Comment effacer la mémoire ? Réponse : par MEM - F1 Reset ou VAR-LINK-F1-Delete pour effacer des fichiers précis.

Question 4 : Comment donner la valeur 5 à la variable x ? Réponse : 5 STO x

Question 5 : Comment libérer ensuite la variable x ? Réponse : F4-Delvarx

Question 6 : Comment libérer toutes les variables ? Réponse : F6

Question 7 : Comment obtenir un résultat sous forme approchée ? Réponse : en appuyant sur ENTER si on est en mode exact ou automatique, ENTER sinon.

Question 8 : Comment changer d'application ? Réponse : par APPS ou par ♦ pour les applications accessibles par cette touche : HOME, Y=, GRAPH, TABLE, TblSet

Question 9 : Comment partager l'écran en 2 ? Réponse : par MODE-F2-SplitScreen et appuyer deux fois sur la touche ENTER

Question 9' : Comment passer d'une sous-fenêtre à une autre ? Réponse : par 2nd APPS

Question 10 : Comment créer un nouveau répertoire ? Réponse : par F4-B (NewFold)

Question 11 : Comment fixer le répertoire de travail ? Réponse : par Mode - Current Folder

Question 12 : Comment sauver son travail dans un fichier ? Réponse : par F1-2 (Save)

Question 13 : Comment ouvrir un fichier existant ? Réponse : par APPS-9 (Open)

Dans le tableau ci-après les cases vides signifient que la réponse standard a été donnée. Quand cette réponse standard est tout de même inscrite, c'est que l'élève a eu besoin de consulter la machine.

	Effacer l'écran HOME 3	Effacer La mémoire 3'	Donner la valeur 5 à la var. x 4	Libérer ensuite la var. x 5	Libérer toutes les variables 6	Résultat sous forme approchée 7	Changer d'applicat. 8	Partager l'écran en deux 9	Passer d'une sous-fenêtre à une autre 9'	Créer un nouveau répertoire 10	Fixer le répertoire de travail 11	Sauver dans un fichier 12	Ouvrir un fichier existant 13
Anne	*F1-8*	*F6*		*F1-7*			♦*HOME*		Ne sait pas	*APPS*	Ne sait pas		*APPS-9New*
Charles		*VAR-LINK*		Ne sait pas					?	?	?		
Francis		*F6*		Ne sait pas				*MODE- F2 SplitScreen*		Ne sait pas			*VAR-LINK* se place sur fichier puis *ENTER*
Françoise		Ne sait pas	Ne sait pas	Ne sait pas	Ne sait pas				Ne sait pas	*APPS-9New*			*APPS-9Open*
Georges		Ne sait pas		0 *STO* x ou x *STO* x ou *DelVar* x		♦ *ENTER* ou dans *MODE*		*MODE-F2 SplitScreen*	Ne sait pas	*VAR-LINK F1-5* ou *F4-B*			
Gérard				*DelVar* x						*F4-B* ou *APPS-9New*		Ne sait pas	*APPS-9Open*
Michel		Ne sait pas		*F6*		*F2-5*	*MODE - Current Folder* puis ♦ *HOME*	Ne sait pas		Ne sait pas			*MODE Current Folder*
Serge							*APPS-HOME* OU ♦ *HOME*		Ne sait pas				
Vincent		*F6*		*F6*			Ne sait pas						Ne sait pas

Réponses à la partie 4 de l'entretien 1

Comme nous pouvons le voir, la plupart des questions obtiennent des taux de réussite très importants, la plupart des élèves n'ayant d'ailleurs pas à consulter la machine pour les fournir. C'est le cas pour les questions : 3,4, 6, 7, 9, 11 et 12 et, un petit peu moins pour la question 8. Les questions qui ont été moins réussies concernent toutes des fonctions encore peu utilisées comme créer un nouveau répertoire, ouvrir un fichier existant, voire mentionnées mais non utilisées comme effacer la mémoire, passer d'une sous-fenêtre à une autre.

Conclusion :

Même si les élèves n'ont pas eu beaucoup de temps pour se familiariser avec la TI92, nous pouvons déjà remarquer certaines régularités et énoncer quelques résultats à la suite de ce premier entretien :

- Tout d'abord, une prise en mains de la machine par tous les élèves, y compris ceux qui a priori pouvaient paraître les plus réticents, mais avec des différences dans l'instrumentation déjà sensibles et qui ne reflètent pas complètement les seules différences de rapport aux machines ou les seules différences de niveau mathématique, mais intègrent sans aucun doute les deux dimensions à la fois.
- Une utilisation à la maison peu intensive et étroitement liée au travail scolaire en cours.
- Une utilisation en contrôle à des fins de vérification principalement, ce qui nous renseigne sur le volet de l'instrumentalisation qu'est le statut de la machine (cf. *Partie Théorique*) et cela dans le cas d'un contrat précis. Cependant, cette fonction de vérification n'est pas toujours efficacement gérée, en témoigne la non prise en compte d'incohérences entre les résultats-machine et les résultats-p/c.
- Une opinion positive mais réaliste sur l'aide effectivement apportée dans ce contexte par la mise à disposition de la TI92.
- Une instrumentation pour l'étude des fonctions qui est encore très limitée sauf exception (cf. Georges et Michel). Si les élèves savent utiliser l'application HOME pour définir une fonction, calculer sa dérivée, trouver ses zéros ou la factoriser, il s'agit là de ce que nous serions tentés de qualifier d'instrumentation de niveau 0 : on connaît des commandes et on sait les exploiter mathématiquement dans la mesure où elles donnent directement la réponse demandée. Autrement dit, les seules connaissances-machine requises sont celles

qui concernent la syntaxe, à savoir celles de niveau 1 (cf. *Typologie des contraintes*). En particulier, il semble bien que la plupart des élèves n'aient pas réellement perçu l'intérêt de la recherche des zéros de la dérivée ou même de la factorisation de son expression algébrique et, dans une situation où cette recherche ne s'inscrit pas dans la réalisation d'un algorithme connu, ils ne savent pas exploiter les informations fournies par la machine. Ceci corrobore l'hypothèse de l'importance du rôle des connaissances mathématiques dans l'utilisation de la machine. Mais d'autres facteurs influent également sur cette utilisation. En effet, les techniques de type calculatrices graphiques qui se sont mises en place avant l'introduction des dérivées pour l'étude des fonctions : exploitation des tracés graphiques et de l'ostensif *Trace*, exploitation des tables de valeur, sont des techniques qui restent encore très dominantes. On notera d'ailleurs leur extension au niveau de la fonction dérivée f' qui sous-tend la plupart des stratégies développées par les élèves. Quant à la perturbation causée par l'introduction d'une singularité, elle n'est pas non plus facilement surmontée par les élèves. Visiblement, ils notent la non-définition mais ne perçoivent pas ses répercussions possibles sur les variations de la fonction et ne disposent pas de techniques pour les intégrer, par exemple au niveau du tableau de variation. On voit bien une fois de plus, à travers cette perturbation volontairement introduite, jusqu'à quel point l'instrumentation efficace de la TI92 est dépendante des connaissances mathématiques élaborées par les élèves.

- En ce qui concerne la gestion des représentations graphiques, il apparaît que la plupart des élèves ne disposent pas de moyens efficaces pour obtenir un tracé satisfaisant si la fenêtre initiale ne le fournit pas. Ils procèdent par essais et erreurs de petite amplitude, ce qui ne change pas fondamentalement la situation dans le cas présent. Cette gestion des graphiques reste dans le cadre des deux applications GRAPH et WINDOW et ne met pas en jeu les applications HOME et TABLE, dont la seconde en particulier peut fournir des moyens efficaces de piloter les changements de fenêtre de représentation. Ainsi, les changements effectués dans WINDOW, qui se situent donc au niveau 2 des connaissances-machine, ne sont efficaces que lorsqu'ils sont sous-tendus par des connaissances mathématiques; ce qui se traduirait ici par la mobilisation de HOME et/ou TABLE.

Tout ce qui précède doit, bien entendu, être relativisé aux conditions de l'entretien et au faible temps dont ont disposé les élèves pour effectuer la tâche demandée. Nous pouvons cependant remarquer que c'est une tâche qui est loin d'être devenue routinière pour les élèves, même en excluant la question de la singularité, et que la possession d'une TI92 dont on connaît les commandes susceptibles d'intervenir ici ne diminue pas substantiellement sa difficulté.

Pour conclure, nous pouvons constater que, d'une manière globale, l'instrumentation de la TI92 (pour la tâche en question) se caractérise par une utilisation de niveau 0 où malgré la maîtrise des contraintes syntaxiques, l'articulation entre les applications est loin d'être prise en compte. Par ailleurs, concernant l'instrumentalisation, l'application GRAPH possède (dans la majorité des cas) un statut d'outil de résolution où elle a un rôle central dans le travail des élèves avec une instrumentation encore empreinte de l'environnement calculatrice graphique dans laquelle le principal ostensif mis en œuvre était *Trace* et la technique essentielle le changement manuel de fenêtres dans WINDOW. Par ailleurs, concernant le volet transformation de la machine, presque tous les élèves n'ont pas implémenté de programme ni organisé les dossiers dans la mémoire de la machine. Ceci nous semble dû essentiellement à la présence dans l'application formelle d'ostensifs plus puissants que ne pourraient l'être les programmes à implémenter (tels que l'ostensif *Zeros* par exemple, qui rend caduc tout programme pour résoudre une équation du second degré). Enfin, nous avons remarqué certains phénomènes semblant caractériser l'état de l'évolution des processus d'instrumentation lors de cet entretien :

- Un phénomène d'*oscillation* : où l'élève oscille entre plusieurs techniques et stratégies. Tel est le cas par exemple de Serge qui pour déterminer les zéros de la dérivée, commence par parcourir TABLE puis fait une lecture graphique à l'aide de *Trace* avant d'opter pour l'utilisation de la commande *Solve* dans HOME.
- Un phénomène de *sur-vérification* : où pour un même résultat, l'élève multiplie les vérifications en utilisant la diversité des moyens fournis par la machine. Le cas de Gérard illustre bien ce phénomène : après avoir déterminé le signe de f ' en p/c, il vérifie son résultat en parcourant TABLE puis re-vérifie en faisant tracer le graphe de la fonction dans plusieurs fenêtres.
- Un phénomène de *zapping* : où l'élève zappe entre des commandes dans une stratégie de "pêche", sans que l'on puisse identifier un projet cohérent ; ce qui rejoint en quelque sorte le schème de "tir aléatoire" mis en évidence par Trouche [Trouche, 1996]. Nous avons observé ce phénomène chez Francis par exemple, qui a utilisé la commande *Factor* sans l'intégrer dans sa stratégie.

Entretien 2 :

Cet entretien a été passé au retour des vacances de Pâques, après le devoir commun n°5 (cf. Annexe 4) qui portait sur la fonction f définie par l'expression : $f(x) = \frac{x^3+3x^2+2}{x^3+1}$ pour la partie d'analyse.

Scénario de l'entretien :

Cet entretien, comme le précédent, est organisé en quatre parties et a pour objectif de fournir des éléments, en complément du questionnaire 2, sur le rapport personnel des élèves à la TI92 et son évolution. Ainsi, dans les *Partie 1* et *Partie 3*, c'est la composante "transformation de la machine" qui est essentiellement visée, alors que dans les deux autres parties c'est plutôt l'instrumentation et le volet "statut de la machine" (l'autre composante de l'instrumentalisation) qui sont au centre des questionnements, et cela dans le cadre de deux contrats didactiques différents (cf. *Entretien 1*).

Partie 1 :

Nous demandons à l'élève : « Peux-tu montrer ce que tu as mis en mémoire dans la TI92 et comment tu l'as organisé ? ». S'il y avait des activités faites en classe, on demandait lesquelles, s'il y avait des jeux, on demandait s'ils avaient été copiés ou programmés ; s'il y avait des programmes, on demandait des exemples, s'il y avait des formules de maths ou d'autres disciplines, on demandait lesquelles. Il était prévu le cas échéant de récupérer les fichiers correspondants, avec l'accord de l'élève bien sûr.

Cette partie concernait donc l'évolution du volet de l'instrumentalisation qu'est la transformation de machine.

Partie 2 :

Nous demandons à l'élève de préciser, comme dans le premier entretien, comment il avait utilisé la machine pendant le contrôle commun n°5 et on faisait conclure par une appréciation générale sur l'aide éventuelle apportée par la machine.

Partie 3 :

Nous demandions à l'élève s'il avait utilisé sa calculatrice pendant les vacances de Pâques et si oui, combien de temps approximativement et pour quoi faire.

Partie 4 :

Dans cette partie, on demande aux élèves d'étudier la fonction définie par l'expression algébrique : $f(x) = \frac{x^2-2x-14}{x+3}$ suivant un schéma analogue à celui du premier entretien, mais prenant en compte cette fois-ci l'étude des limites de la fonction, les élèves ayant à déterminer eux-mêmes en quels points ils estiment nécessaire de chercher les limites éventuelles de la fonction. La fonction est choisie pour présenter les caractéristiques suivantes:

- Le tracé correspondant à la fenêtre standard ne permet d'obtenir qu'une partie de la courbe représentative de la fonction, celle correspondant à x>3 et le trait de liaison peut alors être pris pour le début de la courbe,
- La fonction admet un maximum et un minimum locaux (en -2 et -4, de valeurs respectives -6 et -10). Ces valeurs sont calculées par la machine qui factorise aussi la dérivée en $\frac{(x+2)(x+4)}{(x+3)^2}$
- La courbe représentative de la fonction admet une asymptote verticale d'équation x=-3, et une asymptote oblique au voisinage de l'infini. La machine calcule les limites à gauche et à droite en -3, à condition de spécifier correctement ces limites, et les limites en $-\infty$ et $+\infty$. Les élèves n'ont pas encore rencontré d'asymptotes obliques, l'existence d'une telle asymptote peut cependant être inférée du tracé graphique dans une fenêtre convenable et justifiée en mettant la fonction sous la forme $\frac{1}{x+3}$ + x-5, ce que permet notamment l'utilisation de la commande *Expand* dans l'application HOME.

- Selon les fenêtres utilisées, le tracé de la fonction a des allures différentes : pour la fenêtre standard, comme nous l'avons dit, il est très incomplet, si l'on effectue un *ZoomFit* à partir de la fenêtre standard soit sur [-10,10], la courbe obtenue a une allure cohérente avec l'étude théorique ; si l'on effectue le même *ZoomFit* à partir de l'intervalle [-5,5], la courbe semble présenter une asymptote horizontale : l'axe des abscisses.

Quelques médiations sont prévues pour la discussion :

- si l'élève n'a pas obtenu un tracé satisfaisant et en est convaincu, lui demander si l'étude théorique ne lui suggère pas une fenêtre plus adaptée,
- si l'élève considère l'asymptote comme une partie de la courbe, faire comparer aux résultats de l'étude algébrique du sens de variation et aux calculs de limites éventuels, et de manière générale, aider à repérer les incohérences éventuelles entre tracé et étude algébrique,
- aider l'élève à explorer la situation au voisinage de l'infini en lui faisant analyser le tracé et en lui proposant éventuellement la forme de f obtenue par utilisation de *Expand.*

Comme pour l'entretien 1, nous allons proposer successivement un type de stratégies standard destiné à servir de référence pour l'analyse, puis des informations détaillées sur les applications et commandes utilisées par les élèves, ainsi que sur les techniques et stratégies mobilisées pour résoudre les trois sous-tâches suivantes :

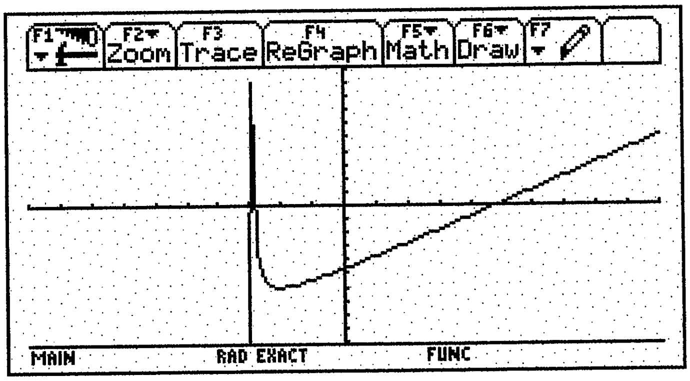
1. étude du sens de variation de f
2. choix des points de calcul de limites
3. détermination des limites aux points choisis.

Nous ferons ensuite une analyse synthétique de ces données.

Type de stratégies a priori :

1. Définir la fonction et tracer la courbe représentative de f

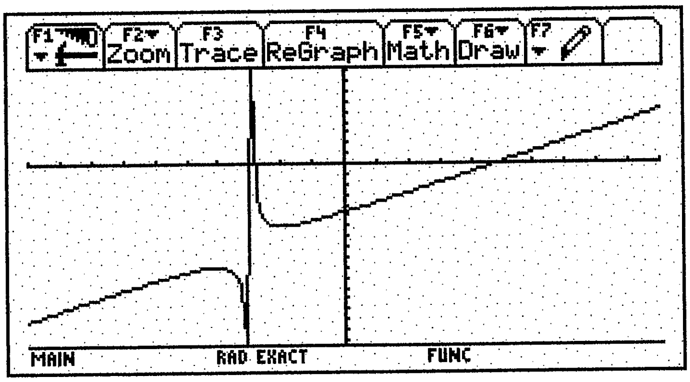
- Définition dans l'application HOME de la fonction, entrée dans Y=, via y1(x)=f(x), passage à l'application GRAPH pour le tracé dans la fenêtre standard. Le tracé obtenu n'est pas satisfaisant.



Compte tenu du fait que les élèves ont déjà utilisé la commande *ZoomFit* plusieurs fois en classe (cf. *Dimension Institutionnelle*) et pris conscience de son intérêt, nous intégrons cette utilisation dans la stratégie standard, au lieu d'utiliser l'application TABLE comme dans le premier entretien pour trouver une fenêtre satisfaisante.

- Application GRAPH ou WINDOW : F2-A *ZoomFit* sur [-10;10]

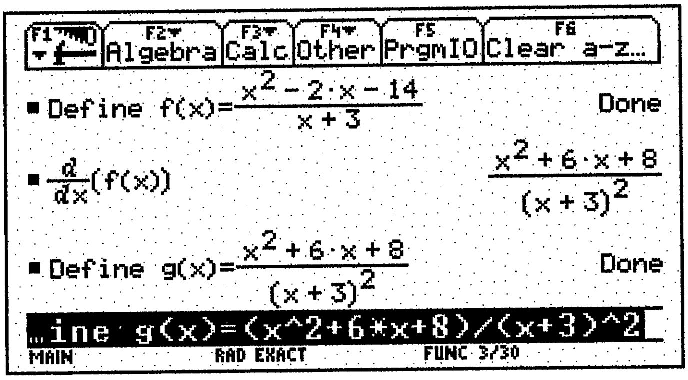
On obtient alors le graphe suivant :



2. Etudier les variations de la fonction f

La stratégie standard est, pour cette question, analogue à celle de l'entretien 1:

- Calcul de la dérivée dans l'application HOME, définition de la dérivée par F4-*Define*, recherche des zéros de la dérivée par l'une des commandes : *Zeros(df(x),x)* , *Factor(df(x),x)* ou *Solve(df(x) = 0,x)*.



Le numérateur étant un polynôme du second degré, la recherche des zéros de la dérivée est tout à fait accessible aux élèves en papier/crayon, mais vu les fortes contraintes de temps de l'entretien et le type de contrat qui prévaut, nous privilégions dans la stratégie standard l'utilisation de la machine. Notre choix pourrait être différent s'il s'agissait de décrire la stratégie standard dans une situation de contrôle où la rédaction de l'élève ne devrait pas conserver de traces de l'utilisation de la TI92.

- L'étude du signe de la dérivée se fait ensuite en P/C et compte tenu des techniques développées à propos des trinômes du second degré, nous optons pour le raisonnement suivant : le signe de f' qui est définie pour $x\neq-3$, est celui de son numérateur, le dénominateur étant toujours positif (carré). Ce numérateur est un trinôme du second degré admettant deux racines -4 et -2, il est donc du signe du coefficient de son terme en x^2, c'est à dire positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

On peut penser que certains élèves court-circuiteront ce raisonnement et utiliseront le théorème en acte déjà rencontré dans l'entretien 1 : "le signe de la dérivée est constant entre deux zéros et change à chaque zéro". Ceci conduit à la stratégie suivante : calculer f'(x) pour un x simple, par exemple ici x=0 qui n'est ni zéro de la dérivée, ni singularité, à la main s'il s'agit de 0, via l'application HOME si la valeur de x choisie est moins simple, et en déduire le signe de f' sur IR-{-3}

On en déduit ensuite, dans les deux cas, le tableau de variation :

x	$-\infty$		-4		-3		-2		$+\infty$
f'(x)		+		−	‖	−		+	
f(x)		↗		↘	‖	↘		↗	

Pour trouver les valeurs des extremums, on utilise l'application HOME .

- Application HOME : f(-4) - f(-2)

3. Etudier les limites de f

La seule singularité étant en x=-3, on a donc à déterminer les limites éventuelles en -3, en -∞ et +∞. Dans la stratégie standard, nous prévoyons l'utilisation de la commande *limit* de l'application HOME, avec pour le cas de x=-3, le passage éventuel par la commande simple de limite qui renverra le résultat *undef*.

- Application HOME :

limit (f(x),x,-3)	*undef*
limit(f(x),x,-3,1)	*-∞*
limit(f(x),x,-3,-1)	*+∞*
limit(f(x),x,-∞)	*-∞*
limit(f(x),x,+∞)	*+∞*

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation x=-3. A l'infini, on peut penser que, sans sollicitation particulière, les élèves n'iront pas plus loin.

Résultats et analyse :

Comme pour l'entretien 1, nous rendrons compte partie par partie, avant de conclure.

Partie 1 : Gestion de la mémoire

Anne :

Elle a rentré en mémoire beaucoup de fichiers sans créer de répertoires. Ils concernent les maths (calcul du discriminant, exercices, énoncés de théorèmes, activités faites en classe). Elle ne programme pas elle-même. Elle a également copié un jeu.

Charles :

Il n'a rien sauvegardé en dehors des sauvegardes faites en classe. En 3D, il a reproduit un graphique du manuel pour s'amuser et l'a gardé. Dans le questionnaire 2, il avait coché les rubriques : travaux de classe et formules de maths.

Francis :

Il n'a rentré que ce qui a été fait en classe et ne compte pas s'en servir. Il déclare préférer utiliser sa propre calculatrice qui est celle qu'il aura l'an prochain.

Françoise :

Elle a entré deux fichiers : dans le premier, elle a écrit l'énoncé d'un théorème, dans le second une figure pour montrer à une copine comment la machine fonctionnait.

Georges :

Il fait faire une visite guidée de sa machine, il a sauvegardé certains TP et des macros ainsi que des dessins qu'il a réalisés tout seul. Il dispose de trois répertoires : main, bary (pour barycentre) et documents (pour les dessins géométriques). Main est rempli en vrac de formules, par exemple de somme et différence de cubes, de formules de trigonométrie, de fichiers correspondant à des activités faites en classe, de travaux personnels sur axes et coordonnées. Il a entré pour la physique les masses molaires de différents corps et le tableau de Mendeleiev ainsi que divers renseignements. Il a transcrit un programme de calcul du discriminant d'une équation du second degré qu'il avait sur son ancienne calculatrice. Il n'a pas mis de jeux en mémoire.

Gérard :

Il a créé un répertoire « jeu » où il a programmé un jeu. Dans le répertoire Main, il a un programme pour le calcul du discriminant, un fichier avec les codes des touches, des formules de maths et de physique. Il ne garde pas ce qui est fait en classe.

Michel :

Il n'y a pas de répertoire créés, il ne garde pas systématiquement ce qui est fait en cours. Il n'avait pas rempli la rubrique correspondante du questionnaire 2.

Serge :

Il avait rentré des jeux et des programmes de maths (calcul du discriminant), des macros de barycentre, des formules de maths et de physique puis il a tout effacé car il ne les utilisait pas. Il n'est pas sûr de remettre des choses en mémoire.

Vincent :

Il a rentré en mémoire des fichiers correspondant aux différentes rubriques proposées dans le questionnaire 2 mais ne programme pas. Sa machine contient des jeux qu'il a copiés.

Ces réponses attestent de l'existence de décalages certains entre les élèves mais aussi d'un niveau d'instrumentalisation (concernant plus précisément le volet "transformation de la machine") moyen limité. En particulier, les élèves, à deux exceptions près, n'ont créé aucun répertoire pour structurer la mémoire de leur machine. Les programmes mathématiques rentrés, quand il y en a, se résument au programme de calcul du discriminant d'une équation du second degré. L'entrée de programmes de jeux n'est pas non plus majoritaire. Peut-être est-ce une conséquence du fait qu'il ne s'agit pas de leur calculatrice propre et qu'ils ne pourront pas la garder après l'expérimentation.

Partie 2 : Utilisation en devoir commun

Dans le problème d'analyse de ce devoir, la TI92 pouvait essentiellement aider à produire ou contrôler la factorisation de g(x) (question A2), à calculer et vérifier les limites en -1 et $+\infty$, la dérivée, à prévoir ou contrôler l'allure de la courbe représentative de f (Cf) et sa position par rapport aux droites D et Δ', enfin à trouver les coordonnées de points de Cf. Elle compliquait plus qu'elle n'aidait la résolution de l'équation f(x)=2. Une fois reconnue l'équation de la tangente horizontale, la factorisation de f(x)-2 pouvait aider à étudier la position de la tangente par rapport à la courbe mais le tableau de variation déjà construit fournissait toutes les informations nécessaires à la résolution.

Nous ne disposons pas des copies de ce contrôle et ne connaissons que la note globale concernant les deux parties : analyse et géométrie. La moyenne de la classe est ici de 12.2. Nous ne pouvons donc pas confronter les déclarations des élèves à leurs productions écrites comme nous l'avions fait pour le premier entretien.

Anne (note 12.5) :

Elle a d'abord défini la fonction et l'a faite tracer. Elle a effectué la factorisation et le calcul de la dérivée d'abord à la machine, en revanche elle a effectué les deux calculs de limite à la main et a ensuite vérifié avec la TI. Elle a utilisé l'application Table à la fois pour le tracé de f et pour celui de Δ dit-elle.

Charles (10.5) :

Il a fait peu d'analyse car il a commencé par la géométrie. En analyse, il a commencé par la partie B car il sentait qu'il savait faire. Il a utilisé la calculatrice pour trouver la limite en -1, ensuite il a fait le b) à la main et s'est arrêté là.

Francis (17.5) :

Il n'a pas du tout utilisé sa calculatrice.

Françoise (12.5) :

Elle dit s'être beaucoup servie de la machine. Elle a d'abord fait tracer la courbe, ensuite elle a utilisé la machine pour factoriser g, pour vérifier les calculs de limites, de dérivée et elle a aussi utilisé Table pour tracer Cf.

Georges (17.5) :

Il a effectué la factorisation et les calculs de limites d'abord à la machine et ensuite à la main « pour bien détailler, bien rédiger ». Il a utilisé aussi la TI pour vérifier le calcul de la dérivée et l'application Table pour aider le tracé.

Gérard (14.5) :

Il a d'abord défini la fonction sans la faire tracer et a utilisé la machine pour vérifier la factorisation de g. Il l'a aussi utilisée pour vérifier les calculs de limites et de dérivée. Il a résolu l'équation à la machine et enfin a utilisé Table pour tracer Cf.

Michel (16.5) :

Il n'a utilisé la machine que pour vérifier (limites, signe de f', tracé de Cf).

Serge (14.5) :

Il a d'abord fait tracer la courbe puis a utilisé la calculatrice pour vérifier la factorisation, la limite en 1, les asymptotes et le calcul de la dérivée.

Vincent (13.5) :

Il a d'abord défini la fonction sans la faire tracer. Il a fait la factorisation et le calcul de la limite en -1 d'abord à la machine, le calcul de la limite en $\propto$ d'abord à la main. Pour contrôler le signe de f', il s'est servi de *TABLE,* il s'est aussi servi de Table et du tracé-TI92 pour tracer Cf en p/c.

La TI92 a donc, ici encore, une fonction de vérification essentiellement. Visiblement les élèves ne cherchent pas à l'utiliser systématiquement dans toutes les questions et par exemple un seul d'entre eux va résoudre l'équation f(x)=2 avec la machine. Suivant les questions en revanche, l'ordre : calcul machine - calcul papier/crayon est variable et ceci indépendamment du niveau mathématique des élèves. L'application Table est presque toujours utilisée pour soutenir le tracé. Elle résiste chez Vincent comme outil de contrôle du signe de la dérivée. Un élève enfin, Francis, n'utilise pas du tout la machine et Michel dans l'entretien marque bien qu'il ne l'a utilisée que pour vérifier, ce qui est tout à fait conforme à ses réponses aux questionnaires.
Cette partie nous a donc surtout renseigné sur le statut que peut avoir la TI92 (et ses différentes applications) quand le contrat est du type "devoir commun".

Partie 3 : Utilisation pendant les vacances

Elle est faible : Michel, Charles, Françoise et Vincent n'ont pas du tout utilisé la machine, Serge a juste pris la machine pour faire le ménage et tout effacer. Seuls Georges, Francis et Gérard déclarent l'avoir utilisée un peu :

- Georges, pour un exercice de trigonométrie qu'il n'arrivait pas à faire à la main : montrer que l'équation cosx-x=0 admet une solution dans IR. La machine lui a donné une solution 0.789, dit-il, mais il ne sait pas comment la retrouver à la main.
- Francis, pour faire les exercices.
- Gérard, pour faire les exercices et programmer un jeu.

Ces données confirment donc celles issues du premier entretien : la machine est avant tout liée à la réalisation du travail scolaire en mathématiques, encore moins utilisée pendant les périodes de vacances que dans le temps scolaire usuel.

Partie 4 : Etude de fonction

Applications et commandes :

Par souci de clarté, toutes les informations de cette rubrique relatives à chaque élève ont été réunies en tableaux.

Légende :

(n) Utilisation n fois. Dans la colonne GRAPH/WINDOW, (n) désigne le nombre de fois où la fenêtre a été modifiée

* L'élève définit la fonction dérivée dans Y=

¤ L'élève consulte l'application

Cal. Calcul numérique avec les opérations de base

SD Sélection ou Désélection dans Y=

FI Fenêtre Initiale

W Changement "manuel" de fenêtre

g Fonction correspondant au numérateur de la dérivée f '

1. Définir la fonction et tracer la courbe représentative de f

	HOME	Y=	GRAPH WINDOW	TblSet	TABLE	P/C
Anne	*Define*	*	*ZoomStd* puis *ZoomFit* sur [-5,5]			
Charles		*	FI (*ZoomStd*)			
Francis		*	FI (*ZoomDec*) puis *ZoomFit*			
Françoise	*Define*	*	*ZoomStd*			

Georges	*Define*	*	FI (*ZoomStd*) puis *ZoomFit*			
Gérard	*Define*	*	FI (*ZoomStd*) puis *ZoomFit*			
Michel	*Define*	*	FI (*ZoomStd*)		¤	
Serge	*Define*	*	FI (*ZoomStd*) ¤	Change de pas	¤ (3)	TABLE
Vincent	*Define*	*	FI (*ZoomDec)* puis *ZoomStd*			

Commandes utilisées pour la définition et le tracé

Pour la bonne reconstitution à partir du tableau, précisons d'une part que Michel s'arrête sur la fenêtre standard, malgré l'utilisation de *TABLE,* d'autre part que Serge a un comportement relativement complexe. En effet, il obtient d'abord le tracé standard puis passe à l'application *TABLE,* fait défiler à partir de x=-6 (valeur par défaut résultant du dernier entretien, non modifiée par l'interviewer), repasse au tracé standard, puis de nouveau à *TABLE,* écrit « f(x) n'est pas définie pour x=-3 », passe dans TblSet pour modifier la valeur initiale : -3 et le pas : 0.1, explore dans Table le voisinage de -3 puis s'arrête et passe à HOME pour le calcul de la dérivée.

On note une évolution évidente depuis le premier entretien, liée à l'intégration de la commande *ZoomFit* : quatre élèves suivent en effet cette fois la stratégie standard décrite plus haut, tandis que cinq s'arrêtent sur la fenêtre standard. On ne note pas non plus d'essais à tâtons de modification de la fenêtre. Deux élèves ont recours à l'application TABLE mais visiblement n'en tirent pas parti au niveau graphique, un élève améliore son tracé en passant de la représentation en fenêtre *ZoomDec* à la représentation en fenêtre *ZoomStd* et s'arrête là, les deux autres passent tout de suite au calcul de la dérivée.

2 et 3. Etudier les variations et les limites de la fonction f

	HOME	**Y=**	**GRAPH WINDOW**	**TblSet**	**TABLE**	**P/C**

Anne	*d(* *Define* g *Zeros* *limit* (3) Cal. f(-4) f (-2)		¤ (4) W		¤	GRAPH (2) HOME (2)
Charles	*Define* *d(* *Cal.*(2)		¤ (3)			HOME (3) GRAPH (2)
Francis	*d(* *Define* df(-4) df(-2) df(-3)	* SD ¤ (2)	Courbes de f et de df Courbe de df			HOME GRAPH
Francis (Après Clear a-z)	*Define* (2) *d(* *limit* (7)	* (2) SD	Courbes de f et de df Courbe de f *Trace*			¤ HOME
Françoise	*d(* Cal. (2) *limit* (5)			¤	¤	HOME (5)
Georges	*Define d(* *Zeros* df(0) df(10) f (-4),f(-2) f(-10) df(-10) *limit* (4) df(-3) f(-3) ¤		¤ (3) *Trace*			HOME (5) GRAPH

Gérard	*d(* Cal. (3) f(-4) f (-2) *limit* (5)		¤ (2)		¤	HOME (5) GRAPH (2)
Michel	*d(* Cal. *Define* g *Solve* g(-3) *limit* (3)		¤ (3)		¤ (2)	HOME (5) TABLE
Serge	*d(* *Define* *Zeros* df(-3) *limit* (5)	* (2)	Courbes de f et df ¤ (3) *ZoomFit* Droites y=-10 et y=-6 W			HOME (7) GRAPH
Vincent	*d(* ¤ f(-3) f(-4) f (2) ♦≈ *limit* (3)					HOME (3)

Utilisation des commandes dans l'étude du sens de variation

Remarque : Au cours de la résolution de cette question, Francis a utilisé la commande *Clear a-z* (pour libérer toutes les variables) avant de reprendre la question, ce qui explique la présence des deux cases le concernant dans le tableau ci-dessus.

Techniques et stratégies des élèves :

Anne :

Calcul standard de la dérivée dans HOME, définition du numérateur comme fonction g(x), recherche de ses zéros, recherche des limites en -∝, +∝ et 0.

Passage à GRAPH et tracé de la fonction f

Passage en P/C et début de rédaction; Expression de la dérivée. signe du dénominateur, calcul du discriminant puis s'arrête car elle ne sait plus comment calculer les racines. Au bout d'un moment, aide de l'interviewer et elle retrouve les racines données par la machine, ce qu'elle constate. Début du tableau de variation avec mention du signe de f' ; -3 n'apparaît pas.

Passage à GRAPH, regarde le tracé puis met les flèches sur le tableau de variation.

Calcul en HOME de f(-4) et f(-2), ajout des valeurs au tableau de variation.

Passage en GRAPH, puis en WINDOW, et diminue la valeur de ymin : ymin=-30 (ymax=55).

Elle remarque alors que le tracé ne correspond pas au tableau de variation

Passage à TABLE : en la parcourant, elle repère la singularité en -3.

Fin du temps d'entretien.

Dans la discussion, Anne précise qu'elle a calculé les racines à la main car, de toute façon, en contrôle il faut faire le détail et qu'à la fin, pour choisir le nouveau ymin elle a regardé les valeurs données par le *ZoomFit* sur [-5,5] puis a mis un peu plus parce qu'on ne voyait pas très bien en-dessous.

Charles :

Calcul standard de la dérivée. Note la dérivée et marque : signe de x^2+6x+8 et signe de $(x+3)^2$.

Passe en GRAPH et regarde le graphe (fenêtre standard).

Lit les limites sur le graphe en considérant la liaison comme le début de la courbe et écrit les limites trouvées : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-3}f(x)=+\infty$.

Calcul du discriminant et des expressions des racines à la main, fin du calcul numérique à la machine.

Trace un tableau de signe pour trouver le signe de f' mais traite $(x+3)^2$ comme x+3.

Regarde ensuite le tracé et son tableau de signe.

Fin du temps alloué au travail autonome.

Dans la discussion, il dit que le premier tracé lui convenait, qu'il est passé aux limites car il ne voyait pas trop comment faire avec la dérivée. Il confirme qu'il a lu graphiquement les limites, « en + ∞., la courbe est croissante, donc ça tend vers + ∞. ». Pour la limite en -3, il montre le raccord du haut. L'interviewer lui demande si le tracé est conforme au sens de variation trouvé. Il répond oui mais avec un peu d'aide change d'avis. L'interviewer l'aide alors à rectifier l'erreur liée à $(x+3)^2$ pour obtenir un tableau correct puis l'interroge sur le trait vertical du tracé. Charles finit par dire qu'à son avis la courbe doit être en deux parties puisque la fonction n'est pas définie en -3. Il tâtonnera mais ne parviendra pas seul à obtenir la partie de la courbe correspondant à x<-3. Quand on lui montre un graphe satisfaisant, il reconnaît l'asymptote et rectifie les limites en -3, sans être sûr de lui.

Francis :

Calcul standard de la dérivée qui est entrée dans Y= pour être tracée

Zéros et signe de f' déterminés à partir du tracé de f', début du tableau de variation.

Contrôle en faisant calculer dans HOME f'(-4), f'(-2), f'(-3)

Aller et retour entre GRAPH et P/C puis arrêt sur GRAPH

Calcul dans HOME de la dérivée

Repassage dans Y= et dans GRAPH

Passage en HOME et nettoyage des variables par F6, puis re-définition de f, calcul et définition de la dérivée, tracé des deux courbes.

Passage en Y= , désélection de y2 et repassage en GRAPH pour tracer. Résultat visiblement jugé satisfaisant.

Passage en HOME, calcul des limites en - ∞., -4, -3, -3g, -3d, -2, + ∞, valeurs placées au fur et à mesure sur le tableau de variation.

Passage à GRAPH, utilisation de *Trace* pour suivre les valeurs et explorer les voisinages des extrema.

Au cours de la discussion, il confirme qu'il a tracé son premier tableau de variation en se servant du graphe de f', qu'ensuite il a été gêné car « la dérivée était négative entre -4 et -2 donc la courbe décroissante alors que sur le graphique ça montait » (liaison) et qu'il a fini par tout effacer en pensant qu'il y avait peut-être quelque chose dans la mémoire de la TI qui perturbait. Puis, à un moment, il dit avoir compris que la liaison, « ça ne faisait pas partie de la courbe, c'était la calculatrice qui le faisait pour relier les deux bouts de courbe... En général, ça se passe quand la courbe n'est pas définie en un point. ». Questionné, il montre qu'il sait comment obtenir un tracé discontinu. Il dit avoir cherché la limite en -4 « parce que ça devait être un maximum », puis avoir exploré avec *Trace* pour contrôler que tout allait bien.

Françoise :

Calcul de la dérivée standard.

Ecrit que f' a toujours le signe du numérateur puis calcule à la main les racines du numérateur et trace un tableau de variation sans la valeur -3.

En HOME, fait calculer les limites en -4, -2 et - ∝. et note les résultats obtenus.

En P/C cherche la limite du numérateur de f en -3, trouve 1 et contrôle dans HOME en tapant l'expression : (-3)^2-2*3-14

En P/C continue sa recherche de la limite en -3 par valeurs supérieures (raisonnement correct) et contrôle dans HOME.

Début du calcul de la limite en + ∝. (mise en facteur de x^2 au numérateur et au dénominateur) et arrêt.

Interprétation en termes d'asymptote de la limite supérieure en -3 : « la droite d'équation x=-3 est asymptote à la courbe représentative au voisinage de +∝. »

Fin du temps de travail autonome.

Dans la discussion, elle explique qu'elle a cherché la limite en -3 parce que -3 annule le dénominateur de f, qu'elle n'a pas cherché les limites à la machine en +∝ car il faut rédiger et qu'une asymptote, c'est pour elle « une droite parallèle à la courbe ». Lorsque l'interviewer lui demande si son tracé est cohérent avec le tableau de variation, qui ne contient pas la valeur -3, elle dit que « non, elle ne croit pas », puis elle va dans TblSet, fixe la valeur initiale à -8 et fait défiler les valeurs entre -8 et -4 dans TABLE. L'entretien va s'arrêter là pour des raisons de temps.

Georges :

Trouve de façon standard la dérivée et ses zéros.

Calcule f '(0)

Trace ensuite un tableau de variation conforme au signe de f' (alternance) mais sans la valeur x=-3.

En faisant calculer la valeur des maxi et mini, repère une contradiction : M<m

Vérifie son tableau en faisant calculer f(-10), f'(-10), puis f'(-3) pour lequel la TI renvoie -∞.

Repasse en GRAPH, regarde le graphe et le tableau de variation.

Repasse en HOME et fait calculer les limites à l'infini, note les résultats, puis la limite en -3, puis la limite à gauche en -3.

Note la limite à gauche et rajoute la limite à droite en -3.

Refait calculer df(-3) et f(-3).

Regarde son tableau de variation, repasse en GRAPH, regarde et se déplace avec *Trace* aux environs de -3, suit le graphe avec le tableau de variation puis, satisfait, éteint la machine.

Dans la discussion qui suit, il explique : « ça me paraissait incohérent mais en fait, avec la courbe on se rend compte que la courbe est interrompue en -3 et comme la fonction est pas définie en -3, elle tend vers +∞ et -∞ à la fois, ça dépend si x est inférieur ou supérieur à -3 ; donc en fait c'est l'inverse, le minimum est -10 et le maximum -6 ». L'interviewer lui fait alors remarquer que la valeur -3 ne figure pas sur son tableau de variation, il rectifie son tableau sans difficulté. Il sait aussi expliquer le pourquoi du trait vertical tracé par la TI et propose de le supprimer en modifiant le mode de tracé.

Gérard :

Calcul de la dérivée standard.

Calcul du discriminant dans HOME : 6^2-4*8 puis calcul des racines de la même façon.

Début d'un tableau de signe avec les valeurs -4 et -2 mais sans la valeur -3

Signe de la dérivée (signe d'un trinôme du second degré).

Passage dans GRAPH puis ajout des flèches au tableau de variation.

Calcul dans HOME de f(-4) et f(-2), adjonction au tableau de variation

Repasse en GRAPH et regarde le tracé.

Calcul dans HOME des limites de f en +∞ et -∞.

Passage en TABLE et défilement entre -5 et -3, arrêt sur -3.

Limites à l'infini notées en P/C

Calcul en HOME des limites en 3 puis limite supérieure et inférieure, recopie des résultats.

Passage à GRAPH, regarde le tracé.

Ajout de -3 dans le tableau de variation et rectification.

Arrêt. Il est satisfait.

Dans la discussion, Gérard explique qu'il vérifie toujours avec GRAPH le sens de variation avant de mettre les flèches dans le tableau de variation et que s'il constate que ça ne va pas, il refait l'étude de la fonction.

Michel :

Calcul standard de la dérivée dans HOME puis tracé d'un cadre pour le tableau de variation et calcul à la main du discriminant (erreur : Δ=0)

Passage à HOME pour calcul de 4x8 puis retour au P/C pour fin de la résolution de l'équation.

Passage à GRAPH, regarde le tracé.

Passage à HOME, définition du numérateur de la dérivée : g(x), résolution de l'équation g(x)=0 à l'aide de l'ostensif *Solve*.

Ajout de -4 et -2 dans le tableau, avec une erreur dans l'ordre des valeurs (-2 avant -4).

Dans HOME, fait calculer g(-3) et obtient -1.

Complète le tableau de variation en marquant le signe de la dérivée puis le sens de variation de f, corrige l'erreur d'ordre.

Passage à GRAPH, regarde le graphe et le tableau de variation.

Passage à TABLE, début à -4 avec pas de 1, ne fait pas défiler. Il repère la singularité en -3.

Repasse en P/C et étudie la limite en -3 en considérant d'abord x>-3 (raisonnement correct).

En HOME, fait calculer la limite à droite en -3 ; erreur de syntaxe : +1 au lieu de 1, message d'erreur et correction

Calcul de la limite à gauche en P/C puis vérification dans HOME.

Calcul de la limite en +∞ dans HOME et recopie.

Passage à GRAPH, regarde le tracé.

Passage à TABLE, redescend les valeurs à partir de -4.

Arrêt du temps de travail autonome.

Dans la discussion, Michel explique qu'il a utilisé TABLE pour savoir où chercher les limites. Il a vu undef pour -3 et il s'est dit qu'il fallait chercher la limite en -3. Il confirme que pour l'étude du signe de la dérivée, il a fait p(-3) pour savoir si c'était négatif entre les racines mais qu'il aurait pu le savoir sans cela. Il est passé dans GRAPH pour vérifier, ça allait bien entre -2 et +∞, mais pas dans la zone autour de -3. Il reconnaît : « j'ai du mal à imaginer quand je vois une définition de fonction, alors j'accepte ce qu'elle me donne ». Il explique comment il a cherché les limites et qu'en +∝, il a fait directement à la machine car il voyait bien que la limite était +∝. L'interviewer lui fait remarquer que -3 ne figure pas dans son tableau de variation. Il rajoute -3 mais trouve que le tableau reste contradictoire avec le tracé (croissance aux environs de -3), pense que le tracé n'est pas assez précis dans cette zone. Même aidé, il n'arrive pas à interpréter la liaison et c'est l'interviewer qui doit lui expliquer que la liaison ne fait pas partie de la courbe et qu'il ne voit pas la partie correspondant à x<-3 parce que son ymin est trop grand.

Serge :

Calcul standard de f' et de ses zéros, note que f' change de signe en -4 et -2.
Fait tracer le graphe de f' a priori pour déterminer le signe dans au moins un des intervalles
Trace un tableau de variation en se servant des tracés de f et de f', rajoute la valeur -3 et la double barre.
Fait calculer f'(-3) puis les limites de f en - ∝. et + ∝ et note les résultats obtenus. Fait calculer la limite à gauche en -3, note le résultat puis écrit directement la valeur de la limite à droite.
Repasse dans GRAPH, regarde les graphes, son tableau de variation, les limites.
Repasse dans HOME et fait calculer les limites de f en -4 et -2.
Entre dans Y= les expressions y3(x)=-10 et y4(x) = -6
Passe dans GRAPH; la droite d'équation y=-10 n'apparaît pas.
Fait un *ZoomFit* qui ne donne rien d'intéressant.
Dans WINDOW, change ymin en -11 et refait tracer.
S'arrête visiblement satisfait.

Au cours de la discussion, il explique que les résultats qu'il a obtenus collaient bien avec le tracé, même pour la limite en - ∝., car il se doutait que ça devait être comme ça. Il a calculé les limites en -4 et -2 « pour trouver les lignes droites asymptotes ». L'interviewer lui demande si les deux droites tracées sont bien asymptotes à la courbe, il répond d'abord oui puis, devant justifier, il s'aperçoit de son erreur et dit que non ce sont des tangentes. Il dit que *ZoomFit* est lent et qu'en plus ça n'a rien donné, sauf un trait tout en haut et qu'il a préféré ensuite changer la fenêtre lui-même pour qu'on voie tout. Il n'arrive pas à interpréter le tracé vertical de liaison.

Vincent :

Calcul standard de la dérivée dans HOME.

Reprise du calcul de la dérivée à la main. Intervention de l'interviewer pour lui rappeler qu'il n'est pas obligé de tout faire à la main. Continue à la main et arrive à l'expression de la dérivée.

Passe en HOME et regarde.

Ecrit que $(x+3)^2$ est toujours positif pour $x\neq-3$.

Repasse en HOME et fait calculer f(-3). la machine renvoie undef.

Repasse en P/C, écrit que la dérivée a le même signe que son numérateur, hésite puis calcule le discriminant et s'arrête. Au bout d'un moment, l'interviewer l'aide à trouver les racines au moment où il allait aller chercher le programme mis sur sa calculatrice.

Trace le tableau de variation, d'abord sans -3 mais le rajoute rapidement.

Dans HOME, calcule f(-4), f(2) (au lieu de f(-2)) en exact et approché puis les limites en -∝, -3 par valeur inférieure et supérieure.

Fin du temps de travail autonome.

Dans la discussion, il précise qu'il a voulu faire le calcul de dérivée à la main pour se prouver qu'il savait le faire. L'interviewer lui demande s'il y a cohérence entre le tableau de variation et la courbe. Il répond : « oui, à partir de -3, mais qu'avant il ne voit pas le début ». En réponse à la question de l'interviewer qui lui demande s'il peut obtenir ce morceau, il pense à *ZoomFit* et le fait. Il veut ensuite effacer la liaison qui ne fait pas partie de la courbe dit-il: « là y a un trait, je ne sais plus comment faire pour l'effacer ».

Le tableau de la page suivante essaie de synthétiser quelques caractéristiques des comportements observés sans rentrer dans leurs méandres :

	Sens de variation	**Choix des limites**	**Calcul des limites**
Anne	*Racines : HOME (*Zeros*) *Re-calcul des racines en P/C *Signe P/C (Trinôme) *Sens de variation (GRAPH)	*-∝, +∝ et 0 (d'emblée)	*HOME

Charles	* Racines et signe : P/C (Trinôme +err.(x+3)) * Contrôle dans GRAPH	*+∞, -∞ et -3 : GRAPH	*GRAPH
Francis	* Racines : GRAPH (f') * Contrôle dans HOME (*df(-4)=0 & df(-2)=0*) * Signe : GRAPH	* -3 : f'(-3) et GRAPH * - ∞ et +∞ : tableau *-4 et -2 : tableau	* HOME
Françoise	* Racines et signe : P/C (trinôme)	*-3 : expression de f(x) *-∞ : tableau *-4 et -2 : tableau	* pour -4,-2, -∞ en HOME * pour -3, +∞ Calcul P/C puis Contrôle dans HOME *+∞ : début P/C
Georges	*Racines : HOME *Signe : alternance et calcul d'une valeur dans HOME *Contradiction des valeurs maxi et mini, levée par repérage -3 *Contrôle dans GRAPH (*Trace*)	* -3 : f'(-3) et GRAPH * -∞ et +∞ : tableau	*HOME *Contrôle dans HOME (*df(-3)* et *f(-3)*)
Gérard	* Racines : P/C (avec calc. HOME pour calcul num.) * signe : Trinôme * Contrôle dans GRAPH	* -3 : TABLE * -∞ et + ∞ : GRAPH	* HOME
Michel	*Racines : P/C (trinôme) *Contrôle dans HOME (*Solve*) * Signe : alternance et calcul d'une valeur dans HOME * Contrôle dans GRAPH	*-3 : TABLE * +∞ : tableau	*-3 : Calcul P/C contrôle dans HOME * pour +∞ : HOME
Serge	* Racines : HOME (*Zeros*) * Signe : alternance et tracé de f' (GRAPH)	*-3, -∞ et +∞ * -4 et -2 (GRAPH et tableau)	* HOME

Vincent	* Calcul de f' dans HOME * Re-calcul de f' en P/C * Racines et signe : P/C (trinôme)	*-3 : expression -∞ : tableau	* HOME

Résumé des comportements observés

Analyse :

Pour l'étude de fonction, on note une évolution certaine depuis le premier entretien. Elle est visible dès la phase de tracé de la machine puisque cette fois, quatre élèves utilisent la stratégie standard. Ceci indique l'influence de la dimension institutionnelle qui, contrairement au premier entretien, est beaucoup plus visible. A noter de plus Serge, qui s'arrête sur la fenêtre standard mais plus tard va faire un *ZoomFit* qui passera inaperçu de l'interviewer et pour lequel, il obtient effectivement un tracé ininterprétable. Cela est dû aux *contraintes d'usage,* requérant des connaissances-machine de niveau 2 (Cf. Typologie . . .) et qui correspondent ici à la sélection-désélection des fonctions dans l'application Y=, ainsi qu'à la prise en compte de l'intervalle [xmin;xmax] pour interpréter le tracé obtenu après un *ZoomFit*.

Concernant le calcul de la dérivée et la détermination de ses zéros, il est intéressant de constater comment la présence d'un trinôme du second degré conduit une majorité d'élèves, et même Gérard qui est un "*bricoleur*", à se situer dans un contrat didactique de type "contrôle usuel" : ne déléguer à la machine que les calculs numériques intermédiaires dans la résolution de l'équation du second degré ou revenir au calcul P/C, après avoir trouvé les zéros à la machine. A noter le cas de Vincent qui, en accord avec son profil (Cf *Questionnaire 1*), va même jusqu'à dériver à la main "pour se prouver qu'il en est capable" dit-il.

La détermination du signe de la dérivée, une fois ses zéros trouvés, est majoritairement effectuée suivant la stratégie standard mais ce n'est pas systématique : Michel et Serge par exemple, utilisent le principe d'alternance ; le premier se basant sur le calcul de la valeur de la dérivée en un point (en fait, le calcul du numérateur de la dérivée au point -3) et le second sur le tracé de f'.

En ce qui concerne la singularité en x=-3, on voit bien la fragilité des connaissances en cours de construction. Contrairement à la situation de contrôle qu'ils viennent de vivre, ici, c'est à eux de déterminer les points où ils jugent nécessaire de chercher les limites éventuelles de la fonction. Cela est loin d'aller de soi. Seuls Françoise et Vincent semblent repérer le problème au vu de l'expression. Anne calcule d'emblée des limites choisies arbitrairement qui sont celles en $-\infty$, $+\infty$ et 0. Charles prend la liaison du graphe pour son début et l'estime donc satisfaisant puis, percevant qu'il se passe quelque chose en -3, il lit une limite $+\infty$, à cause du raccord tout en haut de l'écran. Michel et Gérard repèrent la singularité dans Table et Michel a l'air de considérer cette stratégie comme efficace. Pour Francis et Georges enfin, cela résulte plus ou moins directement de la prise de conscience de la contradiction maxi<mini.

La syntaxe de la commande limite (qui mobilise donc une connaissance-machine de niveau 1), son adaptation aux limites à droite et à gauche semble bien maîtrisée. D'ailleurs, certains élèves se contentent d'un seul calcul, vu que dans le cas où la machine retourne "undef" à lâ demande de limite, ils n'ont dû rencontrer que des situations de limites infinies à droite et à gauche (ce qui montre une fois de plus l'influence de la dimension institutionnelle). Notons que seul Charles n'y recourt pas. Par ailleurs, l'obtention des valeurs correctes de limites à droite et à gauche en -3 ne suffit pas à garantir une interprétation correcte du graphe : Michel et Serge par exemple n'y parviennent pas seuls. Enfin, plusieurs élèves, ayant le choix, calculent aussi les limites en -4 et -2, les zéros de la dérivée.

Il nous paraît aussi important de noter que la sensibilité aux contradictions n'est pas encore satisfaisante, ce qui limite l'efficacité de la calculatrice comme moyen de contrôle, au delà des situations où elle fournit directement le résultat et que, même dans les cas où les élèves réussissent, leurs comportements sont beaucoup moins linéaires que ceux présentés dans la stratégie standard et restent relativement diversifiés sur l'ensemble des élèves.

Conclusion :

Nous ne reviendrons pas en détail sur les trois premières parties de l'entretien, les résultats ayant déjà fait l'objet de synthèses partielles. Rappelons seulement que la composante de l'instrumentalisation qui concerne la transformation de la machine est plus faible que prévu et que presque aucun élève n'a créé de répertoires pour structurer la mise en mémoire. Comme nous le soulignions plus haut, peut-être faut-il voir là le fait qu'ils ne considèrent pas cette machine comme la leur propre (cf. réponse de Francis dans la *Partie 1*) mais ceci n'intervient sans doute que partiellement : Serge, par exemple, explique qu'il a nettoyé sa machine parce qu'il y avait beaucoup de choses (sans doute en vrac) qu'il n'utilisait pas. Par ailleurs, le fait que la machine offre une multitude d'ostensifs puissants peut être également une raison non négligeable à l'absence (ou à la rareté) de programmes ou de formules mathématiques.

L'utilisation en contrôle est une utilisation orientée vers la vérification, que nous pourrions qualifier de standard. L'utilisation pendant la période des vacances est quasi nulle.

En ce qui concerne l'étude de fonction, nous remarquons des progrès considérables dans l'utilisation de la TI92. Tout d'abord, le statut des applications qui interviennent (ce qui représente une des composantes de l'instrumentalisation) dans cette activité semble avoir évolué : ainsi l'application HOME semble beaucoup plus présente chez la majorité des élèves, que ce soit pour le calcul de la dérivée et la recherche de ses zéros (qui semble commencer à se systématiser chez certains élèves d'ailleurs), pour le contrôle de ces zéros ou même pour celui du signe de la dérivée par calcul de f en certaines valeurs bien choisies (tel est le cas par exemple de Georges). Pour ce qui est de l'application TABLE, elle est quasi inexistante quand au premier entretien elle était sollicitée par presque tous les élèves. Quant à l'application graphique, elle est sollicitée presque autant qu'au premier entretien mais beaucoup plus pour le contrôle que pour la recherche des zéros ou la détermination des variations. Par ailleurs, l'environnement p/c a été fortement sollicité par les élèves, mais ceci semble dû sans aucun doute à la présence d'un trinôme du second degré. En effet, cette présence nous paraît être une perturbation assez importante au sens où elle a eu une influence certaine sur les stratégies des élèves et sur le rôle qu'a eu l'environnement p/c dans leur activité. Ainsi, l'application HOME aurait été beaucoup plus utilisée (via les commandes *Solve* ou *Factor* par exemple - Cf analyse a priori) s'il n'y avait eu cette forte prégnance du rapport institutionnel à l'objet "trinôme du second degré", et les stratégies de certains élèves (Anne, Michel et Vincent) auraient été, nous semble-t-il, plus stables.

Enfin, nous retrouvons dans les pratiques instrumentées des élèves deux des phénomènes déjà repérés lors du premier entretien : D'une part, le phénomène d'*oscillation* à travers le cas de Vincent par exemple, qui , par le calcul de la dérivée et dans HOME et en p/c, semble osciller entre une stratégie machine et une stratégie p/c avant d'opter en fin de compte pour cette dernière. D'autre part, le phénomène de *sur-vérification* illustré par le cas de Michel qui, après avoir calculé les zéros de la dérivée à la main, contrôle son résultat dans un premier temps en visualisant le tracé de la fonction puis en calculant à nouveau les zéros dans HOME à l'aide de l'ostensif *Solve*.

Entretien 3 :

Ce troisième entretien a eu lieu après le contrôle spécifique, pendant la dernière semaine de cours des élèves. Tous les élèves sauf Michel l'ont passé. Michel n'a pas non plus assisté au contrôle spécifique qui avait été annoncé.

Scénario de l'entretien :

L'entretien est organisé en trois parties. Dans la première, c'est l'utilisation de la TI92 dans le devoir commun qui est visée, où le contrat impose une justification p/c des résultats donnés par l'élève. Dans la deuxième partie, c'est l'utilisation au devoir spécifique qui est évaluée. Le type de contrat est particulier puisqu'on ne demande pas de justifier les résultats donnés par la machine pour un certain type de questions ; ainsi, contrairement au devoir commun, les exercices proposés ont été conçus en fonction de la présence de machine. Enfin, la troisième partie se situe dans la continuité des deux précédents entretiens, où la tâche est toujours centrée sur l'étude de fonction, avec cependant deux variantes : la fonction est cette fois-ci trigonométrique et non plus rationnelle, et le scénario est composé cette fois-ci d'une phase de conjecture suivie d'une phase de justification.

Partie 1 :

On demandait à l'élève, en suivant le schéma habituel, comment il avait utilisé la TI92 pendant le devoir commun de la semaine précédente dans la partie analyse (cf. annexe 5).

Partie 2 :

On demandait de la même façon à l'élève comment il avait utilisé la TI92 pendant le devoir spécifique

Présentation du devoir spécifique :

Un contrôle spécifique machine a été organisé en fin d'année. Son texte est reproduit en annexe 6 (pour une analyse a priori détaillée de ce devoir, se reporter à [Artigue & al., 1998]. Lorsque les élèves disposaient de leurs machines pour les contrôles communs, les rédactions fournies ne devaient pas porter la trace de l'utilisation de la machine. Le contrôle spécifique visait à instaurer, quant à lui, à un tout autre contrat plus conforme à l'idée d'intégration de la machine et à étudier son fonctionnement. Il comportait des questions considérées à ce moment là de l'année comme routinières du point de vue des techniques et compétences mises en jeu. Pour ces questions, les élèves n'avaient pas à justifier les productions de la machine. Par contre, pour les questions relatives à des tâches que l'on ne pouvait considérer comme routinières, les élèves ne pouvaient se contenter de s'appuyer sur les résultats fournis par la machine. Le contrôle spécifique se distinguait également des contrôles ordinaires sur d'autres plans bien que la tâche principale envisagée soit une tâche classique d'étude de fonction. Ainsi :

- une plus grande autonomie était laissée à l'élève dans son travail mathématique classique
- le contrôle comportait une question complètement nouvelle pour eux qui visait à tester leurs possibilités d'adaptation à cette nouveauté dans un environnement instrumenté.
- il comportait également une question spécifique à l'instrumentation où l'élève devait expliquer des différences constatées en production machine et production papier/crayon.

Précisons que le temps accordé aux élèves a été de 50 minutes environ et qu'il s'agissait de la dernière semaine de cours. Par ailleurs, ce devoir se composait de deux exercices :

➢ un premier où il fallait dériver à la main et à la machine la fonction f définie sur IR par :

$$f(x) = \cos(3x-\frac{\pi}{6})$$

avant d'expliquer l'équivalence des deux expressions différentes obtenues dans les deux environnements (la TI92 fournit comme expression de la dérivée : $3\cos(3x+\frac{\pi}{3})$ alors que le calcul à la main devait donner : $-3\sin(3x-\frac{\pi}{6})$).

S'il est aisé de tester l'égalité des deux expressions (à l'aide de *tExpand* ou *Solve* par exemple), ce test ne permet en rien de justifier cette équivalence. Ainsi, les élèves doivent proposer une *technique* en p/c qui justifierait la transformation de la machine et qui laisserait deviner par là même une connaissance-machine de niveau 3 ou 4 (liée aux contraintes internes de la machine).

➢ un deuxième exercice où les élèves avaient à étudier la fonction f définie sur IR\{2} par :

$$f(x)=\frac{4x^3+24x^2+47}{4x-8}$$

à savoir son sens de variation et ses limites. Il leur est demandé également de déterminer un polynôme P dont la courbe représentative soit asymptote à celle de f au voisinage de +∝ et -∝ (ce qui représentait une question complètement nouvelle pour eux), en justifiant soigneusement les réponses, puis de donner les caractéristiques (xmin, xmax, ymin, ymax) d'une fenêtre qui permette de mettre en évidence le sens de variation de f et son comportement au voisinage de 2, -∝ et +∝. Enfin, ils avaient à reproduire l'allure du tracé obtenu dans cette fenêtre pour la fonction f et pour les droite et courbe asymptotes trouvées.

Partie 3 :

Elle concernait l'étude de la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{1+\cos 2x}$, avec un scénario qui diffère de ceux des deux premiers entretiens : les élèves avaient, en premier lieu, à définir la fonction et à la faire tracer ; mais ensuite, ils devaient cette fois-ci proposer, à partir du tracé et des opérations permises dans la fenêtre graphique, un certain nombre de conjectures concernant les propriétés de la fonction : propriétés de parité et périodicité, sens de variation, localisation et valeur des extremums, dérivabilité...

L'interviewer faisait par la suite le point sur les conjectures faites et l'élève devait essayer de les démontrer ou de les infirmer, en dépassant les seuls critères graphiques. Si le temps le permettait, on essayait de l'aider à faire le lien avec la fonction $\sqrt{2}\ |\cos x|$ et d'exploiter ce lien pour l'étude des singularités.

Le choix de ce dispositif et de type de fonction visait à briser le schéma d'étude classique en poussant au travail sur le tracé graphique fourni par la machine (phase de conjecture), et à inscrire l'étude algébrique dans une démarche de validation de conjectures.

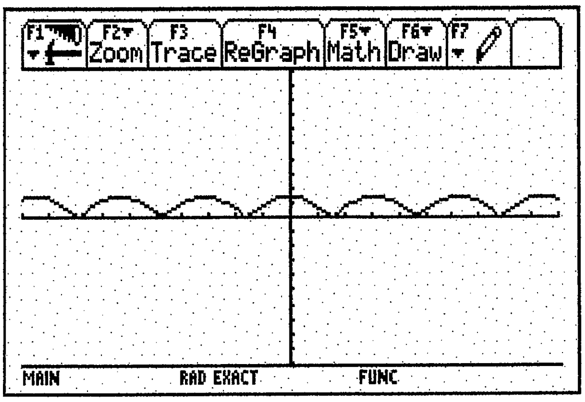
La fonction était choisie pour présenter les caractéristiques suivantes :

- C'est une fonction trigonométrique construite à partir des fonctions usuelles mais sortant du registre des fonctions trigonométriques étudiées jusqu'alors. Elle est paire et périodique de période π.

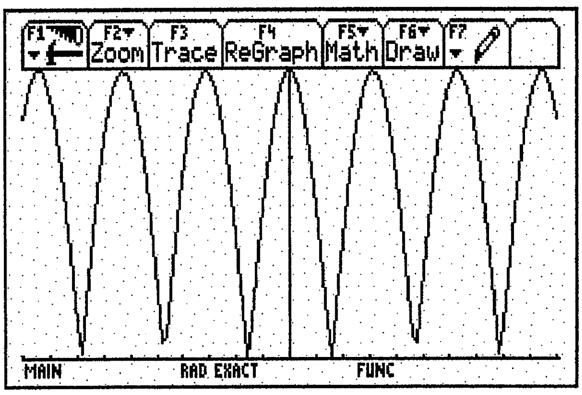
- Sa TI92-représentation graphique ne permet pas de conjecturer d'une manière fiable à cause de contraintes internes et de contraintes d'usage. Une bonne prise d'informations supposerait donc la disponibilité de connaissances-machine de niveaux 2 et 3 liées à l'application GRAPH, et une bonne articulation avec des connaissances mathématiques.
- Elle est non dérivable pour $x=\frac{k\pi}{2}$ et admet en ces points des demi-dérivées à droite et à gauche, ce qui permettait d'avoir une idée sur le rapport personnel des élèves à la dérivabilité, à la fin de cette année scolaire, où la notion de dérivée avait joué un rôle important mais davantage à travers l'outil « fonction dérivée » qu'à travers l'objet « dérivée ».
- Son expression peut être transformée d'une manière facile à la TI92, en une forme assez simple pour favoriser particulièrement l'étude du comportement au voisinage des points singuliers ; et cela en se ramenant à la fonction d'expression : $\sqrt{2}$ cosx.

Type de stratégie a priori :

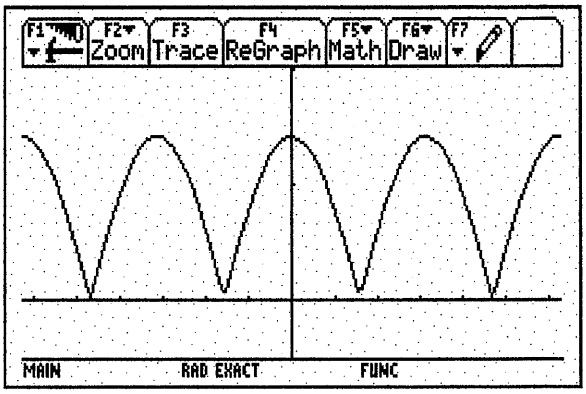
Entrée standard de la fonction dans l'application HOME (par *Define*) et tracé dans la fenêtre standard (*ZoomStd*). Ceci peut conduire à effectuer un *ZoomFit* sur [-10;10], ou encore à restreindre la fenêtre en prenant en compte les valeurs effectivement prises par f et la périodicité, par exemple réduire l'intervalle sur x à [-2π, 2π] et celui sur y à [-1,2] ou même à [0,2]).



ZoomStd



ZoomFit sur [-10;10]

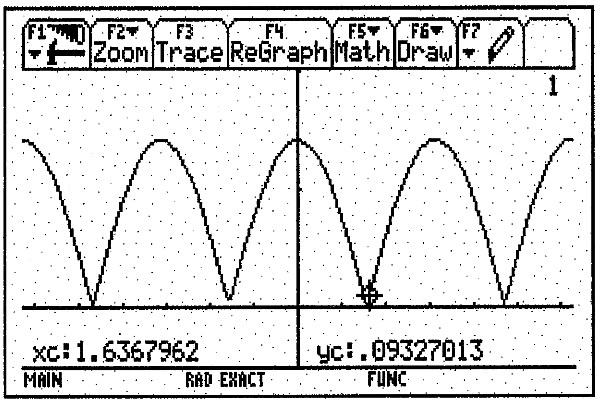


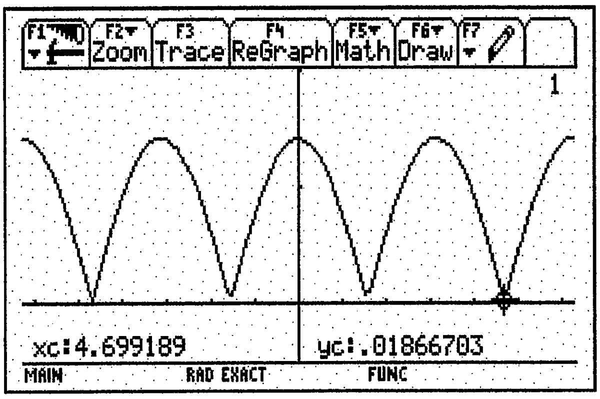
[-2π;2π] x [-1;2]

Conjectures :

Grossièrement, le tracé montre une fonction positive, qui semble continue paire et périodique (par exemple dans la fenêtre *ZoomStd*). La période semble voisine de 3 au vu des graduations (ces dernières dépendent des informations contenues dans WINDOW, ce qui met en jeu une connaissance-machine de niveau 2) et, vu la nature trigonométrique de la fonction (ce qui constitue une connaissance mathématique), ceci conduit à conjecturer une période de π. Le minimum semble égal à 0 et le maximum proche de 1.5. Ceci peut rapidement se vérifier par un calcul mental simple, à partir de l'expression de la fonction, qui donnerait les valeurs exactes 0 et $\sqrt{2}$ pour f(0) et f(π/2). Sur la période [0, π], la fonction semble décroissante jusqu'à π/2 puis croissante et elle semble présenter un point anguleux en π/2. Elle serait donc non dérivable en ce point mais admettrait des demi-tangentes à droite et à gauche de pentes opposées vue la symétrie.

Ces conjectures ont été élaborées à la seule vue du tracé. On peut penser que les élèves ne vont pas nécessairement fonctionner de la sorte mais s'appuyer pour formuler leurs conjectures sur différentes actions possibles dans la fenêtre graphique. En fait, ces actions peuvent perturber l'élaboration des conjectures. En effet, l'utilisation de la commande *Trace* par exemple pour explorer les valeurs extrémales ne va pas donner la valeur 0 systématiquement pour les minimums, à cause du phénomène de discrétisation (contrainte interne), elle peut conduire également à des valeurs différentes d'un minimum à l'autre (Cf figures ci-dessous). Ce qui aurait pour conséquence de faire douter de la périodicité de la fonction ou de sa parité. Pour pouvoir dépasser ces contraintes, des connaissances-machine de niveau 3 (liées au phénomène de discrétisation cité ci-dessus ainsi qu'au caractère approché des ostensifs de l'application graphique) ainsi que des connaissances mathématiques (liées à la nature trigonométrique de la fonction) sont nécessaires.





Il en est de même pour les commandes du menu F5 permettant d'obtenir les maximum et minimum sur un intervalle donné. Si les valeurs données sont les mêmes, les élèves peuvent oublier qu'il s'agit de valeurs approchées et les considérer a priori comme les maxima et minima exacts (la connaissance-machine de niveau 3 qui consiste en le caractère approché des résultats fournis par l'application GRAPH ne serait alors pas disponible). Par ailleurs, l'utilisation de zooms pour aller explorer le voisinage des points anguleux peut conduire à des tracés discontinus, toujours pour les mêmes raisons. La formulation des conjectures correctes suppose donc un détachement de certaines caractéristiques visuelles et numériques et un travail de mathématisation certain, ainsi que la disponibilité de connaissances-machine.

Preuves :

Pour ce qui est du caractère positif de la fonction, de sa périodicité et de sa parité, les preuves à la main nous semblent être les plus économiques. Si l'élève veut utiliser la machine, et plus précisément l'application HOME, pour prouver la périodicité par exemple, il peut perdre du temps car certaines connaissances-machine de niveau 3 ou 4 s'avèrent nécessaires : la machine, en effet, ne simplifie pas f(x+π), elle ne répond pas "*true*" au test d'égalité f(x)=f(x+π), il faut demander explicitement de résoudre l'équation (figure a ci-dessous). En revanche, elle simplifie f(-x) et permet donc de gérer la parité. Pour ce qui concerne l'étude du sens de variation, la machine donne l'expression de la dérivée. Elle résout aussi l'équation sin(2x)=0 mais non les inéquations associées (figure 17). L'étude du signe de la dérivée impose donc aux élèves une articulation entre le travail-machine et travail-P/C. La machine pourrait confirmer, enfin, la non dérivabilité en $(2k+1)\pi/2$ en affichant "*undef*".

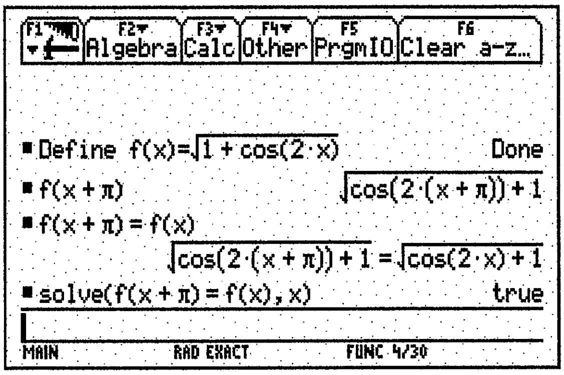


Figure a

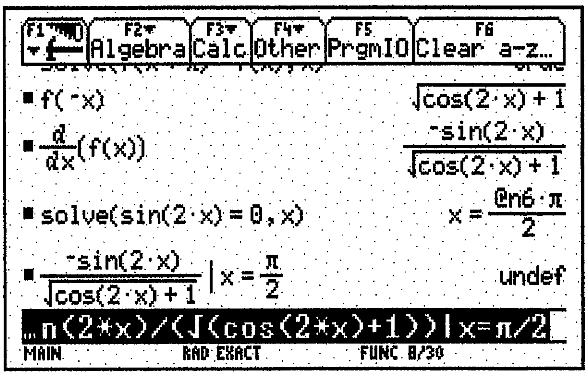
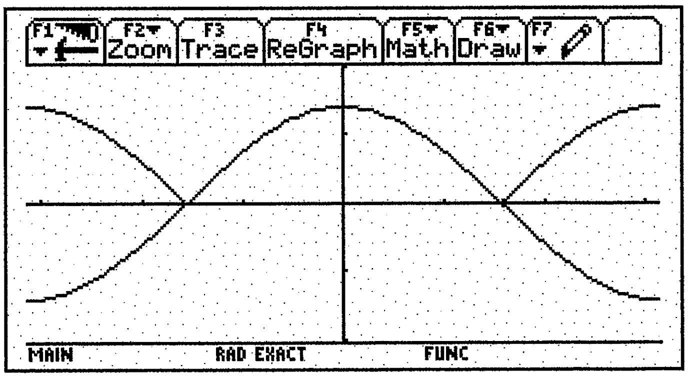


Figure b

Ceci dit, d'autres stratégies déjà mises en œuvre dans les entretiens précédents peuvent apparaître : utilisation de l'application TABLE, utilisation du tracé de f' (même si cela peut paraître ici hors contrat), enfin utilisation du principe d'alternance des signes de la dérivée, la machine permettant alors d'obtenir facilement les valeurs de la dérivée en des points autres que ses zéros.

Enfin, pour ce qui est du lien avec la fonction cosinus, notons que la commande trigonométrique t*Expand* transforme l'expression en $\sqrt{2}\ |\cos x|$. Le tracé du graphe de la fonction $\sqrt{2}\cos x$ et de celui de f dans la même fenêtre permet de mettre en évidence les rapports des deux courbes et d'en déduire les valeurs des demi-dérivées aux points anguleux.



Résultats et Analyses :

`Partie 1 : Utilisation en devoir commun`

Anne (note 10.5) :

Dans l'exercice 1, elle a défini u_n dans HOME et calculé les quatre premières valeurs de la suite (exercice raté, elle trouve la suite arithmétique en remplaçant u_n par u_0 dans le calcul de $u_{n+1}-u_n$, conclut de $v_{n+1}=-3u_n+3/2$ que v_n est géométrique de raison -3) Dans l'exercice 2, elle a défini et fait tracer f, vérifié le calcul de f' et utilisé l'application TABLE pour aider le tracé P/C.

Charles (7.5) :

Exercice 1 : il a entré u_n dans Y= et fait tracer la suite. Il n'a pas fait l'exercice 2.

Francis (17.5) :

Il a utilisé la calculatrice uniquement dans l'exercice 2 pour faire tracer f. Il dit : « il y a des moments où je perds un peu de temps en utilisant la calculatrice. je ne sais pas comment je me débrouille... Je préfère ne pas trop l'utiliser. »

Françoise (9.5) :

Dans l'exercice 1, elle ne s'en sert que pour des petits calculs. Dans l'exercice 2, elle dit s'en être beaucoup servie : vérification du calcul de la dérivée, prise de valeurs dans TABLE pour le tracé et contrôle du tracé.

Georges (17.5) :

Dans l'exercice 1, il rentre la suite dans Y= et fait calculer les premiers termes pour contrôler son calcul P/C, mais rencontre des problèmes de décalage d'indices. Dans la dernière question, il est aussi troublé par le fait que la machine lui donne un résultat aussi grand alors que « les termes passant alternativement du plus au moins, donc, quand on fait une somme de termes, ça doit être proche de 0, parce que les termes vont s'annuler... ça peut pas être si grand ». Une erreur de calcul dans le passage de la somme des v_n (expression correcte) à celle des u_n l'a conduit à la valeur 1 181 005, mais la réponse correcte : -59043 aurait pu le choquer tout autant. Il n'arrivera pas à corriger son erreur. Pour l'exercice 2, il s'en sert pour le calcul de la dérivée et sa factorisation, ensuite pour contrôler le tableau de variation en faisant tracer f et repère une erreur (il avait considéré à tort la fonction comme une fonction paire) qu'il corrige. Au total, il estime quand même que la machine l'a aidé.

Gérard (10.5) :

Dans l'exercice 1, il a entré la suite puis utilisé un programme personnel sur les suites récurrentes pour calculer les premières valeurs, ensuite il essaie de trouver les raisons en utilisant les formules générales des suites arithmétiques et géométriques qu'il a aussi entré en machine, n'y arrive pas et abandonne. Dans l'exercice 2, il l'utilise pour vérifier le calcul de dérivée et tracer la courbe. Il estime globalement que la machine l'a aidé, qu'elle aurait pu l'aider plus dans le premier exercice s'il avait avancé davantage.

Serge (13.5) :

Il n'y a pas d'utilisation dans l'exercice 1 traité jusqu'au calcul de v_n en fonction de n. Dans l'exercice 2 , il l'a beaucoup utilisée : définition de f, calcul de $f(x+2\pi)$ et de f', essai sans succès de résolution de $\cos(x)\leq\cos(0)$, utilisation de Graph pour aider le tracé P/C.

Vincent (note : 9.5) :

Dans l'exercice 1: définition de la suite dans Y= et lecture dans TABLE des premières valeurs (ne va pas au-delà du calcul de v_1). Dans l'exercice 2 : définition de f, calcul et tracé de f', utilisation du tracé de f' pour remplir le tableau de variation de f, tracé de f et utilisation de TABLE pour aider le tracé P/C.

"Dans ce devoir commun, on observe une utilisation que l'on peut qualifier de standard pour l'exercice 2 chez beaucoup d'élèves : contrôle de la dérivée, du tableau de variation, prise de valeurs dans TABLE pour aider le tracé. Même s'ils ne sont pas à l'aise avec la résolution des inéquations trigonométriques, les élèves semblent conscients du peu d'aide que peut leur apporter la machine à ce niveau. La factorisation de la dérivée, qui était donnée dans le texte, est faite directement à la main. On notera cependant les utilisations singulières dans un sens ou dans l'autre : l'utilisation limitée de Francis, bien dans la ligne de ses rapports à la machine, l'utilisation de Serge qui essaie de gérer avec la machine la périodicité et une inéquation trigonométrique d'ailleurs erronée, bien conforme avec son rapport à la machine là encore et celle de Vincent qui exploite directement le tracé de f' pour l'élaboration du tableau de variation. Pour l'exercice 1, les disparités observées montrent la nouveauté du sujet et le fait que l'instrumentation est encore embryonnaire pour l'étude des suites. Là encore, on notera l'utilisation de Gérard qui atteste sa personnalisation de la machine par l'entrée de formules générales qui ici sont loin de lui favoriser la résolution." [Artigue & al., 1998].

Partie 2 : Utilisation en devoir spécifique

Anne :

- <u>Equivalence d'expressions</u> : "Les deux résultats sont les mêmes."
- <u>Calcul dérivée et étude des variations :</u> calcul de la dérivée par F3-1, recherche des zéros par F2-4. Signe correct non justifié. Sens de variation non justifié. Singularité repérée.

<u>Limites :</u> Limites calculées à la machine. Justifications approximatives : en 2, mise en facteur de x^3 au numérateur et x au dénominateur, calcul des limites de quelques termes (24/x, 47/ x^3, x^3 et x) et conclusion ; en $+\infty$, affirmation des limites infinies des numérateur et dénominateur après factorisation mais sans simplification et conclusion.

<u>Tableau de variation :</u> Correct, valeurs des ordonnées des extremums et des limites non indiquées.

<u>Fenêtre :</u> Adaptée : [-20,20]x[-400,400]

<u>Tracé :</u> Recopie écran avec appui de points, tracé soigné.

Dans l'entretien, elle dit qu'elle a utilisé la TI pour le calcul de f' et des limites et utilisé TABLE pour étudier le signe de f', ce qui explique que le signe de f' ne soit pas justifié.

Charles :

- <u>Equivalence d'expressions</u> : Calcul détaillé de la dérivée, expression machine, cercle trigonométrique avec marqués $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$, pas de conclusion.
- <u>Calcul dérivée et étude des variations</u> : Entrée fonction par F4-1, calcul de dérivée (F3-Enter f(x),x). Recherche des zéros à la calculatrice (commandes non précisées). Etude du signe de la dérivée par TABLE. Non repérage de la singularité en 2.

<u>Limites</u> : Pas de calcul de limites.

<u>Tableau de variation :</u> Incorrect vu l'absence de x=2. Abscisses des extremums locaux sous forme exactes et ordonnées non précisées, limites non indiquées. Rajoute néanmoins en remarque : "D'après le tableau de valeurs et en mettant WINDOW avec ymax 500, on note

que la courbe varie encore pour des valeurs de y élevées. Et donc f est croissante jusqu'à x=2 (asymptote) puis décroissante jusqu'à x= $\frac{3\sqrt{21}+1}{4}$ puis f est croissante jusqu'à +∞."

Fenêtre : Non donnée mais visiblement adaptée.

Tracé : Recopie écran peu soignée mais correcte, abscisses points particuliers et asymptote marqués, valeur approximative du minimum positif indiquée : ~90. Tracé non cohérent avec tableau de variation et avec remarque.

Dans l'entretien, il précise qu'il pensait résoudre l'exercice 1 avec *Factor* mais que ça n'a pas marché. Pour l'exercice 2, il dit avoir utilisé la machine pour le calcul de f' et utilisé TABLE pour le tableau de valeurs.

Francis :

- Equivalence d'expressions : Elles sont égales "car en effet si on ajoute à un sinus négatif $\frac{\pi}{2}$, on obtient un cosinus positif.

$\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$

donc $-3\sin(3x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}) = 3\cos(3x+\frac{\pi}{3})$."

- Calcul dérivée et étude des variations : Calcul machine de la dérivée par F3-1 ; factorisation et résolution de l'équation du second degré à la machine. Signe du trinôme justifié et signe de la dérivée justifié par tableau de signes. Sens de variation soigneusement justifié.

Limites : Limites correctes (pas de mention d'utilisation de la calculatrice). Justifications :

en 2 : d'abord mise en facteur de x^3 et calcul de sa limite en 2 - barré puis «f(x) n'est pas définie en 2 donc elle n'a pas de limite "exacte" (c'est à dire donc un chiffre quand x tend vers 2) mais une limite infinie. f est décroissante sur [-1/2,2[donc la limite est -∞.". Raisonnement analogue pour la limite à droite.

Limites en -∞ et +∞ données sans justification.

Tableau de variation : Correct. Valeurs approximatives des ordonnées des extremums indiquées sans marque d'approximation.

Fenêtre : Adaptée à partir de la fenêtre standard : [-10,10]x[-300,250]

Tracé : Non fourni.

Dans l'entretien, il précise qu'il a utilisé la machine pour le calcul de f', la factorisation et la recherche des racines de l'équation du second degré, puis pour le tracé de f, puis de f' séparément, pour contrôler le tableau de variation. Il a trouvé une fenêtre par *ZoomFit* puis a divisé les ymin et ymax par 2 environ.

Françoise :

- <u>Equivalence d'expressions</u> : Donne les deux valeurs dans commentaires.
- <u>Calcul dérivée et étude des variations</u> : Calcul machine par F3-1, après expression détaillée du quotient (u(x)=..., v(x)=...) ; factorisation machine et résolution à la main de l'équation du second degré. Signe du trinôme justifié. repérage singularité et justification détaillée du signe de la dérivée par tableau de signe. Sens de variation justifié.

<u>Limites</u> : Calculs machine pour les limites en 2, sans justification. Pour les limites en $+\infty$, mise en facteur de x^3 et simplification, puis utilisation des fonctions de référence. Conclusion correcte.

<u>Tableau de variation</u> : Correct mais limites non marquées, valeur approximative du premier minimum indiquée.

<u>Fenêtre</u> : correspond à l'utilisation de *ZoomFit* sur la fenêtre standard :
[-10,10]x[-615.6,471.07]

<u>Tracé</u> : Recopie écran peu soignée ; asymptote marquée.

Dans l'entretien, pour l'exercice 1 dit qu'elle a entré le résultat trouvé à la main en machine et que ça lui a donné l'autre, donc qu'elle était satisfaite. Pour l'exercice 2, elle a eu une utilisation standard avec contrôle par tracé du tableau de variation. Pour les limites, elle dit avoir fait à la machine pour 2 car elle ne se « souvenait plus comment on faisait avec 2 supérieur et 2 inférieur » (connaissances-machine de niveau 1 non disponible), mais que pour l'infini, elle a fait à la main et vérifié à la calculatrice. Elle a essayé la question 4, mais n'a pas compris. Elle est passée à la suite et a pris comme fenêtre celle qu'elle avait déjà utilisée, obtenue par *ZoomFit*. Pour l'asymptote, elle savait que c'était x=2.

Georges :

- <u>Equivalence d'expressions</u> : Développement :

"$-\sin(3x-\frac{\pi}{6}) = \cos(3x)\sin(\frac{\pi}{6}) - \sin(3x)\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}\cos(3x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(3x) = \cos(3x)\cos(\frac{\pi}{3})-\sin(3x)\sin(\frac{\pi}{3})$"

- Calcul dérivée et étude des variations : Calcul dérivée et zéros de la dérivée à la machine (syntaxe non indiquée). Factorisation précisée et signe de la dérivée justifié par tableau de signes (signe du trinôme non rejustifié). Valeurs approchées des extremums calculées. Singularité repérée. Sens de variation non justifié.

Limites : calculées à la machine, pas de justification donnée.

Tableau de variation : correct.

Fenêtre : Adaptée : [-16,7]x[-18,100]

Tracé : Recopie d'écran peu soignée, asymptote marquée, parabole asymptote non tracée mais tracée à l'écran.

Polynôme : Utilise la commande *Expand* pour obtenir : $f(x)=\frac{175}{4(x-2)}+x^2+8x+16$. Puis justifie le choix de $x^2+8x+16$: "Le terme $\frac{175}{4(x-2)}$ a pour limite 0 lorsque $x \to -\infty$. Si l'on ne considère que le polynôme $x^2+8x+16$, "l'erreur" entre ce polynôme P et f(x) ne sera que de $\frac{175}{4(x-2)}$. Or au voisinage de $-\infty$, cette erreur est pratiquement nulle. Donc $P = x^2+8x+16$. P est asymptote à f au voisinage de $-\infty$. Il en est de même au voisinage de $+\infty$."

Dans l'entretien, pour l'exercice 1, il dit qu'il a essayé de développer en utilisant les formules de trigonométrie de la machine mais avoue avoir tourné en rond et avoir fini par passer à la suite. Pour l'exercice 2, il fait état au départ d'une utilisation standard, il précise qu'il n'a même pas justifié les limites car il n'avait pas bien lu (!). Il a fait la question 5 avant la 4, car il n'avait pas d'idée, en choisissant d'abord une très grande fenêtre [-100,100]x[-1000,1000] pour bien voir, puis en utilisant *ZoomBox* pour encadrer la partie la plus intéressante. Il est revenu ensuite à la question 4 et il explique qu'il a pensé à *Expand* à cause des limites et que ça lui a donné ce qu'il voulait.

Gérard :

- Equivalence d'expressions : "Les expressions sont les mêmes, même s'ils sont sous des formes différentes car la calculatrice résout différemment de nous."
- Calcul dérivée et étude des variations : Pas de calcul de dérivée. Entre la fonction dans Y=, puis utilise TABLE pour repérer le sens de variation et les singularités. Pas de repérage des extremums locaux négatifs. Donne un minimum vers 3.68.

Limites : Calcul à la machine. Décomposition en somme de trois termes et écriture des limites de chaque terme en $+\infty$ et $-\infty$, sans explication ni conclusion.

Tableau de variation : Fonction décroissante sur $]-\infty,2[$, valeurs des extremums approchées (3.68, 85), sans mention d'approximation.

Fenêtre : Adaptée : [-20,15]x[-300,400]

Tracé : Points correspondants aux valeurs de 5 en 5 ainsi que x=2.5, non joints (9 points). Non compatible avec le tableau de variation.

Dans l'entretien, il déclare qu'il n'est pas resté longtemps sur la recherche de l'exercice 1 car le second lui semblait long. Pour lui, la machine ne calcule pas comme nous et c'est tout. Pour l'exercice 2, il dit tout de suite qu'il s'est trompé car il a fait le tableau de variation d'abord. Il l'a fait en rentrant la fonction dans Y=, en la faisant tracer et en faisant un *ZoomFit*, puis en utilisant TABLE. Les limites ont été faites à la machine et il les a un peu justifiées, dit-il. Il a sauté ensuite à 5 et 6 qui lui semblaient plus faciles, il a fait un *ZoomFit* sur [-20,15] mais il a réduit un peu car «ça allait un peu trop en dessous ». Il n'a pas eu le temps de revenir à la question 4.

Serge :

- Equivalence d'expressions : "$-\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$ d'où les différentes écritures."
- Calcul dérivée et étude des variations : Dérivée donnée sans indication. Signe correct au vu du tableau de variation mais non justifié. Sens de variation non justifié.

Limites : Limites calculées à la machine (syntaxe non précisée), pas de justifications.

Tableau de variation : Correct, limites non marquées et valeurs approchées des extremums non précisées.

Fenêtre : Adaptée : [-25,25]x[-366,843]

Tracé : Recopie écran peu soignée, mention de l'asymptote et tracé du graphe de $f(x)=x^2$

Polynôme : "$f(x)\approx x^2$" et justification par les limites à l'infini.

Dans l'entretien, il dit avoir testé l'égalité après avoir montré que $\cos(-\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{3})$. Dans l'exercice 2, il a utilisé la machine pour calculer f', f'(0) et des limites. Il déclare avoir trouvé la fenêtre un peu au hasard en faisant des *ZoomFit* sur plusieurs intervalles pour x jusqu'à ce que ça soit bien.

Vincent :

- Equivalence d'expressions : "Quand on met sur la machine Solve (3cos(3x+ $\frac{\pi}{3}$) = - 3sin(3x- $\frac{\pi}{6}$), elle vous répond *true.*"
- Calcul dérivée et étude des variations : Calcul de la dérivée par 2nd8; factorisation machine puis résolution à la main de l'équation du second degré. Repérage singularité et justification détaillée du signe de la dérivée par tableau de signes. Calcul machine des ordonnées des extremums (valeur exacte et approchée).

Limites : Calcul machine. Pas de justification. Asymptote précisée.
Tableau de variation : Correct avec valeurs exactes pour les extremums.
Fenêtre : Adaptée : [-20,20]x[-10,100]
Tracé : Recopie écran peu soignée, asymptote marquée.

Dans l'exercice 1, il déclare avoir testé l'égalité avec *Solve.* Dans l'exercice 2, il a utilisé la machine pour le calcul de f' et des limites. Il a obtenu le signe de f', dit-il, par *Factor* et il a utilisé un programme pour le calcul du discriminant.

Analyse :

- Lors de ce devoir spécifique, les élèves vont, dans leur majorité, passer beaucoup de temps sur le premier exercice et, au bout de vingt minutes, nous serons obligés de leur demander de passer à l'exercice 2. Tous arrivent à calculer la dérivée à la main et à la machine mais la plupart vont vouloir ensuite transformer le résultat machine en le résultat P/C, au lieu de chercher à faire l'inverse, comme Françoise ou de traiter le problème de façon plus symétrique, comme Vincent. On voit donc qu'il ne s'agit pas pour la majorité d'entre eux d'une tâche triviale et qu'il y a une réelle différence entre la capacité de calculer cos(x+π/2) et celle de mobiliser la propriété correspondante pour expliquer le passage d'une expression en cosinus à une expression en sinus lorsque le symbole π/2 n'est pas explicitement visible. Néanmoins, nous pensons qu'une instrumentation efficace de la TI92 dans le domaine trigonométrique suppose cette capacité.

➢ Pour ce qui est de l'exercice 2, on remarque une nette évolution dans l'utilisation de la TI92 pour l'étude des variations de la fonction. A part Michel qui n'a pas participé au devoir spécifique, et Gérard dont l'utilisation a été axée exclusivement sur les deux applications GRAPH et TABLE, tous les autres élèves semblent avoir intégré l'application HOME au moins partiellement à leur résolution. Tous ont calculé la dérivée en utilisant l'ostensif-TI92 correspondant. Cependant, nous avons distingué trois tendances stratégiques :

- tout d'abord, une stratégie qui consiste à calculer la dérivée, à la factoriser (à l'aide de l'ostensif *Factor*) puis à chercher les zéros d'un des deux facteurs obtenus qui est un trinôme du second degré à l'aide de *Zeros* (cas de Francis) ou *Solve* (cas de Georges). Enfin, l'étude du signe est basée sur l'ostensif-p/c qu'est le tableau de signes et sur le théorème donnant le signe d'un trinôme quand on possède ses zéros. Contrairement à Georges, Francis contrôle alors en faisant tracer les deux fonctions f et f '.

- ensuite, une stratégie qui consiste à calculer les zéros de la dérivée à l'aide de l'ostensif-TI92 *Zeros* (cas de Anne, Charles et Serge). Et alors que Anne et Charles étudient le signe à l'aide de l'application TABLE et du théorème-en-acte : "Entre deux zéros, le signe de f ' est constant", Serge continue à utiliser HOME en calculant f'(0) et en se basant sur le théorème-en-acte (alternance) : "la dérivée change de signe à chacun de ses zéros", en déduit le signe cherché.

- enfin, une troisième stratégie qui consiste à calculer la dérivée, à la factoriser (cas de Françoise) ou à factoriser son numérateur (cas de Vincent) dans l'application HOME. Mais à la différence de la première stratégie décrite ci-dessus, l'élève cherche les racines du trinôme du second degré (qui représente un des deux facteurs obtenus) en p/c via la "méthode du discriminant" ; ce qui rappelle la stratégie majoritaire au deuxième entretien. Enfin, l'étude du signe se fait également en p/c.

Nous remarquons donc une évolution évidente dans l'intégration de la TI92 à l'étude des variations. Ainsi, excepté Gérard qui semble régresser dans l'instrumentation de la machine dont il a une utilisation du type calculatrice graphique, tous les élèves suivis semblent répondre positivement à certains critères qui sont, à notre avis, indices d'une bonne genèse instrumentale pour le type de tâche en question (l'étude des variations d'une fonction) et pour l'artefact qu'est la TI92 :

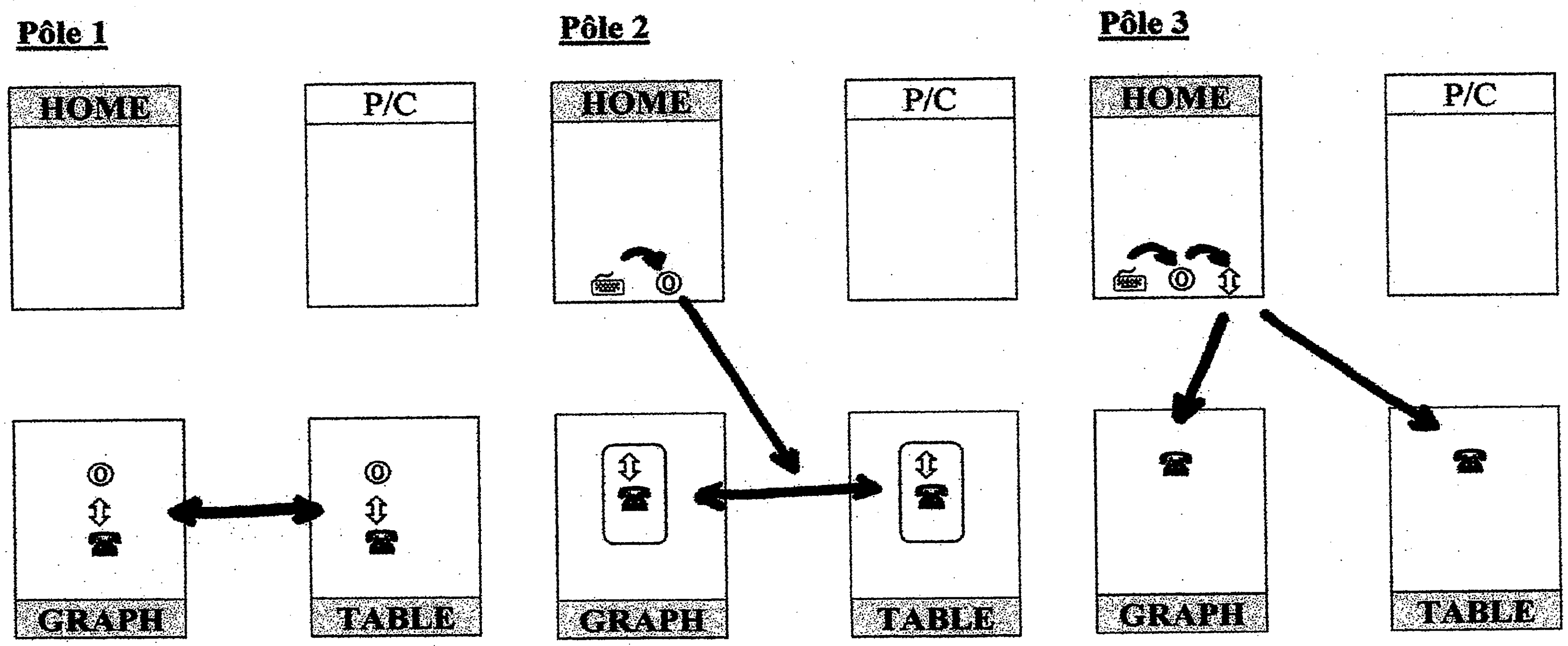
- une utilisation de l'application HOME qui dépasse le seul calcul de dérivée
- une utilisation des ostensifs *Zeros, Solve* ou *Factor* dans le cadre d'une stratégie d'étude de signe d'où sont absents des phénomènes tels que le *zapping* ou l'*oscillation*
- une stratégie épurée au sens où les techniques instrumentées interviennent de manière économique
- une stratégie centrée essentiellement sur l'application HOME et/ou sur le p/c, seuls environnements qui garantissent (à condition d'utiliser les bonnes techniques, bien sûr) des résultats exacts
- un mixage entre les anciennes techniques-p/c et les possibilités offertes par la TI92 pour la genèse de nouvelles techniques instrumentées économiques et efficaces (quand le contrat le permet). C'est ce qui s'est passé (pour Francis et Georges) concernant la sous-tâche d'étude de signe d'un trinôme du second degré : rappelons qu'au deuxième entretien, la forte *sémioticité* (au sens de Chevallard) de l'objet "trinôme du second degré" avait entraîné les élèves à utiliser la technique-p/c du "discriminant" alors qu'elle était d'une *instrumentalité* (au sens de Chevallard) bien inférieure à celle de l'ostensif-TI92 qu'est *Zeros* par exemple. En fait, les élèves oscillaient entre deux techniques et n'arrivaient pas encore à les mixer pour construire une nouvelle technique, ce qui est bien visible chez Francis et Georges lors du devoir spécifique : la recherche des racines se fait à l'aide de la TI92 puisque beaucoup plus rapide, tandis que l'étude du signe se base sur le théorème du cours sur "le signe d'un trinôme du second degré" qui est immédiat à appliquer. Par cette genèse instrumentale, où le rapport personnel à l'artefact-TI92 (et à l'ostensif *Zeros* par exemple) évolue, c'est le rapport personnel à l'objet mathématique "équation polynomiale du second degré" même qui évolue, où d'un objet qui semblait isolé avec des techniques spécifiques, il se mue en un objet qui

fait partie d'une classe plus générale : celle des équations (polynomiales, par exemple) qui peuvent être résolues (dans les limites permises par la machine) à l'aide du même ostensif : *Zeros* (ou *Solve*).

Par ailleurs, tout au long des deux premiers entretiens et de ce devoir spécifique, il nous semble que l'on peut dégager grossièrement certaines tendances globales dans l'instrumentation de la TI92 pour l'étude de la variation des fonctions, en dépit de différences sensibles liées à la fois aux connaissances mathématiques des élèves et à leur rapport aux technologies informatiques. Une de ces régularités se traduit notamment par l'existence de trois principaux pôles stratégiques d'étude instrumentée de la variation des fonctions (Cf schéma ci-après) :

- un premier pôle de type « pré-analyse » caractérisé par la non utilisation de la dérivée et le recours privilégié aux applications GRAPH et TABLE,
- un deuxième pôle intermédiaire caractérisé par une étude graphique de la variation intégrant la dérivée mais une utilisation limitée de l'application HOME,
- un troisième pôle enfin de type « analyse » caractérisé par une intégration plus poussée de l'application HOME et un changement de statut des applications GRAPH et TABLE qui, d'outils essentiels de résolution deviennent des outils d'anticipation et de contrôle.

TROIS PÔLES STRATEGIQUES



- Calcul de f'
- ◎ Recherche des zéros de f' (ou des extrema de f)
- ⇳ Etude du signe de f' (ou des variations de f)
- ☎ Contrôle

- Pour ce qui est de la recherche des limites, les réponses des élèves montre que la tâche est moins routinière. Tous les élèves, sauf Charles (qui ne calcule pas du tout les limites), utilisent visiblement l'ostensif *limit*. Les essais de justification fournis pour la limite en 2 (Cf Anne, Francis ou Gérard) montrent que le simple fait de pouvoir trouver les limites à la machine est loin de suffire à comprendre les limites, ni à produire les justifications attendues bien que les élèves voient dans ce domaine - qu'ils maîtrisent mal manifestement - un des domaines principaux où la machine les a aidés (cf. Questionnaire bilan - Annexe 10)
- Les tracés p/c sont en général (sauf pour Francis dont la copie ne comportait pas de tracé) peu soignés mais corrects et la distinction courbe / asymptote est bien marquée (excepté pour Françoise). Gérard, quant à lui, ne joint pas les points marqués, peut-être a-t-il perçu la contradiction entre son tableau de variation et le tracé que lui fournissait la machine..

- En ce qui concerne la choix de la fenêtre, tous les élèves suivis (sauf Charles qui, bien que n'ayant rien proposé par écrit, semble avoir trouvé une fenêtre adéquate si l'on considère son tracé p/c) arrivent à proposer une fenêtre adaptée, mais nous pouvons les classer en trois catégories :

    - Anne, Gérard et Serge : qui prennent a priori une fenêtre très grande dans l'esprit d'un *ZoomOut,* ce qui représente une stratégie grossière au sens où elle ne prend pas en compte l'étude algébrique déjà disponible

    - Francis et Françoise : qui effectuent un *ZoomFit* sur [-10;10], ce qui représente une stratégie qui se situe davantage dans l'évolution de l'instrumentation en classe (cf. *Dimension Institutionnelle*). Francis a, de plus, effectué un changement de [ymin ; ymax] de façon à réduire à peu près de moitié cet intervalle

    - Georges et Vincent : qui appliquent la stratégie la plus fine en tenant compte de l'étude de variation effectuée antérieurement, notamment des zéros de la dérivée trouvés et des valeurs approchées correspondantes

- La question relative à la parabole asymptote n'est traitée que par deux élèves : Georges qui propose un raisonnement parfait et Serge qui prend en compte uniquement l'ordre et propose x^2. Pour les autres, le facteur temps a sans doute été déterminant, les élèves choisissant en priorité de répondre aux questions qu'ils savaient faire, dans une stratégie très raisonnable pour le contrôle.

Partie 3 : Etude de la fonction f

Nous allons d'abord reconstituer pour chaque élève, brièvement l'historique de l'entretien, avant d'essayer de faire une synthèse.

Anne :

Conjectures :

Fonction périodique ; questionnée sur la période, elle propose 2π mais dit ne pas trop savoir. Fonction paire «car elle se reproduit par rapport à l'axe des ordonnées ». Questionnée sur le sens de variation, elle décrit les alternances de croissance et décroissance sans préciser les intervalles sur x correspondants, malgré la sollicitation en ce sens de l'interviewer. Pour les maxima, elle dit : environ 1.5 et sollicitée de préciser, elle propose de regarder dans TABLE, prend la valeur pour x=3 et conclut que c'est à peu près : 1.4. L'interviewer demande si le maximum est vraiment obtenu pour x=3, elle reprend le graphique, trouve que c'est à peu près ça, fait calculer dans HOME f(3) et ne voit pas d'autre moyen. Interrogée sur la dérivabilité, elle ne semble pas bien comprendre la question, évoque croissance et décroissance puis dit ne pas savoir le voir sur le graphique.

Preuves :

Périodicité : elle écrit ce qu'elle doit démontrer mais n'arrive pas à transformer l'expression et conclure sans aide.

Parité : elle fait calculer f(-x) dans HOME et conclut.

Sens de variation, dérivabilité : elle fait calculer la dérivée dans HOME, remarque que le dénominateur est positif et donc qu'il suffit d'étudier le signe du numérateur, mais ne sait pas trop comment faire avec sin(2x). L'interviewer essaie sans succès de l'aider en la ramenant au graphe de f (elle repasse aux valeurs entières sans faire le lien avec des multiples de π) puis passe à la suite.

Comparaison avec la fonction cosinus : questionnée, elle pense seule à la fonction cosinus. Sur le tracé, elle remarque que le maximum n'est pas le même, va calculer f(0) dans HOME, puis propose de mettre le cosinus au carré pour n'avoir que des valeurs positives. L'interviewer lui propose plutôt de chercher à transformer l'expression initiale et, comme elle ne sait pas, lui montre comment transformer avec t*Expand* la quantité sous le radical. Puis il l'aide à passer à l'expression en valeur absolue.

Charles :

Conjectures :

Fonction périodique de période π «parce que c'est à peu près trois unités ». « Courbe toujours au-dessus de l'axe des x », reformulé en fonction positive, sur sollicitation de l'interviewer. Croissante et décroissante, par exemple décroissante sur [0, π/2] et croissante sur [π/2, π]. Fonction « qui n'a pas une grande amplitude », reformulé en « qui a une limite », « qui a une valeur maximale », maximum f(0) et minimum 0. Questionné sur les symétries, il dit qu'il y a plusieurs axes de symétrie, par exemple l'axe des ordonnées ou x=3π/2. L'interviewer lui demande ce que l'on peut en conclure sur la fonction, il répond qu'elle est paire. Pour lui la fonction est définie en tout point « puisque la calculatrice ne trace pas d'asymptote » et elle est aussi dérivable en tout point, parce qu'il n'y a pas de problèmes comme « s'il y avait des valeurs en +∞ ».

Preuves :

Périodicité : il propose de montrer que f(-π)=f(π). L'interviewer lui rappelle la définition de la périodicité. Il écrit alors $f(x+\pi) = \sqrt{1+\cos 2x} + \pi$. l'interviewer l'aide à corriger puis lui suggère d'utiliser la TI. La machine renvoie $\sqrt{\cos(2(x+\pi))+1}$. Il repasse en P/C écrit f(x+π) en oubliant les parenthèses autour de 2x+2π, et quand elles sont rajoutées n'arrive pas à conclure.

Sens de variation, dérivabilité : il calcule la dérivée et sur demande de l'interviewer déclare que la fonction est dérivable quand le dénominateur n'est pas nul. L'interviewer l'aide à déterminer les valeurs correspondantes.

Comparaison avec la fonction cosinus : Charles pense tout de suite au cosinus, tout en soulignant « qu'il ne rebondit pas pareil ».L'interviewer fait tracer la fonction cosinus et comparer les deux graphes, puis suggère de transformer l'expression de f pour mieux voir les rapports. Charles ne voit pas comment faire. L'interviewer transforme avec t*Expand* et demande d'utiliser l'expression pour comparer. Charles remarque le $\sqrt{2}$, en demande une valeur approchée et fait le lien avec f(0).

Francis :

Conjectures :

Fonction positive, peut-être nulle en certains endroits. Regarde avec Trace puis en utilisant la commande F5-Minimum. Après quelques essais, conclut « qu'elle ne descend pas en 0 ». Fonction périodique de période 3π (il pense que le premier minimum en $\pi/2$ n'a pas la même valeur que celui en $3\pi/2$). Change de fenêtre : [0,20]x[-1,2] au lieu de [-10,10][-1,2]. Il compare les minimums en $\pi/2$ et $7\pi/2$ et conclut que ça doit faire 3π car c'est entre 9 et 10. Utilise la commande Maximum pour voir s'il y a les mêmes maximums. Trouve les mêmes valeurs et conclut que c'est majoré par cette valeur : 1.4142136. Questionné sur la parité, il reprend la fenêtre antérieure et conclut qu'elle doit être paire « puisque de chaque côté, le deuxième minimum est à la même distance de l'origine ». Questionné sur le sens de variation, il reprend la fenêtre positive et veut regarder pour une période entre 0 et 3π. Il utilise la commande F5-Maximum pour comparer les valeurs des maximums extrêmes, ceci le conduit à xc=9.4111... Il fait calculer dans HOME une valeur approchée de 3π pour contrôler. Il donne ensuite le sens de variation sur l'intervalle en cherchant les minimums et maximums successifs avec les commandes correspondantes. Il repère que les variations « apparemment marchent par intervalles de π. ». Questionné sur la dérivabilité, il dit qu'il pense que oui parce que la racine est toujours définie. Sur le graphe, il dit qu'on ne voit pas très bien près des minimums. Il propose de faire un zoom, utilise ZoomBox (2fois) puis conclut que oui, elle est dérivable.

Preuves :

Périodicité : Démontre à la main que 3π est période puis, quand l'interviewer lui demande si c'est la plus petite, propose 2π et fait le calcul pour π. Justifie ensuite le fait qu'on ne puisse aller plus loin.

Parité : démonstration standard à la main avec référence au cercle trigonométrique.

Sens de variation, dérivabilité : calcule f' dans HOME et dit que le résultat est « barbare ». Sur question de l'interviewer, dit que la fonction est dérivable partout sauf peut-être aux points anguleux (terme introduit dans la fin de la phase de conjecture par l'interviewer), mais qu'il ne sait pas ce qui se passe en ces points : « je sais pas... la dérivée est nulle ? ». Fait ensuite le lien avec la non définition pour $\sqrt{\cos(2x)+1}=0$, mais ne va pas plus loin.

Comparaison avec la fonction cosinus : Questionné, évoque la fonction cosinus. L'interviewer lui demande de la faire tracer. Il repère la correspondance des maximums. L'interviewer lui propose alors de transformer l'expression. Il pense à aller dans Trigo et l'interviewer suggère de choisir t*Expand.* Francis l'applique à 1+cos(2x) et obtient $2(\cos x)^2$. Il commence à raisonner comme si c'était f et l'interviewer l'aide à passer à la valeur absolue.

Françoise :

Conjectures :

Fonction périodique, n'a pas d'idée a priori de la période mais montre deux minimums successifs. Questionnée sur une valeur numérique possible, elle dit qu'elle essayerait avec 2π. Fonction positive, avec un axe de symétrie (axe Oy), ce qui lui semble normal puisqu'elle est périodique. Questionnée sur les maxi et mini, elle dit que les maxi sont toujours les mêmes mais pas les mini (toujours les phénomènes de discrétisation). La fonction lui semble dérivable parce que « elle est pas coupée, il y a pas un point où elle est pas définie, quoi... ». L'interviewer résume les conjectures.

Preuves :

Périodicité : montre à la main que 2π est période. L'interviewer demande s'il en existe une plus petite. Françoise essaie π et conclut.

Parité : elle ne se souvient plus comment faire.

Sens de variation, dérivabilité : elle est effrayée à l'idée de calculer la dérivée. Encouragée à le faire à la machine, elle obtient la dérivée et s'arrête. L'expression lui paraît trop compliquée. Encouragée, elle formule que le dénominateur doit être toujours positif car le cosinus reste entre -1 et 0 et donc que f' a le signe du numérateur. Elle l'écrit, trace le cercle trigonométrique puis s'arrête. L'interviewer doit l'aider fortement pour la résolution de sin(2x)=0 puis la ramener à l'intervalle [-π,π] qu'elle choisit pour étudier la fonction. Elle passe de 2x=π+kπ à x=π/2+kπ et commence un tableau de variation en incluant les valeurs π/2 et -π/2 puis est de nouveau bloquée sur la détermination du signe de f'. L'interviewer le fait avec elle, après lui avoir indiqué son erreur dans le passage de 2x à x. Elle complète le tableau de variation, à partir du signe du numérateur de la dérivée et fait calculer en HOME les valeurs de f aux points marqués : -π, -π/2, 0, π/2, π. L'interviewer lui demande alors de vérifier les valeurs de la dérivée en ces points, puisqu'elle a tout fait avec le numérateur. Elle obtient un « undef » pour -π/2, est étonnée puis parvient à interpréter en revenant à l'expression de la dérivée. L'interviewer lui demande ensuite si ce qu'elle a fait lui permet de répondre à la question qu'elle s'était posée sur les minimums pendant la phase de conjecture : identiques ou non. Françoise repasse en GRAPH, utilise TRACE pour repérer les coordonnées, ne trouve pas 0 pour les minimums et n'arrive pas seule à faire le lien avec son tableau de variation. L'interviewer doit beaucoup l'aider. Ensuite il essaie de l'engager sur la voie de la tangente mais elle n'a pas d'idée.

Comparaison avec la fonction cosinus : l'interviewer lui propose de tracer la fonction $\sqrt{2}$ cos et de comparer les graphes, elle parle de coïncidence et de symétrie mais est visiblement fatiguée. Fin de l'entretien.

Georges :

Vérifie qu'il est bien en mode Fonction, entre la fonction dans Y= et la fait tracer dans la fenêtre standard.

Conjectures :

Fonction positive, périodique de période à peu près π (repère l'écart sur x entre deux minimums successifs, en fonction des graduations et trouve environ 1.5), maximum environ 1.5 et minimum 0 ou proche de 0. Remet en doute la période (mini, maxi pas exactement au même niveau) ; en déduit que c'est apparemment plutôt 2π mais que le tracé n'est pas assez précis pour être sûr. Propose de faire un zoom pour mieux voir et utilise *ZoomFit*. En déduit que la période est plus grande et utilise l'option TRACE pour suivre le tracé. En explorant les sommets et minima, conclut à une période de 3π et propose de le tester dans HOME. Il se dit que 2π devrait marcher puisque cos est de période 2π. L'interviewer résume les conjectures faites et interroge sur la parité et la dérivabilité. Au vu du graphe, dit qu'elle ne semble pas paire mais qu'au vu de l'expression algébrique, elle devrait l'être, Revient alors sur sa première impression graphique : « ça a l'air d'être vrai, elle admet comme axe de symétrie l'axe des ordonnées ». f lui semble dérivable partout « puisqu'elle a pas l'air de changer de signe trop rapidement, proche de 0 ou proche de l'infini ». L'interviewer montre les points anguleux. Georges se positionne avec TRACE à proximité du premier minimum positif, dit que le zéro a l'air d'être aux alentours de π/2, mentalement remplace dans l'expression algébrique, arrive à $\sqrt{0}$ et conclut à l'impossibilité, puis rit et dit que ça fait bien 0. L'interviewer interroge sur le sens de variation. Georges le lit sur $[0, \pi]$ puis dit qu'ensuite il suffit de faire des translations de vecteur π. L'interviewer résume l'ensemble des conjectures et Georges est d'accord.

Preuves :

Périodicité : fait calculer dans HOME $f(x+2\pi)$. La machine ne simplifiant pas, fait le calcul à la main et se rend compte que π peut aussi marcher. Conclut sur la période.

Parité : propose de faire vérifier $f(-x)=f(x)$. L'interviewer lui dit de passer à la suite.

Sens de variation, dérivabilité : fait dériver la fonction dans HOME, définit la dérivée et demande ses zéros. Obtient {@n3. π/2}. Interprète en $f'(x)=0$ pour $x= \pi/2+k.2\pi$. Commence le tableau de variation sur $[0, \pi]$, fait calculer $f'(0)$, $f'(\pi)$ et $f'(\pi/3)$, en déduit le signe de f' et termine le tableau de variation, en marquant 0 pour la valeur de $f'(\pi/2)$.

L'interviewer lui demande ce qu'il a trouvé pour la dérivée en $\pi/2$. Georges fait calculer dans HOME et obtient « undef ». Il rajoute une double barre verticale pour $\pi/2$, puis fait calculer f(0) et limite la double barre à f'. Interprète la non-définition de f' en repérant la nullité du dénominateur qui est f(x).

L'interviewer essaie de l'aider à analyser le point anguleux, en lui demandant quelle serait la tangente en ce point. Pour Georges, il y a deux tangentes mais ce n'est pas gênant. Il trace le graphe de la fonction cos et montre deux tangentes en deux points symétriques par rapport à l'axe (Oy), en disant qu'elle est dérivable et qu'on a bien la même chose avec deux tangentes. L'interviewer lui explique la différence.

Comparaison avec la fonction cosinus : questionné, Georges évoque la fonction cosinus et ensuite fait un lien avec $\sqrt{2}$ cosx. Il fait tracer et constate la coïncidence pour les parties positives, ce qui lui semble normal puisque la fonction racine ne peut pas être négative. Fin de l'entretien.

Gérard :

Conjectures :

Fonction périodique, pour la période propose 2π car il y a un cosinus. l'axe des y est axe de symétrie, mais ne sait pas faire le lien avec la parité seul. La fonction a d'autres axes de symétrie. L'interviewer interroge sur le sens de variation. Utilise les commandes F5-

Maximum et Minimum pour trouver les maxi et mini et conclut que les valeurs sont 1.41 et 0. Lit le sens de variation sur le graphe sans préciser les intervalles correspondants sur x. L'interviewer l'interroge sur la dérivabilité. Gérard répond : « oui, parce qu'elle est toujours pareille ». L'interviewer résume les conjectures.

Preuves :

Périodicité : entre en HOME l'égalité $f(x)=\sqrt{1+\cos(2x+4\pi)}$ et obtient : $\sqrt{1+\cos(2x)} = \sqrt{1+\cos(2x)}$. Conclut que 2π est période, puis essaie avec π, en rappelant l'égalité sur la ligne de commande et en la modifiant. Il obtient le même résultat et conclut que la période est π.

Parité : ne se souvient plus comment faire.

Sens de variation, dérivabilité : va regarder dans TABLE mais sans modifier Tblset. Commence un tableau de variation sur $[0, \pi]$, fait calculer la dérivée dans HOME, puis f'(0), f'(π) et f'(π/2:), en utilisant la syntaxe « tel que : |). Rajoute $\pi/2$ dans le tableau de variation et une double barre. Fait calculer f'(π/4) et rajoute cette valeur dans le tableau de variation. Repasse en GRAPH, change la fenêtre en faisant *ZoomFit* sur $[0, \pi]$. Repasse en HOME, cherche une valeur entre $\pi/2$ et π pour calculer la valeur de la dérivée en ce point mais a du mal. L'interviewer lui propose $3\pi/4$. Il continue et en déduit le signe de la dérivée sur $[0, \pi]$. Complète le tableau de variation (maxi : 1.41 qu'il va rechercher dans TABLE). L'interviewer demande la valeur exacte. Gérard la fait calculer dans HOME. Fait calculer $f(\frac{\pi}{2})$, trouve 0 et est étonné car il se souvient avoir eu « undef ». Se rappelle que c'était pour la dérivée. L'interviewer le confronte à sa conjecture sur la dérivabilité et le fait revenir au tracé. Gérard explique que oui, ce n'est pas dérivable « parce qu'il y a un petit intervalle entre les deux » (problème de discrétisation au voisinage du minimum). L'interviewer lui demande s'il y a une tangente. Gérard utilise l'ostensif *Tangent* du menu GRAPH-F5 de la TI et obtient le message : « no solution »., il en conclut qu'il n'y a pas de tangente en ce point.

Comparaison avec la fonction cosinus : questionné, Gérard l'évoque spontanément. L'interviewer l'aide à trouver le coefficient multiplicatif et lui demande de tracer la fonction $\sqrt{2}$ cos. Il doit l'aider à formuler les rapports entre les deux fonctions, puis lui explique que la non-dérivabilité n'est pas liée au saut apparent comme il le pensait et comment utiliser la fonction auxiliaire pour trouver les coefficients directeurs des demi-tangentes.

Serge :

Conjectures :

Fonction périodique. En utilisant TRACE, repère $-\pi/2$ et $\pi/2$ et conjecture que la période doit être π. Questionné sur la parité, dit qu'il ne se souvient pas. L'interviewer lui rappelle les définitions et interprétations graphiques et il conclut que la fonction doit être paire. Questionné sur le sens de variation, il le décrit sur $[0,2\pi]$. Pour trouver les valeurs des extrema, il va dans TABLE et lit la valeur en 0, puis va dans TblSet, modifie le pas en le choisissant égal à $\pi/2$ et lit les valeurs correspondantes dans TABLE (les valeurs minimales données sont 0). Questionné sur la dérivabilité, il répond d'abord « oui » et passe dans HOME. Il fait calculer la dérivée, l'entre dans Y=, la fait tracer puis affiche les valeurs dans TABLE et conclut à la non-dérivabilité en $\pi/2$. Il dit ne pas savoir le voir sur le tracé.

Preuves :

Périodicité : il fait calculer dans HOME $f(x+\pi)$ et obtient $\sqrt{1+\cos(2(x+\pi))}$. Il dit que ça fait $f(x)$ parce que « chaque fois qu'on a π on revient à la valeur ». L'interviewer lui demande de justifier plus précisément ; il détaille le calcul puis conclut.

Parité : écrit sur sa feuille $f(-x)=f(x)$ et $f(-x) = \sqrt{1+\cos\text{-}2x}$ puis ne voit pas comment continuer. L'interviewer lui rappelle qu'il peut utiliser la TI. Il fait calculer $f(-x)$ et obtient : $\sqrt{(\cos 2x)+1}$. Il constate l'égalité mais se demande comment on arrive à ce résultat. L'interviewer l'aide à voir que cela revient à montrer que $\cos(-2x) = \cos 2x$ et, à ce moment là, il continue seul.

Sens de variation, dérivabilité : il hésite et l'interviewer lui suggère de travailler sur $[0, \pi]$. Il fait alors calculer dans HOME $f(0)$, $f(\pi/2)$ et $f(\pi)$, puis commence à tracer un tableau de variation complet sur cet intervalle. Il met d'abord 0 pour $f'(\pi/2)$ mais corrige très vite et trace la double barre d'indétermination. L'interviewer lui demande s'il peut justifier le signe de la dérivée. Serge ne répond pas. Il lui demande ensuite pourquoi il a mis la double barre en $\pi/2$. Serge répond qu'il l'avait vu tout à l'heure. Il repasse dans TABLE pour vérifier puis dans HOME et, sollicité, arrive à justifier la non-définition à partir de l'expression algébrique de la dérivée. L'interviewer lui demande s'il pouvait le voir sur les tracés, il répond qu'il ne voit pas trop.

Comparaison avec la fonction cosinus : l'interviewer lui fait alors désélectionner f' et lui demande si le tracé de f ne lui rappelle pas une fonction connue. Il n'a pas d'idée.

L'interviewer lui suggère alors de transformer l'expression de f dans HOME. Serge hésite entre t*Expand* et *tCollect*, choisit la seconde et obtient la même expression. Encouragé à utiliser l'autre, il arrive à $\sqrt{2}\ |\cos x|$ et dit qu'il ne comprend pas. L'interviewer l'aide à piloter la machine pour obtenir le détail des calculs. L'entretien se termine par la comparaison avec le tracé de cosx, en s'appuyant sur cette nouvelle forme.

Vincent :

Conjectures :

Fonction périodique de période π ("car les arches se reproduisent tous les π"), fonction positive. Pour déterminer le maximum, utilise la commande Maximum du menu F5 mais a besoin de l'interviewer pour définir l'intervalle de recherche (ne comprend pas le sens de *lowerBound*) et choisit [0,1.5], confondant intervalle sur x et sur y. Il utilise également *ZoomBox* pour contrôler. L'interviewer lui demande s'il peut calculer la valeur exacte, ce qu'il fait en faisant calculer dans HOME f(0). Pour les minimums, il utilise également la commande Minimum du menu F5, cette fois sur l'intervalle [0, π] et trouve une valeur approchée non nulle. Questionné sur le sens de variation, il le décrit sur [-π/2, π/2]. L'interviewer sort du cadre prévu en lui faisant calculer la valeur exacte du minimum f(π/2) et en lui expliquant pourquoi ce n'est pas la valeur qu'il a trouvée par F5. Questionné sur la dérivabilité, il dit ne pas savoir la reconnaître sur le tracé.

Preuves :

Pour des raisons d'horaire scolaire, la partie preuve de cet entretien n'a pu disposer du temps normalement imparti.

Périodicité : justification correcte à la main de la période π.

Parité : non mentionnée

Sens de variation, dérivabilité : néant

Comparaison avec la fonction cosinus : Vincent ne voit pas de rapport a priori avec le tracé d'une fonction connue.

Synthèse :

Dans les tableaux ci-après, nous synthétisons les informations issues de ces différents entretiens.

	Périodicité	Parité	Sens de variation, Mini, Maxi	Dérivabilité
Anne	2π?	oui car se reproduit / Oy	~1.5 (gr) ~1.4 (tble)	ne voit pas
Charles	π	plusieurs axes de symétrie et parité	0 et f(0) variation sur [0, π]	oui
Francis	3π (doute = maxi, mini)	oui car mini équidistants de O	valeurs approchées par F5, variation sur [0, 3π]	oui et vérifie par zoombox
Françoise	2π?	symétrie /Oy donc paire, pério⇒paire	maxi identiques, mini différents (gr)	oui
Georges	π (doutes = mini, maxi) - 2π - 3π - 2π?	non (gr)-oui (exp) - oui (gr)	~1.5 (tr), ~0 (tr) puis 0 variation sur [0, π]	oui
Gérard	2π	symétrie /Oy	1.41 et 0 par F5 variation sans valeurs de x exactes	oui
Serge	π	oui aidé	valeurs approchées par TABLE variation sur [0,2π]	oui puis non après calcul HOME
Vincent	π		valeurs approchées par F5 - variation sur [-π/2, π/2]	ne voit pas

Les conjectures

	Périodicité	Parité	Sens de variation	Non-dérivabilité
Anne	P/C n'y arrive pas seule	calcul de f(-x) dans HOME	ne sait pas étudier signe de sin(2x)	non abordé
Charles	f(-π)=f(π) puis aide lourde	non abordé	non abordé	algébrique sur intervention
Francis	3π en P/C puis 2π et π sur intervention	démonstration P/C	non abordé	algébrique sur intervention
Françoise	2π en P/C, π sur intervention	ne sait pas	signe f' P/C très aidée pb liaison Tableau de variation et graphe	algébrique sur intervention
Georges	HOME puis P/C réduit à π	HOME f(-x)=f(x)	HOME : zéros f' et valeurs, alternance	algébrique sur intervention
Gérard	HOME: test égalité réduction à π	ne sait pas faire	HOME : valeurs partic. de f' et alternance	algébrique gr : non car saut
Serge	HOME puis P/C sur intervention	f(-x)=f(x) puis aide	au vu du graphe	algébrique
Vincent	P/C correct	non abordé	non abordé	non abordé

Les preuves

	HOME	Y=	WINDOW	GRAPH	TblSet	TABLE
Anne	**define f(x)* *~*f(3)* pour maxi	*y1=f(x)*	*[-2,2]x[-2,2]* pour voir			pour maxi
Charles		*entrée f*				
Francis	**define f(x)* *~ pour variations	*y1=f(x)*	**[0,20]x[-1,2]* pour périod. puis pour variations **[-10,10]x[-1,2]* pour parité	**Trace* et *F5Mini* pour f ≥ 0 **F5Maxi* pour maxi puis pour variations **F5Mini* pour variations **ZoomBox* pour Df'		
Françoise	*define f(x)*	*y1=f(x)*		*ZoomFit*		
Georges	*define f(x)*	*y1=f(x)*		**ZoomFit* puis *Trace* pour périod. **Trace* pour Df'		
Gérard	*define f(x)*	*y1=f(x)*		* *ZoomFit* **F5Maxi* pour maxi **F5Mini* pour mini		
Serge	*define f(x)* *df(x),x)*	*y1=f(x)*		* *Trace* pour périod	pour val. particul. et Df'	*pas π/2 pour valeurs part. ≠0
Vincent	**define f(x)* **f(0)* et *f(π)* pour maxi **f(π/2)* pour mini	*y1=f(x)*		**F5Maxi* puis *ZoomBox* pour maxi **F5Min* pour mini		

Commandes utilisées pendant la phase de conjectures

	HOME	WINDOW	GRAPH	TABLE
Anne	**d(f(x),x)* **f(-1)* et *f(-2)* pour Df **f(-x)* pour parité **~f'(3)* pour variations			
Charles	**f(x+π)=* **d(f(x),x)* pour Df'			
Francis	*d(f(x),x)*			
Françoise	**d(f(x),x)* **f(-π),f(-π/2),f(0),f(π/2),f(π)* *Define df(x), f'(0), f'(-π/2* pour variations		*Trace* pour mini	
Georges	**f(x+2π)* **d(f(x),x) Zéros df* *f'(0),f'(π),f'(π/3),f(0)* pour variations			
Gérard	**f(x)=√1+cos(2x+4π)* **d(f(x),x)* *f'(0),f'(π),f'(π/2),f'(3π/4),f(0),f(π/2)* pour variations	**Xmin=0 Xmax=π* *ZoomFit* pour variations **F5-A-Tangent* pour Df'	*ZoomBox*	(2) pour variations et contrôle de f(0)
Serge	** f(x+π)=* **f(-x) =* **f(0),f(π/2)* et *f(π)* pour variations **df(x)* pour Df'		Cf et Cf' pour extrema	pour Df'
Vincent	** √(0)* pour Df			

Application et Commandes utilisées pendant la phase de justifications

<u>Analyse</u> :

Dans cette troisième partie, concernant l'étude de la fonction, on ne peut que constater la déstabilisation produite par le choix de la fonction comme par le dispositif adopté. Ainsi :

- Dans les conjectures, la périodicité est identifiée, mais elle n'est pas toujours exprimée par rapport à π, de plus, on peut penser que les réponses 2π données suite aux demandes de précision de l'interviewer sont sans doute simplement liées à la présence du cosinus et non le reflet d'un réel raisonnement. Certains élèves (cf. Charles, Francis et Georges) ont cependant conjecturé la période en comptant les graduations à l'écran, ce qui met en jeu deux types de connaissances : une connaissance-machine de niveau 2 (qui consiste en la prise en compte du pas *xscl* ou *yscl*) et les connaissances mathématiques qui se traduisent par la reconnaissance du type de fonction (trigonométrique en l'occurrence) et par l'approximation numérique du nombre π. La propriété de parité semble être passée à l'arrière-plan des préoccupations dans l'étude des fonctions, tout en restant liée à l'idée de symétrie par rapport à l'axe Oy. La variation est correctement lue, ce qui semble naturel, mais on ne note pas le souci en général d'aller au delà des valeurs approchées fournies dans la fenêtre graphique. Le recours aux commandes Maximum et Minimum du menu F5 est fréquent et l'on peut se demander si, pour certains élèves, il n'y a pas l'idée que ces commandes spécifiques fournissent des valeurs exactes, ce qui signifierait que la connaissance-machine de niveau 3 :"les valeurs trouvées dans l'application GRAPH sont approchées a priori" n'est pas disponible, bien que cela ait été pris en charge par l'enseignante (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 2*). Par ailleurs, l'application TABLE n'a été utilisée que par deux élèves : Anne et Serge. Ce dernier, contrairement à Anne, a adapté *TblSet* en prenant un pas égal à $\pi/2$, ce qui lui a permis d'avoir des valeurs des extrema plus efficaces que celles qui peuvent être trouvées dans GRAPH. Il mobilise ainsi une connaissance-machine de niveau 2 qui est elle-même sous-tendue par la connaissance mathématique consistant en la reconnaissance du type de fonction en question. Vincent quant à lui, est le seul à avoir des difficultés à manipuler l'ostensif *F5-Minimum*, demandant à l'interviewer ce que voulait dire *"LowerBound"* (ce qui se situe au niveau 1 des connaissances-machine). Enfin, soulignons la non reconnaissance graphique de la non dérivabilité au point anguleux, avec des élèves qui disent ne pas savoir comment conjecturer la dérivabilité au vu du graphe et d'autres élèves qui eux affirment qu'il y a dérivabilité parce qu'en gros c'est "*une bonne fonction partout définie, qui ne saute pas*".

- Dans les preuves, le choix majoritaire du travail P/C pour la périodicité est conforme à la stratégie a priori. Ceci, comme les conduites au contrôle, nous incite à penser que les élèves ont pris conscience des limites de la machine dans ce domaine et de la difficulté de la piloter efficacement et ne cherchent pas vraiment à bien l'instrumenter dans ce domaine. Il n'est d'ailleurs pas surprenant que ce soit Gérard qui arrive à se débrouiller pour faire produire le résultat à la machine. Les difficultés rencontrées avec la caractérisation algébrique de la parité chez plusieurs élèves confirment d'autre part ce qui était apparu dans la phase de conjectures. En ce qui concerne la justification du sens de variation, on ne peut que noter la forte déstabilisation liée à la complexité de l'expression à gérer. Sur ce plan, les différences avec l'entretien 2 et avec le contrôle spécifique sont manifestes. La stratégie standard qui semblait en place : définition de la dérivée, recherche des zéros par *Solve*, *Factor* ou *Zéro*, n'est utilisée ici que par Georges tandis que Serge et Gérard en reviennent à TABLE pour l'étude des variations. Ceux qui finalement vont le plus loin de façon autonome, dépassant la seule lecture graphique, sont ceux qui utilisent le principe d'alternance. Le travail sur la dérivée, même s'il n'aboutit pas, conduit souvent à la reconnaissance de la non-dérivabilité algébrique aux minimums, mais on notera la difficulté que les élèves rencontrent à articuler ici le point de vue algébrique et le point de vue graphique et la faible sensibilité aux incohérences.

Enfin, la mise en relation avec la fonction $\sqrt{2}$ cosx, même aidée, dépasse visiblement les compétences de presque tous les élèves et les tentatives de liaison font apparaître les difficultés bien connues que rencontrent les élèves avec la notion de valeur absolue (cf. [Perrin-Glorian M.J., 1997] par exemple).

Conclusion:

La partie 1 montre une utilisation standard et raisonnable dans l'étude de la fonction trigonométrique, des disparités certaines au niveau de l'instrumentation concernant les suites, sans aucun doute liée à la nouveauté du sujet ainsi qu'au type de contrat qui prévalait.

Lors du devoir spécifique, nous avons remarqué une évolution certaine dans l'utilisation de la machine chez les élèves suivis, où d'une part l'instrumentation a été plus efficace par la mise en jeu économique d'ostensifs-TI92 ; d'autre part, l'instrumentalisation a été plus équilibrée par l'articulation des deux environnements p/c et TI92 et le statut donné aux différentes applications dans l'activité. Cependant, dans la partie 3 ci-dessus, nous observons un éclatement de l'équilibre qui paraissait s'installer jusque là. Cela semble dû à la combinaison de plusieurs facteurs : tout d'abord, le fait que la fonction en jeu soit trigonométrique est une perturbation importante que ce soit au niveau mathématique (où les connaissances liées aux propriétés de ce type de fonction sont encore fragiles) ou au niveau de la machine (où les commandes spécifiques telles que *tExpand*, les ajustements du pas dans TblSet sont loin d'être familiers) ; ensuite, le scénario même de cette partie de l'entretien était nouveau pour les élèves, où il leur fallait formuler des conjectures sur les propriétés de la fonction avant de les justifier ; enfin, les phénomènes graphiques dus aux contraintes internes qui sont apparus ici, qui ne sont pas spécifiques aux fonctions trigonométriques et qui demandent des connaissances-machine de niveau 3.

Tout cela nous montre l'importance pour la genèse instrumentale non seulement de l'évolution du rapport personnel aux objets mathématiques, mais également de la prise en charge institutionnelle de la machine, sans quoi la puissance et la complexité de la TI92 tend à s'ériger en obstacle dans l'activité de l'élève au lieu de compléter efficacement le travail p/c.

Genèses instrumentales :

Jusqu'à présent nous avons analysé l'évolution globale de l'instrumentalisation et de l'instrumentation de la TI92 chez les élèves suivis en procédant entretien par entretien. Nous allons maintenant essayer de mettre en évidence la genèse instrumentale de chacun de ces élèves. Par conséquent, et afin de mieux percevoir les processus qui accompagnent ces genèses instrumentales, il nous paraît sensé de fixer la tâche mathématique à résoudre : ce sera bien évidemment celle de l'étude de variation à laquelle nous adjoignons celle du cadrage. Cependant, nous pensons qu'il n'est pas judicieux de considérer la tâche qui était au centre du troisième entretien, étant donné que le type de fonction et le scénario même étaient assez différents et relativement nouveaux pour perturber (cf. analyses de l'entretien 3) profondément le travail des élèves et pour amoindrir l'effet de la routinisation. En effet, il nous semble que pour pouvoir accéder à la genèse instrumentale d'un élève, il faut réduire l'influence du facteur "nouveauté" autant que possible. Ainsi, on aurait davantage la possibilité de distinguer les raisons dues à l'utilisation de la machine de celles dues aux objets mathématiques qui entrent en jeu. Certes, dans le troisième entretien, la modification de certaines variables de la tâche (notamment le type de fonction et le scénario) a crée des perturbations importantes dans le travail des élèves (cf. analyses de l'entretien 3) mais tel en était l'objectif justement : tester la résistance et la stabilité des stratégies et techniques instrumentées. En ce sens, cet entretien n'était pas dans la lignée des deux premiers et du devoir spécifique. Tout ceci nous amène à ne considérer que la tâche d'étude de variation (y compris le cadrage) dans les deux premiers entretiens et en devoir spécifique.

Anne :

Entretien 1

<u>Cadrage</u>

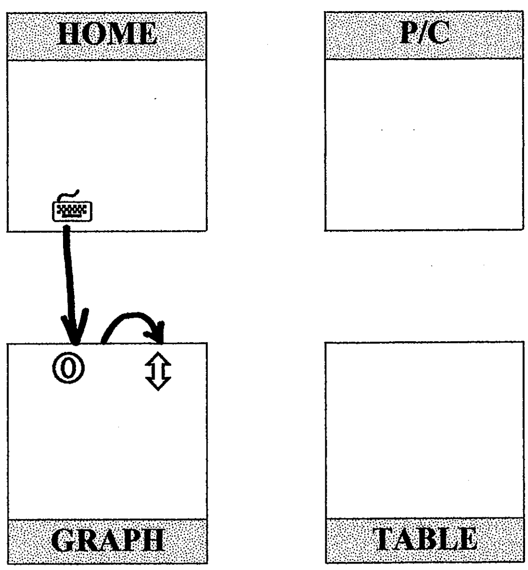
Hormis la fenêtre initiale, Anne a mis en œuvre des changements dans WINDOW exclusivement, en se basant sur des critères perceptifs et sur les allures de fonctions rencontrées auparavant en classe, telles que les paraboles.

<u>Etude des variations</u>

Anne a une utilisation de la TI92 qui se situe autour du deuxième pôle stratégique (Cf Analyse - Devoir spécifique), où c'est l'application graphique qui est l'application centrale dans la résolution. L'utilisation de l'application HOME est limitée au calcul de la dérivée, ce qui mobilise une connaissance-machine de niveau 1 puisque les seules contraintes sont d'ordre syntaxique. Par ailleurs, la stratégie d'étude est graphique et en dehors de la définition de la fonction (dérivée) à tracer dans Y=, la seule technique mise en œuvre est la lecture à l'œil nu. Cette technique est d'autant plus fruste qu'elle ne tient pas compte des informations contenues dans WINDOW (niveau 2 des connaissances-machine) comme le pas des graduations qui intervient dans l'évaluation des zéros dans GRAPH. Cette utilisation est héritée des techniques anciennes développées autour de la calculatrice graphique et qui n'étaient vraisemblablement déjà pas élaborées, puisque l'utilisation était plus numérique que graphique et que Anne n'avait même jamais utilisé le *zoom* par exemple (cf. Annexe 8 - Questionnaire 1).

Remarquons par ailleurs que Anne, par la mobilisation de connaissances mathématiques a réduit les difficultés dans l'interprétation du graphique qui étaient liées à la singularité. En effet, le fait qu'elle ait réduit l'étude du signe de la dérivée à celle du signe de son numérateur a manifestement facilité la lecture graphique et évité à Anne l'interprétation de ce qui se passe graphiquement autour de x = 0. Ceci dit, la singularité n'est pas prise en compte dans le tableau de variation.

Nous représenterons pour tous les élèves, les techniques instrumentées d'étude de variation à l'aide du schéma suivant qui représente les trois applications principales ainsi que l'environnement-p/c :



Légende :

🖮 calcul de la dérivée

⇳ étude du signe de la dérivée ou des variations de la fonction

⓪ recherche des zéros de la dérivée ou des extrema de al fonction

☎ contrôle

Entretien 2

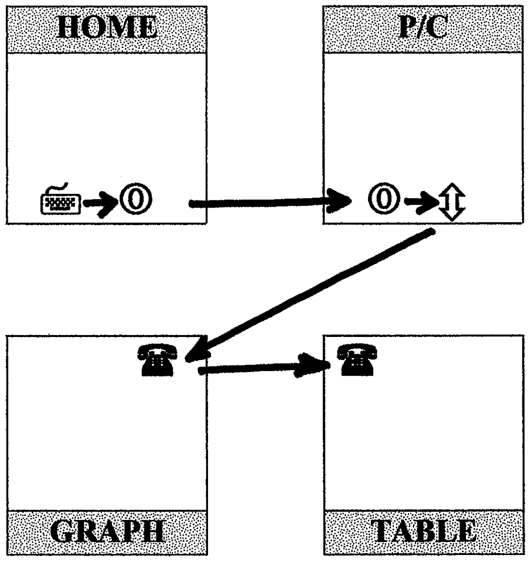
Cadrage

Anne change [xmin ; xmax] en [-5 ; 5] avant d'effectuer un *ZoomFit*. Nous remarquons donc une évolution de la technique de cadrage qui, d'une technique se basant sur des critères perceptifs, se meut en une technique plus systématique qui ne dépend plus cette fois-ci du tracé initial. Cette nouvelle technique s'accompagne d'une utilisation de l'ostensif *ZoomFit* qui met en œuvre le niveau 2 des connaissances-machine par le changement de [xmin ; xmax].

Etude des variations

Anne a une utilisation de la machine qui se situerait autour du troisième pôle stratégique. En effet, nous remarquons qu'elle a commencé à intégrer la commande *Zeros* de l'application HOME. Nous serions tentés d'interpréter son recours à l'environnement p/c comme une articulation entre celui-ci et la TI92, mais le fait que Anne ait re-calculé les zéros en p/c en mettant en œuvre la méthode du discriminant - si coûteuse par rapport à l'utilisation de *Zeros*, qui a déjà eu lieu toutefois -, nous pousse à penser que l'instrumentation est encore dans une *phase d'éclatement*, sans doute sous l'effet de la présence d'une équation polynomiale du second degré. D'ailleurs, cette utilisation des deux environnements pour la détermination des zéros illustre bien le phénomène d'*oscillation* indicateur de l'instabilité des techniques instrumentées. En ce qui concerne le contrôle des variations étudiées en p/c, Anne affiche tout d'abord le tracé de f et devant l'incohérence entre celui-ci et le tableau de variation, elle change [ymin ; ymax] avant de parcourir TABLE où elle découvre que f n'est pas définie en x=-3 avant d'intégrer cette information à son tableau.

Pour ce qui est du niveau d'instrumentation, nous voyons que Anne utilise l'application GRAPH d'une manière un peu plus élaborée qu'au premier entretien avec la mise en jeu de connaissances-machine de niveau 2 (cf. utilisation de *ZoomFit*). Ceci se traduit par le schéma suivant :



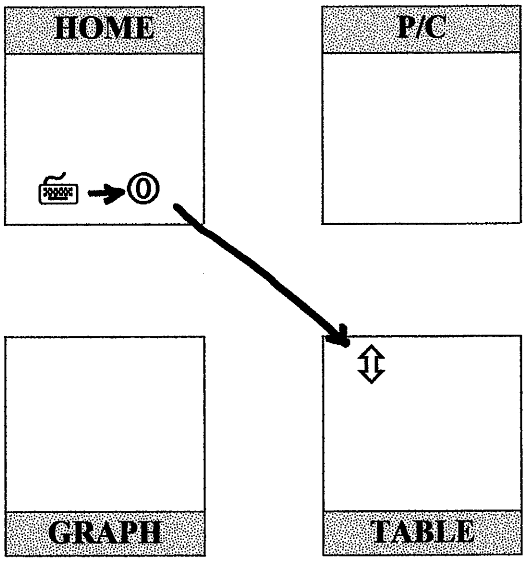
Devoir spécifique

Cadrage

Anne semble avoir effectué des changements de fenêtre dans la perspective d'agrandir le plus possible le cadre, un peu comme un *ZoomOut*. Elle n'a donc pas vraiment intégré la commande *ZoomFit* à sa technique, contrairement à ce que nous pensions suite à l'analyse de l'entretien 2.

Etude des variations

Anne a une utilisation qui est basée sur deux applications : HOME pour le calcul des zéros de la dérivée à l'aide de l'ostensif *Zeros* - ce qui semble être une technique stable - , et TABLE pour la détermination du signe de la dérivée. Cependant, cette utilisation de TABLE est sous-tendue par la connaissance mathématique qu'est le théorème-en-acte : "entre deux zéros, le signe de la dérivée est constant". Etant donné les valeurs des zéros, il est fort probable que Anne ait modifié les caractéristiques de TblSet, ce qui correspond au niveau 2 des connaissances-machine. Ainsi, Anne a combiné, d'une manière efficace certes, une technique de type calculatrice basée sur TABLE avec l'utilisation d'ostensifs de l'application HOME, sans aucun recours au p/c ni même à l'application graphique. Ceci se traduit par le schéma suivant :



Genèse

Anne a eu un rapport à la calculatrice graphique marqué par une utilisation où le numérique avait une place centrale (elle possédait sa dernière calculatrice depuis plus d'un an (cf. Questionnaire 1). Son utilisation du graphique était faible et l'ostensif *Zoom* n'a même jamais été mobilisé, ce qui explique le bas niveau d'instrumentation de l'application graphique, au premier entretien où la seule technique était une lecture fruste (à l'œil nu). Tout au long des entretiens et devoir spécifique, le rapport d'Anne à la TI92 a évolué : au premier entretien, c'est l'application GRAPH qui est centrale mais elle va disparaître progressivement pour laisser place à l'application HOME, laquelle va être investie pour une utilisation systématique dans le calcul de dérivée et la recherche de ses zéros. Par ailleurs, l'application TABLE va apparaître tout d'abord en tant qu'outil de contrôle pour devenir lors du devoir spécifique un outil de recherche du signe de la dérivée. En fait, les statuts de GRAPH et TABLE évoluent en sens inverse, et la place que possède cette dernière application en fin d'année témoigne, à notre avis, de l'importance du rapport à la calculatrice graphique dans la construction de nouvelles techniques instrumentées-TI92.

Charles :

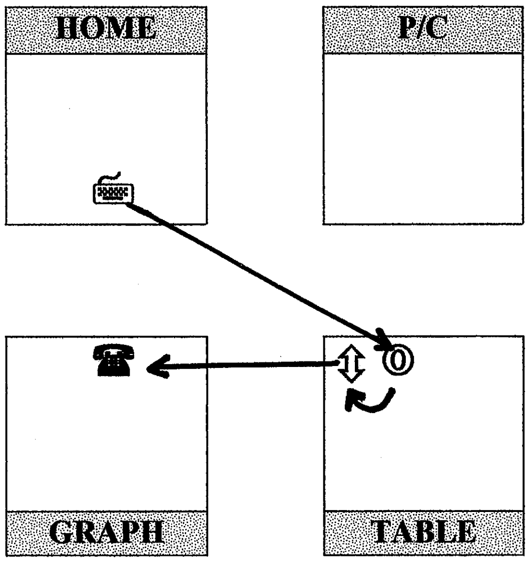
Entretien 1

Cadrage

Charles agrandit la fenêtre "pour mieux voir ce qui se passe"

Etude des variations

Charles a une utilisation qui se situe autour du deuxième pôle stratégique où l'application TABLE est centrale et où l'application GRAPH a un statut d'outil de contrôle. Par ailleurs, Charles ne maîtrise pas encore certaines connaissances-machine de base telles que la différence entre *ab* et *a*b* (connaissance de niveau 3) qu'il a eu du mal à repérer sans l'intervention de l'interviewer et qui, pourtant, a été prise en charge institutionnellement (cf. *Dimension Institutionnelle* - Observation 1). De plus, certaines connaissances mathématiques fondamentales ne sont pas disponibles, par exemple le tracé d'un tableau de variation auquel il a substitué un tableau de valeurs. Enfin, il contrôle son travail en faisant une lecture graphique fruste (à l'œil nu) sur le tracé de la dérivée. Ceci se traduit par le schéma suivant :



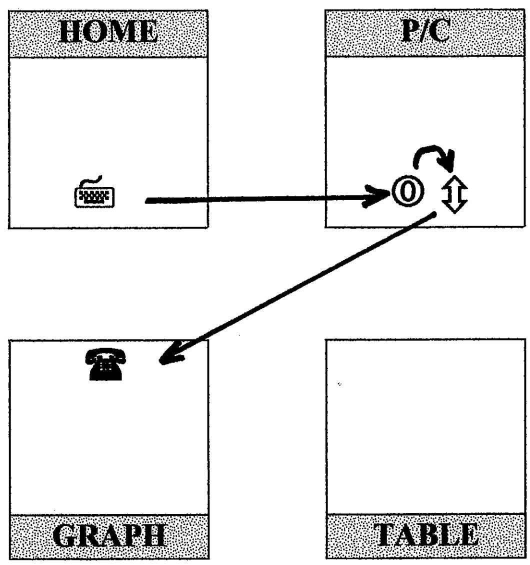
Entretien 2

Cadrage

Charles n'effectue aucune manipulation après le tracé dans la fenêtre initiale

Etude des variations

L'utilisation de l'application HOME est, comme au premier entretien, réduite au calcul de la dérivée, tandis que la recherche des zéros de la dérivée et de son signe s'effectue en p/c, certainement à cause de la présence d'un trinôme du second degré. Par ailleurs, nous remarquons une évolution dans le rapport à l'étude du signe de la dérivée. En effet, contrairement au précédent entretien, Charles a utilisé un tableau de signes mais d'autres connaissances mathématiques ne sont pas disponibles, ainsi en est-il du fait que le "signe d'un carré est toujours positif". Il contrôle enfin son travail de la même manière que dans le premier entretien.



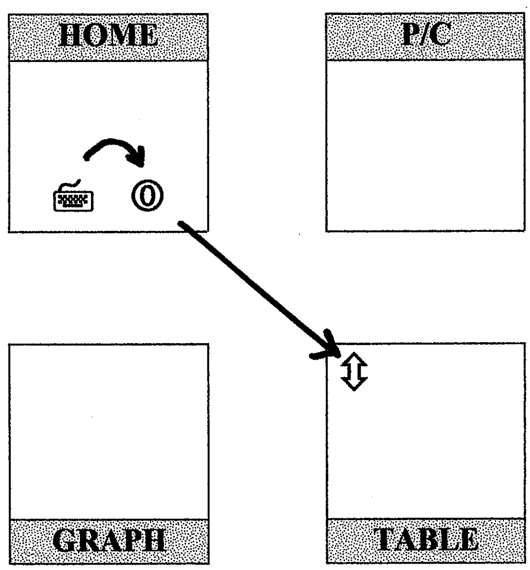
Devoir spécifique

Cadrage

Non fourni

Etude des variations

Charles intègre davantage l'application HOME à son travail où, en plus du calcul de la dérivée, il utilise l'ostensif *Zeros* pour chercher ses zéros. Par contre, l'étude du signe s'effectue dans l'application TABLE et la singularité n'est pas prise en compte dans le tableau de variation.



Genèse

Charles a eu un rapport à la calculatrice graphique marqué par une utilisation privilégiée du numérique (cf. questionnaire 1), ce qui semble justifier le statut important de l'application TABLE dans les techniques instrumentées-TI92, dans le premier entretien et sa persistance dans le devoir spécifique. Cependant, cette instrumentation de TABLE a évolué progressivement pour céder une partie du travail (la recherche des zéros de la dérivée) à l'application HOME. Par ailleurs, le statut de l'application graphique (comme outil de contrôle) et son niveau d'utilisation (lecture fruste et quelques changements de fenêtre inefficaces) peuvent s'expliquer en partie par la prégnance des anciennes pratiques instrumentées liées aux calculatrices graphiques. Il nous semble également que le faible niveau mathématique (bien qu'il y ait eu une certaine progression dans l'année) a été défavorable à une évolution plus rapide de l'intégration de l'application HOME.

Francis

Entretien 1

Cadrage

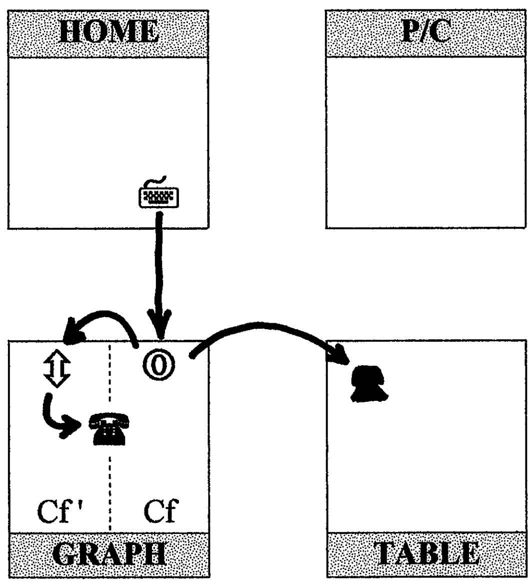
Francis effectue des changements manuels dans WINDOW en se basant sur des critères perceptifs

Etude des variations

Francis a une utilisation de la TI92 qui se situe autour du deuxième pôle stratégique, où l'application GRAPH occupe le rôle central. De plus, la lecture graphique est très riche au sens où elle repose sur des ostensifs-TI92 très précis (sans forcément fournir des résultats exacts) tels que *F5-Minimum* et *F5-Maximum*, *ZoomBox* ou encore *Trace*. Précisons que cette instrumentation est d'autant plus remarquable qu'à cette époque de l'année, les commandes *F5-Minimum* et *F5-Maximum* par exemple venaient d'être introduites en classe (cf. *Dimension Institutionnelle* - Observation 2) et que *ZoomBox* était loin d'être une commande familière (Francis est l'un des deux seuls élèves - avec Georges - à avoir utilisé des zooms au premier entretien). Par conséquent, ce niveau d'utilisation nous paraît être dû aux anciennes pratiques instrumentées (avec une calculatrice graphique) qui devaient déjà être élaborées (d'ailleurs, Francis utilisait souvent les zooms auparavant - cf. Questionnaire 1) et auxquelles Francis a adjoint les nouveaux ostensifs-TI92. Par ailleurs, l'instrumentation de l'application HOME a été limitée. En effet, en plus du calcul de la dérivée, Francis a mobilisé l'ostensif *Factor* mais ne l'a pas intégré à son travail (ce qui illustrait le phénomène de *zapping*), sans doute parce que son rapport à l'objet mathématique "Factorisation" ne permettait pas encore cette intégration. Ainsi, la présence d'ostensifs-TI92 puissants n'entraîne pas forcément leur intégration rapide dans l'activité, tant que le rapport aux objets mathématiques correspondants n'est pas construit.

Notons enfin que : d'une part, Francis ne maîtrisait pas assez certaines connaissances-machine de niveau 1 telles que la différence entre *ab* et *a*b* ou encore la syntaxe de l'ostensif *F3-d(.)* ; d'autre part, sa mobilisation de connaissances-machine de niveau 2 lors de l'utilisation des ostensifs du menu GRAPH-*F5* a été sous-tendue uniquement par des critères perceptifs, sans aucune référence à l'expression de la fonction, en témoigne sa réduction de l'étude aux x négatifs. En effet, se basant exclusivement sur le tracé obtenu après le cadrage et qui ne se faisait apparaître aucun morceau de la courbe pour les x positifs, il pensa que la fonction n'était pas définie pour ces valeurs alors que, vu son profil mathématique (cf. Questionnaire 1), il aurait pu voir que ce n'était pas le cas rien qu'en regardant l'expression de la fonction. Ceci nous montre la forte prégnance et donc le statut de la machine -surtout du graphique- à cette époque de l'année.

Signalons que Francis effectue ses contrôles à l'aide de GRAPH mais aussi de TABLE après avoir changé le pas dans TblSet, d'où une mobilisation du niveau 2 des connaissances-machine.



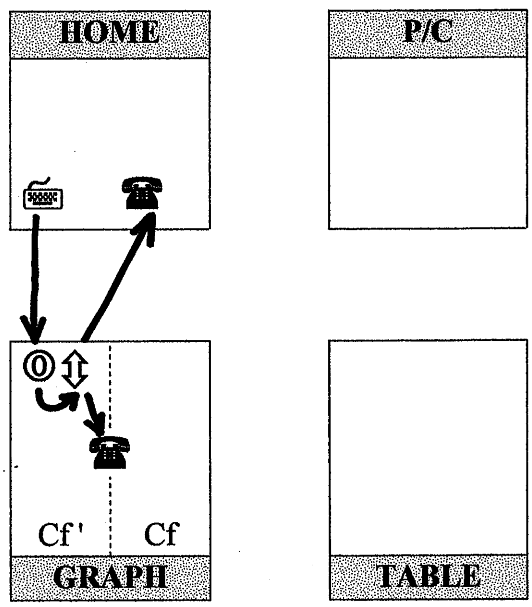
Entretien 2

Cadrage

Francis effectue un *ZoomFit* sans changer l'intervalle initial [xmin ; xmax], ce qui semble être une technique systématique indépendante de la fonction en question.

Etude des variations

Francis a une utilisation de la machine qui se situe toujours autour du deuxième pôle stratégique mais avec certains changements cependant : d'une part, la lecture graphique ne met plus en jeu autant d'ostensifs qu'au premier entretien, mais ceci semble dû au fait que les zéros recherchés sont des entiers et donc faciles à repérer. D'autre part, l'application TABLE semble disparaître de l'activité pour laisser place à l'application HOME qui est ainsi utilisée comme outil de contrôle. En effet, pour contrôler les zéros repérés à l'œil nu, Francis vérifie dans l'application HOME, que la valeur de la dérivée en ces points est nulle. Néanmoins, le statut de GRAPH demeure toujours aussi fort si l'on se réfère à ce qui s'est passé lors de cet entretien: en effet, devant le phénomène graphique lié à la singularité en -3, et au lieu de se rapporter à l'expression de la fonction, Francis pense avoir fait une mauvaise manipulation (il pense que certaines variables n'ont pas été libérées) et décide de reprendre son étude depuis le début. Ce diagnostic témoigne certes d'une bonne maîtrise de la machine (prise en compte du niveau 2 des connaissances-machine), mais il est inefficace en l'absence d'une bonne articulation entre l'algébrique et le graphique (par le repérage de la singularité dans l'expression de la fonction).



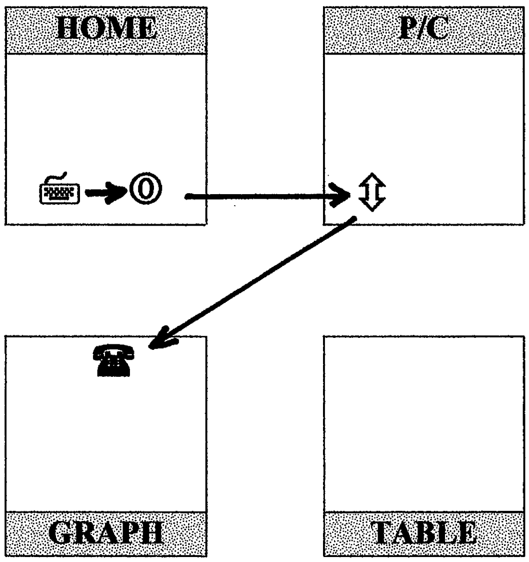
Devoir spécifique

Cadrage

Francis semble avoir effectué successivement un *ZoomStd*, un *ZoomFit* puis des changements manuels dans WINDOW tendant à réduire [ymin ; ymax] à peu près de moitié.

Etude des variations

Francis a une utilisation de la machine qui correspond au troisième pôle stratégique. C'est une évolution importante à plusieurs niveaux : tout d'abord, par rapport au statut de l'application HOME qui devient centrale dans l'activité instrumentée, avec une articulation efficace avec l'environnement p/c tandis que l'application graphique devient un outil pour le contrôle. Ensuite, par rapport à une instrumentation économique et efficace des ostensifs-TI92 : ainsi, contrairement au premier entretien, la commande *Factor* est cette fois-ci complètement intégrée à l'étude de variation. Par ailleurs, la présence d'un trinôme du second degré ne l'a pas déstabilisé (à l'inverse de ce qui s'est passé pour la majorité de ses camarades au deuxième entretien), et son utilisation de *Zeros* pour la résolution de l'équation correspondante montre une certaine stabilité dans ses rapports à la machine et aux objets mathématiques qui sont en jeu, ce qui semble fortement favorisé par son niveau mathématique (cf. Questionnaire 1).



Genèse

Francis a dû développer, avec sa calculatrice graphique, des techniques instrumentées élaborées, où l'application graphique était centrale. Avec la TI92, il a continué à avoir un rapport du même type, en essayant d'intégrer de nouveaux ostensifs graphiques comme *F5-Maximum, F5-Minimum* par exemple. Cette utilisation a persisté pendant les deux entretiens avec toutefois, une évolution dans l'intégration de HOME qui, d'application servant uniquement à calculer la dérivée, commence également à être utilisée pour le contrôle des zéros, prenant ainsi la place de l'application TABLE. Au devoir spécifique, l'évolution touche la composante instrumentalisation où l'application HOME devient centrale dans le travail de Francis, tandis que l'application GRAPH est réduite à fonctionner comme outil pour le contrôle uniquement. L'instrumentation de HOME est d'autant plus efficace qu'elle s'articule de manière complémentaire avec l'environnement p/c. Soulignons enfin l'importance de l'évolution parallèle des connaissances mathématiques, à travers l'évolution du rapport de Francis à l'objet "factorisation", ce qui peut expliquer l'intégration efficace et économique de l'ostensif-TI92 "*Factor*" en devoir spécifique.

Françoise

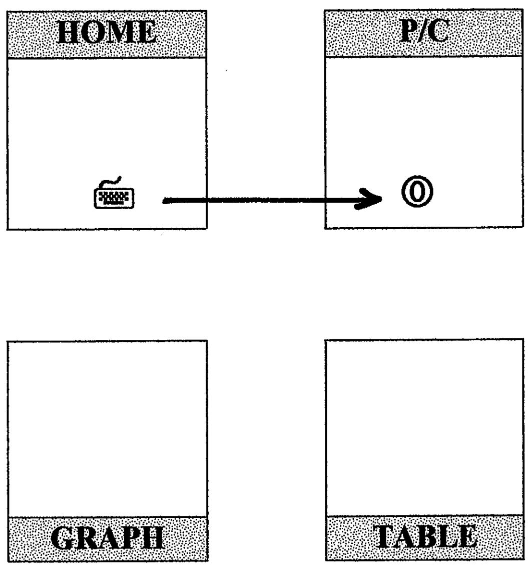
Entretien 1

Cadrage

Françoise se réfère à des critères perceptifs dans ses changements manuels de WINDOW.

Etude des variations

Françoise a une utilisation très limitée de la TI92 qui est réduite au calcul de la dérivée. Pour ce premier entretien, nous ne pouvons pas faire d'hypothèse sur l'effet de ses anciennes techniques calculatrices graphiques. En effet, une identification brute du numérateur (qui est un polynôme du troisième degré) à un trinôme du second degré semble avoir induit un recours à l'environnement p/c, ce qui, à notre avis, est dû au niveau de connaissances mathématiques de Françoise (cf. Questionnaire 1).



Entretien 2

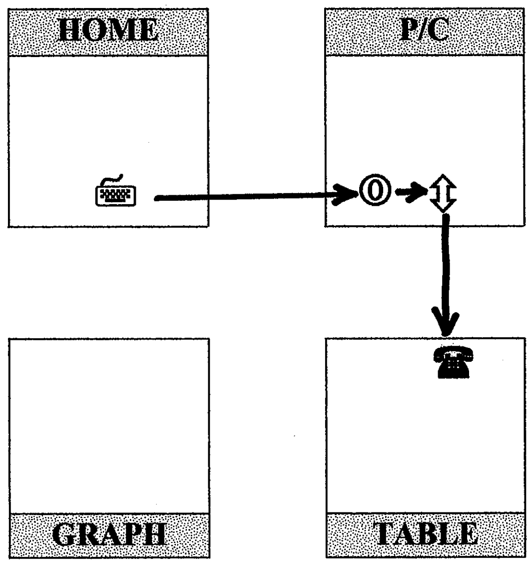
Cadrage

Françoise a effectué un *ZoomStd* alors que la fenêtre initiale était en *ZoomDec*, ce qui montre une évolution vers une systématisation de la technique de cadrage.

Etude des variations

Françoise a une utilisation toujours aussi limitée de HOME (uniquement pour le calcul de la dérivée) tandis que toute la résolution s'effectue en p/c. Ceci nous semble s'expliquer par :

- d'une part, le fait que Françoise n'ait pas eu le temps de construire des techniques instrumentées stables avec sa calculatrice graphique (elle l'a eue moins de trois mois avant l'arrivée de la TI92).
- d'autre part, par la présence d'un trinôme du second degré. Notons enfin une utilisation de TABLE pour le contrôle des variations. En somme, Françoise a eu une stratégie p/c légèrement instrumentée.



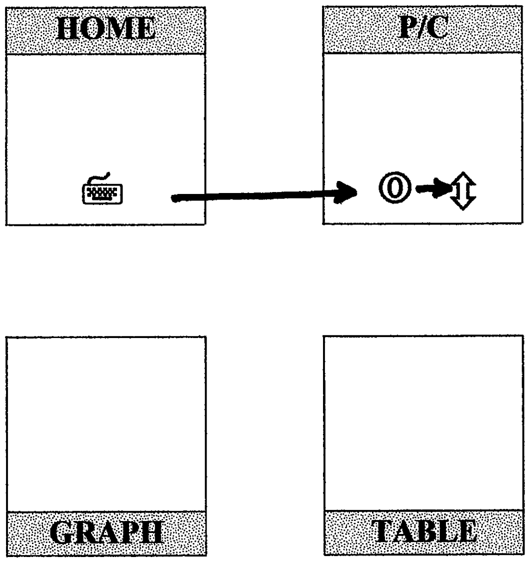
Devoir spécifique

Cadrage

Françoise semble avoir effectué un *ZoomFit* sur [-10 ; 10], ce qui confirme la systématisation de sa technique de cadrage.

Etude des variations

L'utilisation de la TI92 semble avoir évolué en même temps que certaines connaissances mathématiques. Ainsi, nous voyons apparaître l'ostensif *Factor* qui est bien intégrée à l'étude de variations. Cependant, l'étude des zéros et du sens de variation a toujours lieu dans l'environnement p/c, avec une mobilisation de techniques-p/c classiques telles que la "méthode du discriminant" par exemple.



Genèse

Compte tenu de la courte période pendant laquelle elle a eu une calculatrice graphique (avant l'arrivée de la TI92), Françoise n'a pas pu construire de techniques instrumentées spécifiques stables. Ceci nous semble expliquer en partie : d'une part, le fait que l'essentiel de l'étude des variations se déroule en p/c, d'autre part, l'utilisation de si peu d'ostensifs et surtout l'absence de recours à l'application GRAPH. Cependant, le niveau de connaissances mathématiques et son évolution dans l'année nous paraît également d'une grande importance. Ainsi, l'apparition de l'ostensif *Factor* ainsi que son intégration au reste de l'activité suppose, à notre avis une évolution du rapport à l'objet mathématique "factorisation". Par conséquent, le fait qu'à chaque fois qu'il y a une équation polynomiale du second degré, Françoise choisisse les techniques p/c, nous semble dû au statut encore flou de l'ostensif *Zeros* (ou *Solve*) en tant qu'objet mathématique, contrairement au cas de l'ostensif *Factor*.

Georges

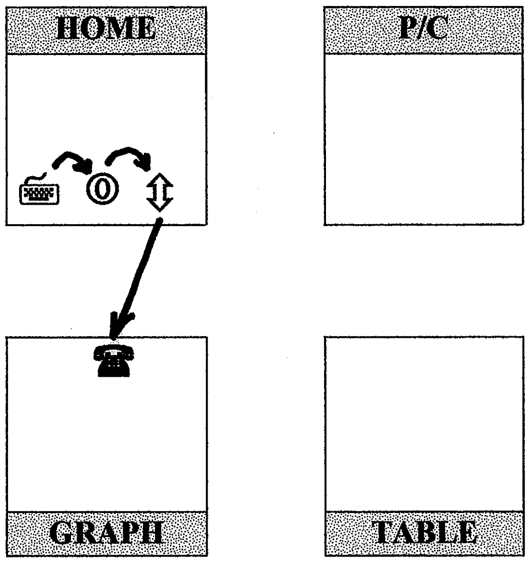
Entretien 1

<u>Cadrage</u>

Georges effectue des changements manuels dans WINDOW avant de faire un *ZoomOut* puis un *ZoomBox*. Georges est l'un des deux seuls élèves (avec Francis) à avoir utilisé des zooms au premier entretien.

<u>Etude des variations</u>

Georges a une utilisation de la TI92 qui se situe au niveau du troisième pôle stratégique. Toute l'étude des variations se déroule dans l'application HOME, et l'étude du signe de la dérivée est sous-tendue par le théorème-en-acte :"Entre deux zéros consécutifs, le signe de la dérivée est constant". Le contrôle se fait enfin dans l'application GRAPH où Georges utilise les ostensifs *ZoomBox* et *Trace*. Son utilisation efficace des zooms, qui semble héritée vraisemblablement du rapport à la calculatrice graphique (cf. Questionnaire 1), témoigne d'un bon niveau d'utilisation.



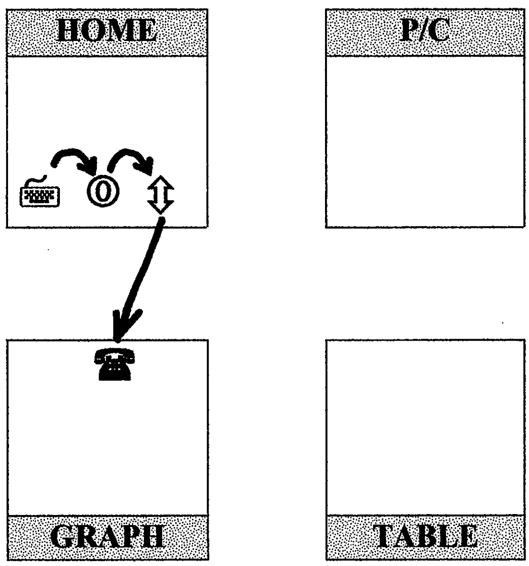
Entretien 2

Cadrage

Georges effectue un *ZoomFit* sur la fenêtre standard.

Etude des variations

Georges a une utilisation de la TI92 analogue à celle du premier entretien, mais avec moins d'ostensifs graphiques mobilisés



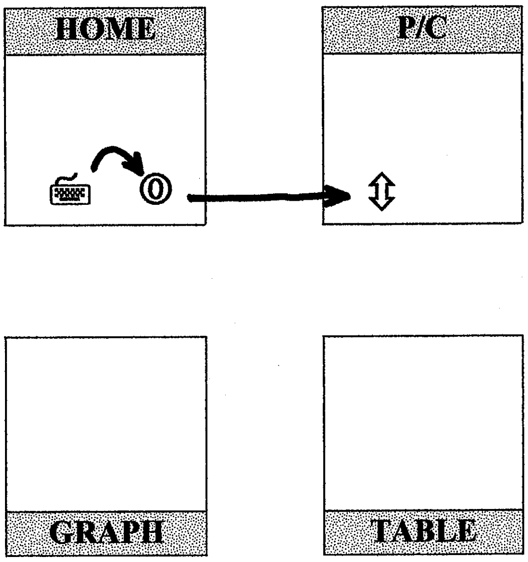
Devoir spécifique

Cadrage

Georges, tout comme Vincent, semble avoir choisi sa fenêtre en fonction du tableau de variation, ce qui est une technique qui tient compte des variations et des valeurs particulières de la fonction qui est en jeu.

Etude des variations

Lors de ce devoir spécifique, Georges a une utilisation qui se situe toujours au niveau du troisième pôle stratégique, mais avec cette fois-ci un détour par l'environnement p/c pour l'étude du signe.



Genèse

Dès le premier entretien, Georges a eu une stratégie stable qui a évolué tout au long de l'année pour incorporer en devoir spécifique l'ostensif *Factor* (liée sans doute à l'évolution du rapport personnel à l'objet "factorisation") et une articulation avec l'environnement p/c qui complète l'étude entamée dans l'application HOME. Par ailleurs, nous remarquons également le statut de l'application GRAPH qui est utilisée pour contrôler le tableau de variation. Soulignons enfin l'absence de l'application TABLE qui marque la rupture avec l'environnement calculatrice graphique.

Gérard

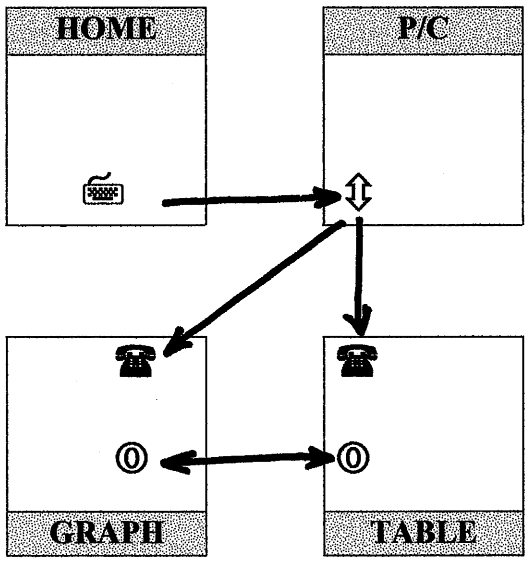
Entretien 1

Cadrage

Gérard effectue des changements manuels dans WINDOW en s'appuyant sur des critères perceptifs.

Etude des variations

Il est bien difficile de situer l'instrumentation de Gérard par rapport aux trois pôles stratégiques : d'une part, il essaie d'utiliser l'application HOME en calculant la dérivée et en transformant son expression (à l'aide de l'ostensif *Expand*) pour en déduire, par analogie formelle avec un trinôme du second degré, de manière erronée, le signe sans pour autant connaître les zéros ; des connaissances mathématiques ne sont donc vraisemblablement pas disponibles. D'autre part, il utilise les deux applications GRAPH et TABLE pour chercher les extrema sans référence à la fonction dérivée, uniquement en se basant sur le tracé et les valeurs de f, se situant là sans ambiguïté au niveau du premier pôle stratégique. Ainsi, l'effet du rapport à la calculatrice graphique est flagrant bien qu'il y ait tentative d'intégration de l'application formelle.



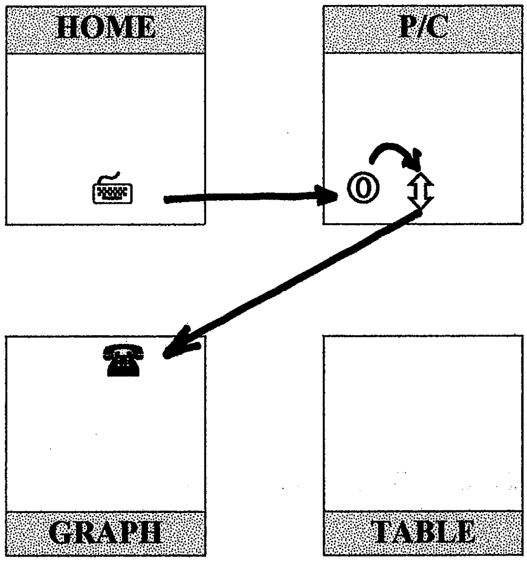
Entretien 2

Cadrage

Comme la majorité des élèves suivis, Gérard tend à systématiser sa technique de cadrage par la mise en œuvre de l'ostensif *ZoomFit.*

Etude des variations

Gérard a une utilisation de la TI92 qui se situe autour du deuxième pôle stratégique, où l'application HOME n'est mobilisée que pour le calcul de la dérivée. Nous remarquons que cette utilisation est beaucoup plus stable et épurée qu'au premier entretien, sans doute grâce à la présence d'un trinôme du second degré.



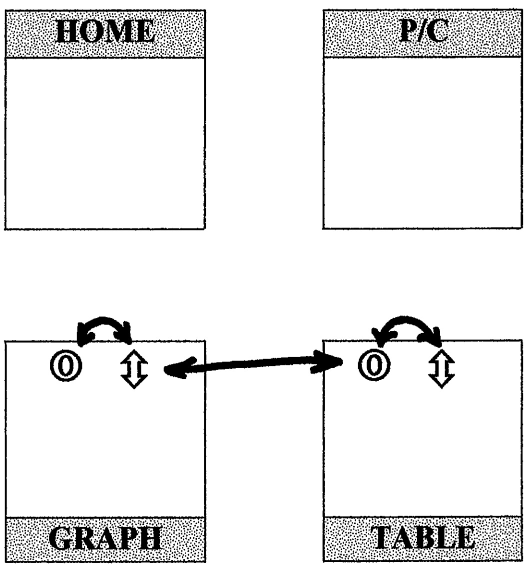
Devoir spécifique

Cadrage

Gérard effectue des changements dans WINDOW visant à agrandir la fenêtre, un peu à la manière d'un *ZoomOut.*

Etude des variations

Gérard se situe clairement au niveau du premier pôle stratégique où toute son étude se base les deux applications GRAPH et TABLE sans référence aucune à la dérivée. On peut dire qu'il a une utilisation de type calculatrice graphique améliorée puisqu'il met mobilise des ostensifs spécifiques à la TI92 tels que GRAPH-*F5-Minimum* ou encore *ZoomFit.*



Genèse

Au premier entretien, Gérard a essayé d'intégrer l'application HOME à ses anciennes techniques calculatrice graphique en faisant calculer la dérivée ; mais cette tentative a été inefficace non seulement à cause de la fragilité des connaissances-machine à cette époque de l'année mais également à cause du niveau de connaissances mathématiques (cf. analogie avec 2nd degré). Ceci explique un peu le basculement vers le premier pôle stratégique pour la recherche des extrema et l'effet d'éclatement qui en découle. Au deuxième entretien, cet effet s'est considérablement estompé certainement grâce à la présence d'une équation du second degré, pour laquelle la technique standard (méthode du discriminant) semble disponible. Cette présence, bien qu'elle ait canalisé et stabilisé le travail de Gérard, n'a pas permis pour autant une utilisation plus élaborée de l'application HOME (à part pour le calcul des valeurs des extrema). Enfin, lors du devoir spécifique, on peut voir la précarité de la stabilité du deuxième entretien, et même une régression dans l'utilisation de la TI92 où toute l'activité de Gérard se situe au niveau du premier pôle stratégique, sans calcul ni référence à la fonction dérivée. En somme, c'est une instrumentation de type calculatrice graphique qui est légèrement améliorée par l'utilisation d'ostensifs tels que *F5-Minimum* et *ZoomFit*. Cette régression nous semble due non seulement au rapport que peut avoir Gérard à la TI92 mais également à son rapport à l'objet "fonction dérivée" et à son statut dans une étude de variations.

Michel

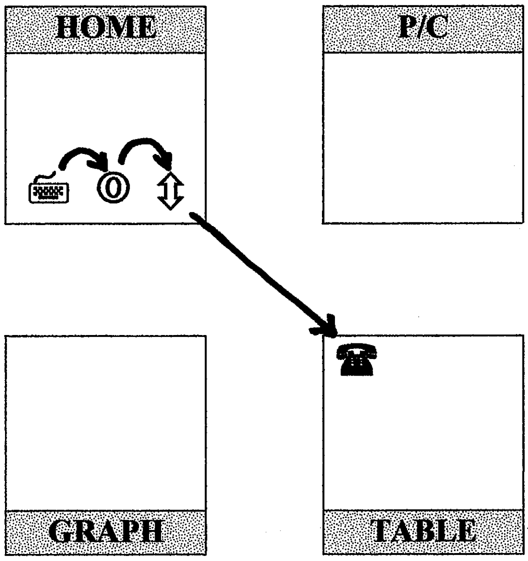
Entretien 1

Cadrage

Ne fait pas tracer.

Etude des variations

Michel a une utilisation de la TI92 qui se situe au niveau du troisième pôle stratégique. Pour la recherche du signe de la dérivée, il se base sur le théorème-en-acte (alternance) : "le signe de la dérivée change à chaque zéro" et met en œuvre une technique qui incorpore l'ostensif *Solve* d'une manière peu simple, mais qui est efficace. L'étude des variations se déroule intégralement dans l'application HOME (si l'on excepte le tableau de variation qui est dessiné en p/c), et l'application TABLE n'est utilisée que pour contrôler le tableau de variation.



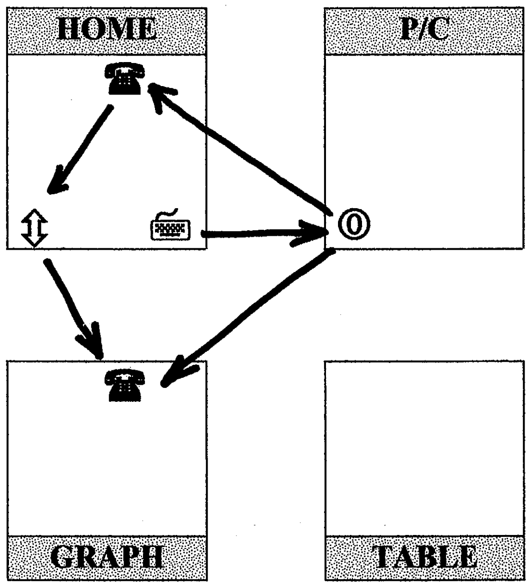
Entretien 2

Cadrage

Michel n'effectue aucune manipulation après le tracé dans la fenêtre initiale.

Etude des variations

Michel a une utilisation de la TI92 qui se situe entre les deuxième et troisième pôles stratégiques. Ceci est certainement dû à la présence du trinôme du second degré dont Michel a trouvé les racines à l'aide de la "méthode p/c du discriminant". Cette présence semble créer une perturbation dans l'évolution du rapport à la TI92, dans la mesure où, en plus du contrôle des racines dans l'application GRAPH, Michel a ré-intégré l'application HOME en calculant les zéros à l'aide de l'ostensif *Solve*. Ensuite, il reste dans l'application formelle pour déterminer le signe de la dérivée en calculant la valeur de celle-ci (ou plutôt de son numérateur) en un point bien choisi et en se basant sur le théorème-en-acte : "le signe de la dérivée change à chaque zéro".



Genèse

Bien que Michel n'ait assisté qu'aux deux premiers entretiens, nous pouvons observer une certaine régularité dans son utilisation de la TI92. En effet, la technique instrumentée pour l'étude des variations semble suivre le schéma suivant : *Calcul de la dérivée - Détermination des zéros (à l'aide Solve) - Détermination du signe sur la base du théorème-en-acte décrit ci-dessus - contrôle des variations.* Cependant cette technique a évolué sur deux points : d'une part, l'instrumentation de HOME en application du théorème-en-acte s'est allégée et simplifiée. Ainsi, la technique est réduite dans le deuxième entretien au calcul de la valeur de la dérivée en un point bien choisi. D'autre part, le contrôle des variations s'est déplacé de l'application TABLE à l'application GRAPH. Signalons que le détour par l'environnement p/c au deuxième entretien a été vraisemblablement la conséquence de la présence d'une équation du second degré.

Enfin, l'absence de Michel au troisième entretien et au devoir spécifique nous semble s'expliquer par son rapport très négatif aux technologies informatiques, mais vu son instrumentation de la TI92 où l'application HOME est parfaitement intégrée au travail et où l'application GRAPH est peu ou pas utilisée, il nous semble que c'est plutôt son rapport au graphique qui est négatif, ce qui semble se confirmer par le niveau faible d'instrumentation de cette application où aucun ostensif n'a été utilisé. Nous remarquons également que malgré les réticences qu'il a eues vis-à-vis de la machine, son rapport aux objets mathématiques qui sont en jeu lui a permis d'instrumenter de manière efficace la TI92 en exploitant les possibilités offertes dans l'application HOME.

Serge

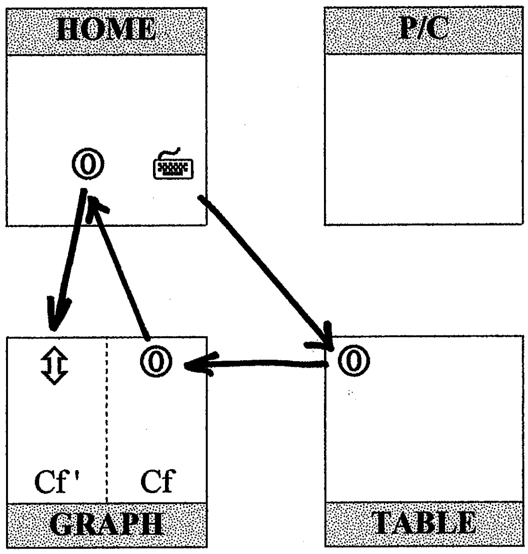
Entretien 1

Cadrage

En dehors de la fenêtre initiale, Serge a mis en œuvre des changements dans WINDOW, exclusivement en se basant sur des critères perceptifs.

Etude des variations

Lors de ce premier entretien, Serge a une utilisation tellement instable qu'il est difficile de la situer par rapport aux trois principaux pôles stratégiques. Cependant, nous remarquons que pour la recherche des zéros, Serge commence par se placer au niveau du premier pôle où ce sont les applications GRAPH et TABLE qui sont mises en œuvre sans référence à la fonction dérivée, laquelle a pourtant été calculée dans HOME. Ensuite, Serge s'oriente vers une recherche de zéros à l'aide de l'ostensif *Solve,* ce qui le situerait autour du troisième pôle s'il n'avait confondu la fonction et sa dérivée, signe que le rapport à la "dérivée" et à son statut dans l'étude des variations n'est pas encore construit. Ceci met en en évidence encore une fois l'importance du rapport aux objets mathématiques dans la construction des techniques instrumentées qui ne peuvent se réduire à la connaissance d'ostensifs-machine.



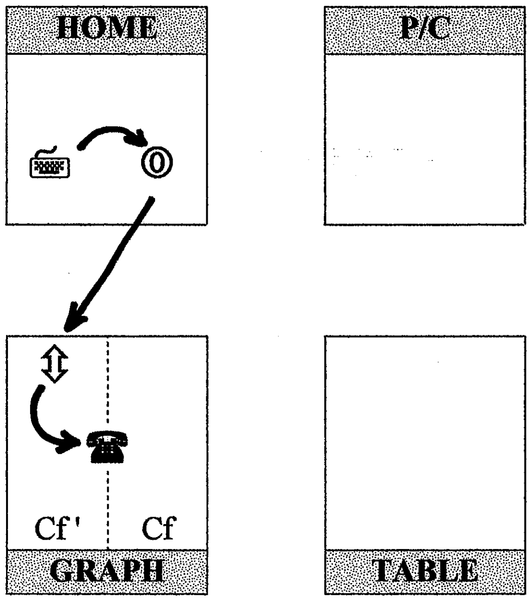
Entretien 2

Cadrage

Serge mobilise l'application TABLE en changeant deux fois le pas dans TblSet (mobilisation du niveau 2 des connaissances-machine) mais sans conséquence sur les manipulations graphiques qui se réduisent à une lecture fruste (à l'œil nu).

Etude des variations

Serge a une utilisation de la TI92 qui se situerait entre les deuxième et troisième pôles stratégiques. En effet, l'application HOME est investie pour le calcul de la dérivée et pour la recherche des zéros (à l'aide de l'ostensif *Zeros*) tandis que l'étude du signe ainsi que le contrôle du tableau de variation met en jeu l'application graphique avec comme connaissance mathématique principale le théorème-en-acte (alternance):"le signe de la dérivée change à chaque zéro".



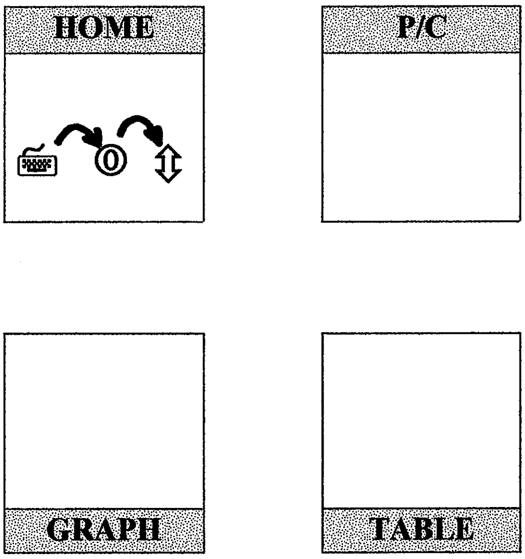
Devoir spécifique

<u>Cadrage</u>

Serge semble avoir effectué des changements manuels dans WINDOW afin d'avoir une vue globale de la fonction à la manière d'un *ZoomOut.*

<u>Etude des variations</u>

Lors de ce devoir, Serge a une utilisation de la TI92 qui se situe au niveau du troisième pôle où l'application HOME est centrale dans l'étude de variation de la fonction. Ainsi, après avoir calculé la dérivée à l'aide de l'ostensif correspondant, il a déterminé ses zéros via l'ostensif *Zeros* avant de déduire le signe du calcul de la valeur en un point bien choisi, la connaissance sous-jacente étant le théorème-en-acte déjà cité (cf. Serge - Entretien 2).



Genèse

Au premier entretien, la stratégie de Serge semble osciller entre une utilisation de type calculatrice graphique et une tentative d'intégration de l'application HOME qui semble entravée par la fragilité du rapport à certains objets mathématiques qui entrent en jeu dans l'étude de variation (tel que l'objet "dérivée"). Au deuxième entretien, la stratégie de Serge commence à s'orienter vers le troisième pôle sans pour autant abandonner complètement le recours au graphique (hérité du rapport à la calculatrice graphique), à travers l'étude du signe de la dérivée qui est sous-tendue par le théorème-en-acte cité ci-dessus. Enfin, en devoir spécifique, c'est l'application HOME qui cristallise toutes les techniques instrumentées que ce soit pour le calcul de la dérivée, la recherche de ses zéros ou encore l'étude de son signe où le théorème-en-acte déjà présent au deuxième entretien subsiste en tant que connaissance mathématique sous-jacente à l'instrumentation.

Vincent

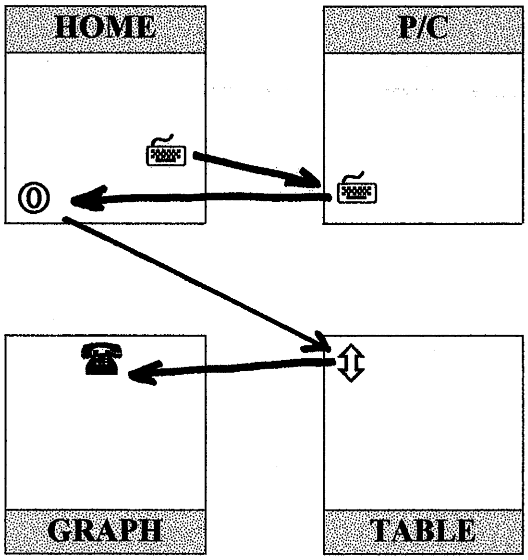
Entretien 1

<u>Cadrage</u>

Vincent n'effectue aucune manipulation après le tracé dans la fenêtre initiale.

<u>Etude des variations</u>

Vincent a une utilisation de la TI92 qui combine l'application HOME, pour le calcul de la dérivée et de ses zéros, et l'application TABLE pour la détermination du signe en se basant sur le théorème-en-acte : "le signe de la dérivée est constant entre deux zéros consécutifs". C'est donc une utilisation qui essaie d'intégrer les possibilités de calcul formel offertes par la TI92 mais qui reste encore sous l'influence des anciennes techniques de type calculatrice graphique. Soulignons le re-calcul de la dérivée, pourtant coûteux, effectué dans l'environnement p/c, ce qui nous semble dû en partie au rapport négatif de Vincent aux technologies informatiques ("*les ordinateurs sont dangereux pour apprendre des mathématiques*" - Cf questionnaire 1). Par ailleurs, l'investissement de l'application graphique a été très faible, sans doute en était-il autant avec la calculatrice graphique (utilisation faible des *Zoom, Trace* et *Range* - cf. Questionnaire 1).



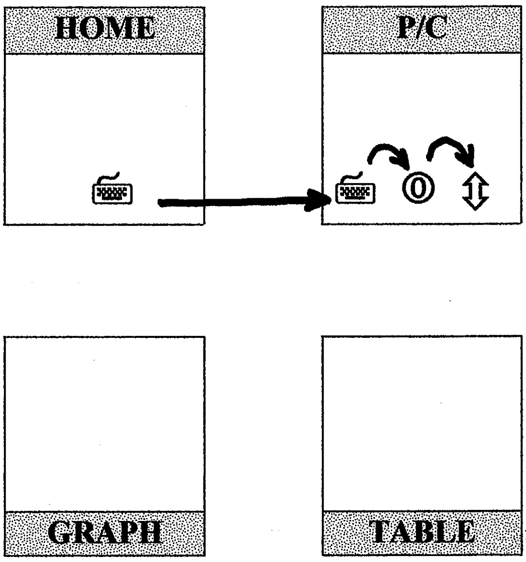
Entretien 2

<u>Cadrage</u>

Vincent a effectué un *ZoomStd* alors que la fenêtre initiale était en *ZoomDec*, ce qui montre une évolution vers la systématisation de la technique de cadrage.

<u>Etude des variations</u>

Tout le travail de Vincent s'effectue dans l'environnement p/c. Signalons cependant, le calcul de la dérivée dans l'application HOME puis son re-calcul en p/c, ce qui nous semble dû encore une fois au rapport négatif de Vincent aux calculatrices. Notons enfin l'absence des applications GRAPH et TABLE dans le travail de Vincent.



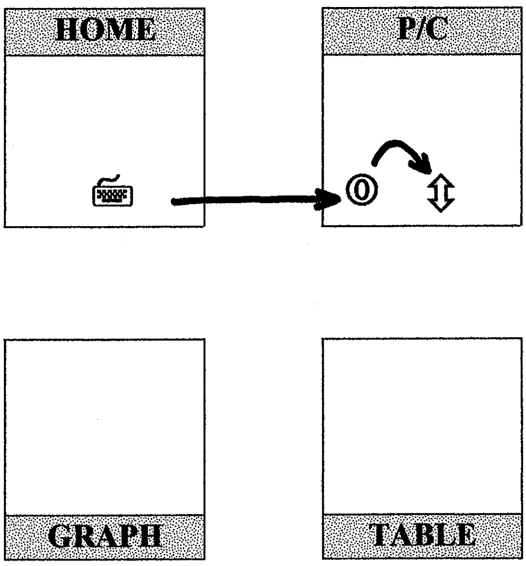
Devoir spécifique

Cadrage

Vincent semble avoir effectué les changements dans WINDOW en fonction des points remarquables qu'il a trouvés dans son étude de variation.

Etude des variations

Vincent a une utilisation de la TI92 qui se situe autour du troisième pôle stratégique, où il articule l'application HOME, via le calcul de la dérivée et sa factorisation, avec l'environnement p/c où il calcule les zéros ainsi que le signe. Notons encore une fois l'absence des deux applications GRAPH et TABLE dans le travail de Vincent.



Genèse

Comme Michel, Vincent semble avoir un rapport négatif non pas aux technologies informatiques mais plutôt au graphique. En effet, il dit avoir eu une utilisation très limitée du graphique avec sa calculatrice graphique (cf. Questionnaire 1) et avec la TI92, l'application GRAPH était absente de l'étude des variations à l'entretien 2 et en devoir spécifique, tandis que les techniques de cadrage aux deux premiers entretiens étaient très pauvres. Par ailleurs, le re-calcul de la dérivée dans les deux premiers entretiens ainsi que le recours systématique à l'environnement p/c dès qu'il y a une équation polynomiale du second degré, nous semblent illustrer clairement son attachement quasi "idéologique" à l'environnement standard (cf. Questionnaire 1 : "*A cause de la calculatrice, on ne calcule plus à la main*").

Conclusion :

A la fin de cette première année d'expérimentation, diverses tendances semblent se dégager :

- **La genèse instrumentale semble dépendre fortement des connaissances mathématiques**

En fait, les connaissances mathématiques interviennent à plusieurs niveaux dans la genèse instrumentale. Tout d'abord, parce que le rapport aux ostensifs-TI92 se construit en fonction du rapport aux non ostensifs mathématiques correspondants. Au premier entretien par exemple, peu d'élèves ont utilisé systématiquement l'ostensif *Zeros* (ou *Solve*) pour rechercher les zéros de la fonction dérivée bien que cette commande ait été introduite en classe (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 1*). Ceci nous semble s'expliquer par le fait que le statut de cet ostensif, en tant qu'entité mathématique, dans l'étude de variation n'est pas encore bien perçu ; mais, à cette époque de l'année, les techniques d'étude de variation elles-mêmes sont encore fragiles. Nous pouvons en dire de même de l'utilisation de l'ostensif *Factor* par Francis (effet de *zapping*) toujours au premier entretien. Ainsi, la présence d'ostensifs-TI92, si puissants soient-ils, demeure inefficace tant que le rapport aux non-ostensifs correspondants est fragile. Ceci rejoint d'ailleurs l'un des résultats de la recherche dirigée par D. Guin au niveau seconde [Guin & al., 1996].

A un autre niveau, la gestion des tracés et l'interprétation des phénomènes graphiques dus par exemple à la discrétisation demande des connaissances mathématiques spécifiques. Ceci requiert d'ailleurs une articulation entre le travail mathématique mené avec l'application HOME et celui mené avec l'application GRAPH et même avec TABLE. Dans le premier entretien par exemple, la grande majorité des élèves ne sont pas satisfaits du tracé obtenu. Pourtant, il s ne savent pas employer les applications TABLE et HOME afin d'avoir une idée sur les valeurs extrémales prises par la fonction. Les élèves ont également du mal à repérer les incohérences entre le tracé et le tableau de variation et si, dans le premier devoir commun, ils disent tous que la machine les a aidés à vérifier leurs résultats, on se rend compte, à la lecture de leurs copies, des limites de leurs moyens de vérification, à cette époque de l'année.

A un autre niveau enfin, la gestion et le contrôle des formes algébriques non canoniques que la machine peut fournir requiert également des connaissances mathématiques. Une bonne genèse instrumentale suppose une construction de moyens de contrôle rapides et efficaces. Par exemple pour contrôler le sens et la validité des transformations formelles effectuées par la machine, ou pour comparer une forme fournie par la machine à une expression trouvée en p/c. Les observations réalisées montrent que le travail sur l'équivalence d'expressions algébriques nécessaire à une bonne instrumentation de la machine dans l'introduction de la notion de dérivée, est loin d'être au point en début de première S.

- **Réciproquement, la genèse instrumentale semble influer sur le rapport des élèves aux objets mathématiques qui entrent en jeu**

Contrairement à l'influence des connaissances mathématiques sur la genèse instrumentale, l'inverse est beaucoup moins facile à observer. Bien entendu, nous avons déjà une idée sur cette influence à travers les réponses des élèves aux questionnaires. Il apparaît globalement, d'après eux, que la machine n'a pas vraiment affecté leur rapport aux mathématiques. Cependant, nous avons réussi à repérer une situation qui dément, au moins localement, leurs impressions.

Observons ce qui s'est passé dans le deuxième entretien : la présence de l'équation polynomiale du second degré a provoqué des perturbations importantes dans l'activité des élèves. Pour certains d'entre eux (Charles ou Françoise par exemple), le choix a été sans conteste le travail dans l'environnement p/c ; pour d'autres (Anne, Michel ou Vincent), l'hésitation entre les deux environnements a été de mise. Dans les deux cas, le choix qui a été fait - utilisation de la "méthode du discriminant" - était le plus coûteux, bien que l'ostensif *Zeros* (ou *Solve*) suffise à lui seul pour résoudre rapidement l'équation du second degré, sachant que ledit ostensif était une commande familière à cette époque de l'année (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 1* et *Dimension Individuelle - Entretien 1,* par exemple). Ainsi, jusque là les élèves (surtout ceux qui ont hésité) semblaient avoir deux conceptions : d'une part, "l'ostensif *Zeros* sert à résoudre des équations". D'autre part, "une équation polynomiale du second degré se résout par la méthode du discriminant". Mais de là à considérer une équation du second degré comme une équation parmi d'autres, cela n'allait visiblement pas de soi. Nous pensons donc que la présence de l'ostensif *Zeros* (ou *Solve*) influe sur le rapport de l'élève à l'objet mathématique "équation polynomiale du second degré", et entraîne par là même une réorganisation des connaissances mathématiques.

- **La genèse instrumentale s'accompagne de l'évolution du statut de la distinction exact/approché**

Les difficultés qu'ont les élèves à mettre en place des rapports satisfaisants entre l'exact et l'approché dans l'environnement usuel sont bien connues (cf. [Perrin-Glorian, 1997] par exemple). Il est également acquis qu'avec l'utilisation de calculatrices graphiques la distinction exact/approché n'est pas forcément facilitée dans la mesure où les nombres sont donnés systématiquement sous forme approchée (cf. [Bronner, 1997] ou [Kuntz, 1993] par exemple). Dans l'environnement-TI92, les rapports entre exact et approché se complexifient et la genèse instrumentale est étroitement liée à l'évolution de ces rapports et cela à deux niveaux :

> ➢ D'une part, à travers l'évolution du statut des applications comme par exemple le fait de savoir que HOME donne des résultats exacts, contrairement à GRAPH et TABLE, d'où le recours croissant à l'application HOME et son articulation avec l'environnement p/c.
>
> ➢ D'autre part, via l'évolution du statut de l'Exact dans le travail mathématique où la dimension institutionnelle est déterminante, que ce soit à travers le discours de l'enseignante (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 2*) ou via les contrôles communs où les résultats demandés doivent, en général, être exacts et justifiés.

- **La genèse instrumentale dépend du rapport institutionnel aux objets de savoir et à la machine**

En effet, la genèse instrumentale dépend de l'évolution du savoir en classe. Ce fut le cas par exemple pour l'objet "factorisation" où l'ostensif *Factor* n'a été intégré au travail de certains élèves qu'au bout d'un certain temps (cf. Francis par exemple).

Par ailleurs, la genèse instrumentale est également sous l'influence du rapport institutionnel à la machine. Ainsi, l'évolution du statut des applications - dont on a parlé ci-dessus - n'est que le reflet et la conséquence de l'évolution de l'utilisation de la machine en classe, que ce soit à travers des activités ou via le discours où les trois niveaux de connaissances-machine sont traités (cf. *Dimension Institutionnelle*).

- **La genèse instrumentale s'accompagne d'un changement de statut des applications**

Au début de la genèse instrumentale, les élèves ont globalement un fonctionnement qui est encore empreint de leur rapport aux calculatrices graphiques, et qui se situe autour du deuxième pôle stratégique (cf. *Dimension Individuelle - Entretien 3 - Devoir spécifique*). Ainsi, les applications GRAPH et/ou TABLE sont au centre de l'utilisation de la TI92, où ils ont une fonction d'outils de résolution. Quant à l'application HOME, elle est investie uniquement pour le calcul de dérivée (et éventuellement pour le calcul de ses zéros).

Ensuite, le statut des applications commence à évoluer : GRAPH et TABLE - laquelle tend à disparaître chez la majorité - sont relégués progressivement au rang d'outils de contrôle, tandis que l'application HOME devient entre temps centrale dans le travail de l'élève, avec toutefois des articulations avec l'environnement p/c.

- **La genèse instrumentale semble s'effectuer en deux phases : une phase d'éclatement et une phase d'épuration**

Au début de la genèse instrumentale, le travail de l'élève semble se situer à un carrefour comme s'il était à la recherche d'un équilibre entre ses anciennes techniques et stratégies (liées aux calculatrices graphiques), les multiples possibilités offertes par la TI92 et l'évolution du savoir en classe. Cette phase que nous appellerons *phase d'éclatement*, tant les stratégies et techniques semblent éclatées, semblent se caractériser dans bien des cas par la présence d'un ou plusieurs des phénomènes (déjà cités cf. *Devoir spécifique*) d'*oscillation, de zapping* et de *sur-vérification.*

Progressivement, l'élève entre dans une seconde phase que nous qualifions de *phase d'épuration,* où l'utilisation de la machine tend à s'équilibrer dans le sens d'une stabilisation des stratégies et techniques instrumentées qui s'accompagne souvent d'une centration sur quelques commandes, les choix effectués restant cependant différents d'un élève à l'autre.

- **La genèse instrumentale s'accompagne d'une tendance à la systématisation**

En ce qui concerne le cadrage, nous avons vu (Cf *Genèses instrumentales*) que les techniques évoluaient globalement d'une suite d'ajustements de la fenêtre de tracé (souvent de petite amplitude) dans WINDOW qui est -généralement- sous-tendue par des critères perceptifs, vers la mise en œuvre d'ostensifs tels que *ZoomStd, ZoomFit* (ou le choix de [xmin ; xmax] est effectué arbitrairement, par exemple [-10 ; 10] systématiquement) ou même un agrandissement considérable de la fenêtre de tracé dans WINDOW systématique, ne prenant pas en compte l'expression algébrique ou les valeurs remarquables de la fonction.

Cette tendance à la systématisation s'observe également dans l'évolution des stratégies des élèves pour l'étude des variations. Ainsi, ces stratégies tendent globalement vers le troisième pôle stratégique où l'essentiel du travail se situe dans l'application HOME suivant par exemple le schéma suivant : *Définition de la fonction (Define) - Calcul de la dérivée (d(.)) - Calcul de ses zéros (Zeros ou Solve)*

- **Un premier niveau d'utilisation semble s'acquérir sans difficulté**

Ce niveau d'utilisation met en œuvre essentiellement des connaissances-machine de niveau 1. Nous avons remarqué en effet, que les élèves n'avaient pas vraiment de problèmes pour maîtriser la syntaxe des commandes introduites (à l'exception de Charles au premier entretien par exemple)

- **La mobilisation du deuxième niveau de connaissances-machine est le signe d'une utilisation élaborée**

La mobilisation de ce niveau de connaissances-machine est souvent sous-tendue par des connaissances mathématiques, par exemple via la prise en compte de la nature de la fonction pour fixer le pas dans TblSet (cf. *Entretien 3* où il est plus judicieux de prendre un pas qui soit multiple de π), à travers la prise en compte des valeurs remarquables de la fonction pour fixer [xmin ; xmax] avant d'effectuer un *ZoomFit*, ou encore en choisissant la fenêtre de tracé dans WINDOW en fonction des valeurs remarquables.

Cependant, cette mobilisation peut être sous-tendue par des connaissances-machine uniquement, comme par exemple le fait de tenir compte des informations contenues dans WINDOW pour la lecture graphique et le comptage des graduations.

Par ailleurs, les deux types de connaissances peuvent intervenir. Pour illustrer ce cas, considérons le passage de (*Dimension Institutionnelle - Observation 2*) où l'enseignante demande aux élèves s'il y a égalité entre les nombres 364/125 et 2.912 (ce dernier étant obtenu en faisant ♦ ENTER). Pour pouvoir répondre à cette question, les deux types de connaissances sont nécessaires : d'une part, il faut tenir compte des informations contenues dans MODE - Display Digit (connaissances-machine), et d'autre part il faut avoir des connaissances sur les nombres et plus spécifiquement sur le lien qu'il peut y avoir entre Exact et Décimal (connaissances mathématiques).

Enfin, la mise en jeu du niveau 2 des connaissances-machine en se basant uniquement sur des critères perceptifs, comme par exemple dans le choix de *LowerBound* et *UpperBound* dans l'utilisation de GRAPH - *F5Minimum*, ou encore dans le choix de *1st Corner* et *2nd Corner* lors de l'utilisation de *ZoomBox*.

- **La personnalisation de la machine reste limitée tout au long de l'année**

Cette composante de l'instrumentalisation n'est en effet pas vraiment développée. Cette carence nous semble due à plusieurs raisons : tout d'abord, le fait que les ostensifs-TI92 soient puissants rend obsolètes certains programmes (pour la résolution d'une équation du second degré par exemple) ainsi que le stockage de certaines formules (comme pour la dérivation par exemple). Ensuite, le fait que la machine n'appartienne pas aux élèves et qu'ils doivent la rendre en fin d'année ne favorise pas non plus un investissement de ce type. Enfin, le fait qu'à ce niveau d'apprentissage, l'utilisation des répertoires est loin d'être assez intensive pour nécessiter une structuration, et les ostensifs-TI92 sont déjà assez nombreux et puissants.

La genèse instrumentale dépend également des profils des élèves suivis

Nous avons remarqué que tout au long de l'année, la genèse instrumentale ne se déroulait pas de la même façon pour tous les élèves, et dépendait de la nature des rapports personnels aux mathématiques ou aux technologies informatiques. Plus spécifiquement, au début de cette genèse, le rapport aux calculatrices graphiques nous a semblé très déterminant. En ce sens, nous proposons de considérer trois types principaux de rapports :

- ✔ Type "*numérique*" : quand l'élève a eu une utilisation de sa calculatrice graphique marquée plus par des calculs numériques que par des manipulations graphiques
- ✔ Type "*graphique*" : quand l'utilisation a été porté davantage sur les graphiques
- ✔ Type "*p/c*" : quand l'élève a eu une utilisation faible de la calculatrice graphique

Sur la base de leurs réponses au premier questionnaire (les items 15 et 16 principalement), nous avons essayé de situer les neuf élèves par rapport à ces trois pôles et de mettre en évidence les régularités et les différences, tout en tenant compte de leurs profils mathématiques, et de leur rapport aux technologies informatiques. Ainsi :

- ✔ Les "*numériques*" : Anne et Charles. Ces deux élèves ont eu une utilisation très limitée de l'application GRAPH tout au long des entretiens et du devoir spécifique. Malgré quelques essais d'intégration de l'application graphique dans les deux premiers entretiens pour l'étude des variations, ils finissent tous les deux par opter pour une stratégie qui met en jeu d'une manière centrale, et en complément de l'application HOME, l'application TABLE dans le devoir spécifique (Cf *Genèse Instrumentales*).
- ✔ Les "*graphiques*" : Francis, Georges et Gérard. Leur utilisation relativement élaborée du module graphique de leur calculatrice graphique semble influer sur la prise en main de l'application GRAPH de la TI92. Ainsi, dès le premier entretien, Francis et Gérard ont un bon niveau d'instrumentation du graphique, à travers leur utilisation de certains ostensifs-TI92 tels que *F5-maximum, F5-Minimum? ZoomBox, ZoomOut* ou encore *Trace*. Cependant, le niveau mathématique semble avoir joué un rôle important dans la genèse instrumentale. Ainsi, Georges qui est un très bon élève, a intégré dès le premier entretien l'application HOME. Tandis que Francis, qui est un bon élève, ne semble avoir intégrer l'application formelle

qu'à partir du devoir spécifique, bien que son instrumentation dans les deux premiers entretiens (où il a mobilisé essentiellement l'application GRAPH) soit assez élaborée. Pour ce qui est de Gérard, son niveau mathématique moyen semble avoir été un obstacle pour une bonne genèse instrumentale, où l'absence de certaines connaissances mathématiques pendant le devoir spécifique ont entraîné une utilisation de la TI92 de type pré-analyse (Cf *Genèses instrumentales*).

- ✔ Les "*p/c*" : Françoise, Michel et Vincent. Bien que leur rapport aux calculatrices graphiques soit marqué par une utilisation faible aux dépens de l'environnement p/c, ces trois élèves n'ont pas eu la même genèse instrumentale avec la TI92. Ainsi, Michel intègre de manière efficace l'application HOME malgré son opinion très négative sur les technologies informatiques, ce qui nous semble dû à la nature de son rapport à la calculatrice graphique : en fait, Michel aurait plutôt un rapport négatif au graphique, ce qui se confirme dans son utilisation très limitée. Vincent quant à lui, résiste fortement à l'intégration de HOME, ce qui se manifeste par le re-calcul de la dérivée en p/c dans les deux premiers entretiens. Pour ce qui est de Françoise, elle a, contrairement à Michel et Vincent, une opinion positive sur les technologies informatiques. Son utilisation très limitée de la TI92 (aux niveaux graphique ou formel) semble due à deux raisons : tout d'abord, le fait qu'elle n'ait eu sa calculatrice graphique que pendant trois mois, ce qui est loin de favoriser une stabilité et même une construction de techniques instrumentées, surtout de type graphique. Ensuite, son niveau mathématique très moyen semble être à l'origine du recours systématique à l'environnement p/c (Cf *Entretien 1*) et de l'absence d'ostensifs tels que *Zeros* ou *Solve*.

Enfin, en ce qui concerne Serge, nous pouvons le situer entre les graphiques et les numériques. D'une part, son utilisation de la calculatrice graphique n'a pas été particulièrement avancée. D'autre part, sa genèse instrumentale a évolué progressivement d'une utilisation plutôt graphique au premier entretien avec une articulation avec TABLE et HOME vers une utilisation qui intègre moins l'application graphique et d'où est absente TABLE, pour enfin finir sur une utilisation qui met en œuvre exclusivement l'application HOME.

Voici un tableau récapitulatif des genèses instrumentales où les élèves sont placés par rapport à leurs profils mathématique et technologique, et où l'on voit leurs types ainsi que les phases suivant lesquelles se sont déroulées les genèses :

Légende	
	Travail essentiellement en p/c
	Phase d'épuration
	Phase d'éclatement

	Profil math.	Profil techn.		Entr. 1	Entr. 2	Devoir Spé.
Georges	Très bon élève	Rapport positif				
		Cal. gra.: plus d'un an	Gra			
		Utilisation de l'Ord. à la maison :souvent				
Michel	Très bon élève	très négatif				
		moins d'un an	P/C			absent
		parfois				
Francis	Bon élève	positif				
		moins d'un an	Gra			
		souvent				
Anne	Assez bonne élève	positif				
		plus d'un an	Num			
		parfois				
Vincent	Elève moyen	négatif				
		plus d'un an	P/C			
		ne possède pas d'ordinateur chez lui				
Serge	Elève moyen	positif				
		plus d'un an				
		pas d'ordinateur				
Gérard	Elève moyen, aux résultats irréguliers peu travailleur	très positif				
		plus d'un an	Gra			
		souvent				
Françoise	Elève très moyenne	positif				
		moins de trois mois	P/C			
		parfois				
Charles	Elève faible et lent	positif				
		moins d'un an	Num			
		parfois				

D'après ce tableau, nous pouvons voir l'importance du profil mathématique dans une genèse instrumentale. Ainsi, Michel bien qu'ayant un rapport très négatif aux technologies informatiques, est entré en phase d'épuration dès le premier entretien, tandis que Gérard, qui est un élève moyen, est resté en phase d'éclatement tout au long de l'année bien qu'il ait un rapport très positif aux technologies informatiques. Ce sont là des cas extrêmes mais qui nous semblent assez significatifs quant à la dépendance forte de la genèse instrumentale et du rapport personnel aux mathématiques.

Alors que le niveau mathématique semble influer sur le passage phase d'éclatement/phase d'épuration (un bon rapport aux mathématiques accélérerait une entrée en phase d'épuration), le rapport aux calculatrices graphiques (à travers les types graphique, numérique ou p/c) semble influer plutôt sur la nature de l'instrumentation et sur l'évolution du statut des applications principales.

2ème ANNEE D'EXPERIMENTATION

2EME ANNEE D'EXPERIMENTATION :

Lors de cette deuxième année, le scénario global a été identique à celui de la première année : l'étude des genèses instrumentales des élèves choisis s'effectue suivant les deux dimensions, institutionnelle et individuelle. Nous commencerons par traiter, de manière similaire, la dimension institutionnelle. Cependant, nous avons effectué beaucoup de changements en ce qui concerne la dimension individuelle, que ce soit dans le choix des élèves, dans le scénario des entretiens ou même dans la répartition des tâches mathématiques à résoudre. Tous ces changements ont été motivés, en dehors de la contrainte de l'éloignement du site, par les résultats de la première année d'expérimentation, l'objectif étant non seulement de valider ces résultats (ou certains d'entre eux, du moins) mais également d'en mettre en évidence d'autres. Signalons enfin que les entretiens et observations ont eu lieu dans le même lycée (Lycée Jehan de Beauce à Chartres), au même niveau d'enseignement (classe de Première S) et en compagnie de la même enseignante, Michèle Dupérier.

Dimension Institutionnelle :

Dans le cadre de la recherche, les séances que nous avons personnellement observées durant la deuxième année ont été pensées et préparées en fonction des résultats de l'année précédente. Ainsi, les choix de gestion institutionnelle se sont centrés autour de certains pôles clefs :

- Une prise en compte du fait que les élèves arrivent en première S avec une culture de type calculatrice graphique et donc de la nécessité d'installer un nouveau rapport au travail algébrique instrumenté. Ce qui va se traduire, par exemple, par la mise en place de rapports efficaces avec l'application HOME de calcul symbolique et par le souci d'établir des rapports entre cette application et les autres applications (notamment GRAPH et TABLE) dans le travail mathématique.
- La mise en place dès le début de l'année d'activités instrumentées sur l'équivalence et la transformation d'expressions, et le développement de techniques spécifiques pour leur traitement et leur contrôle. L'objectif étant de pouvoir gérer les cas (assez fréquents) où les expressions rencontrées en environnement-machine ne correspondent aux formes habituelles rencontrées dans l'environnement p/c.
- La volonté d'éviter, dans le nouveau domaine que représente pour les élèves l'analyse, les effets d'aplatissement de notions telles que celle de limite et de dérivée sur les

ostensifs TI92 correspondants, et ce en retardant volontairement l'introduction de ces ostensifs.

- La volonté de limiter les risques d'éclatement, en introduisant (en dehors des premières séances) un nombre très réduit d'ostensifs-TI92 nouveaux dans une séance donnée, que très peu d'ostensifs-TI92 nouveaux. Ceci va s'accompagner de certains choix au niveau des commandes introduites, qui ne se réduisent pas uniquement à des critères liés à la machine ou à des raisons économiques, mais également à des impératifs mathématiques. Tel est le cas du choix fait d'introduire officiellement les objets fonctionnels par l'ostensif *Define* (cf. *Année 2 - Dimension Institutionnelle - Conclusion*) et de ne pas utiliser à ce propos l'ostensif *STO*, ni l'entrée de l'expression de la fonction directement dans l'éditeur d'équations Y= (comme c'est le cas pour les calculatrices graphiques), afin de bien souligner le statut fonctionnel des objets manipulés, à un moment de l'apprentissage où l'objet fonctionnel est encore en construction.
- La prise en compte de l'importance dans le discours technologique spécifique aux techniques instrumentées de connaissances machines qui ne se limitent pas au niveau 1 et qui peuvent aller, pour certains points clefs de l'instrumentation (structure des expressions, phénomènes de discrétisation) jusqu'au niveau 3, quitte à dépasser les besoins mathématiques ordinaires, tels que pensés dans l'environnement usuel.

Date	Thèmes	Objectifs	Type de séance
19 Septembre	Prise en main de la TI92 Transformations algébriques	Familiarisation TI92 : Lecture des résultats affichés dans HOME Statut des transformations effectuées par la machine par rapport aux simplifications usuelles Contrôle des productions de la machine et de leur champ de validité	Séance d'une heure en classe entière

2 Décembre	Etude de variations Equations et Inéquations	Modélisation d'une situation physique Articulation des approches numérique, graphique et algébrique	Séance d'une heure en classe entière
22 Janvier	Limites Equations du second degré	Résolution d'une équation du 2nd degré avec paramètre : approches graphique, numérique et algébrique Utilisation des listes et du module Tableur	Séance de deux heures en classe entière
31 Janvier	Introduction de la notion de dérivée	Lien graphique entre tangente et dérivée	Séance d'une heure en classe entière + séance d'une heure en demi-groupes
3 et 5 Février	Fonction dérivée et dérivées de fonctions de référence	Calcul de la dérivée de fonctions de référence en certains points, en utilisant la définition avec la limite. Introduction de l'ostensif-TI92 de dérivation formelle	Deux séances de deux heures en classe entière
6 Juin	Recherche de fonctions sous contraintes : le raccord de tuyaux	Problème de recherche de fonctions sous contraintes Dimension « outil » de la notion de dérivée	Séance de deux heures en classe entière

Observation 1 : Expressions algébriques (septembre 96)

Contexte et objectifs :

Cette séance a lieu quelques jours seulement après l'arrivée des TI92 en classe. Composée de quatre activités, elle vise le travail sur l'égalité d'expressions algébriques, via l'utilisation des transformations permises dans l'application HOME. Elle vise également la mise en place de moyens de contrôle qui soient efficaces et économiques et qui permettent un choix de forme adapté au type de tâche à traiter. Ainsi, l'élève saurait évaluer dans son travail la part qui doit être à sa charge de la part qui est gérée par la machine. Remarquons que du point de vue instrumental, cette séance a pour objectif - essentiellement - la prise de conscience de l'importance du niveau 3 des connaissances-machine, et du lien que celles-ci peuvent avoir avec certaines connaissances mathématiques, notamment celle qui concernent le traitement d'expressions algébriques (pour plus de détails, cf. Annexe 1).

Déroulement :

10h15 : L'enseignante (désignée par M. dans la suite) fait sortir cahiers et machines et distribue la fiche de séance. Elle rappelle qu'il faut bien faire attention à ce qu'il n'y ait pas de variable affectée et demande comment libérer les variables. Les réponses fusent : F6. Même chose avec la question suivante : comment nettoyer l'écran ? F1-8. Elle précise qu'elle leur donne 10 minutes pour la première question, installe la rétroprojection puis circule dans les rangs. Ceci l'amène à faire préciser où lire sur l'écran ce qu'elle demande de noter. Plusieurs élèves répondent simultanément (noté Es dans la suite) : « à droite ».

10h20 : M. écrit au tableau les expressions. Dans le groupe observé (sans moyens spécifiques), A. (le garçon) en est à la 2ème expression, B. (la fille) déjà à la quatrième.

Un élève appelle M. En rentrant la deuxième expression, il a obtenu un message d'erreur. M. répercute collectivement et rentre l'expression, comme l'a fait A. sans signe de produit. Plusieurs réagissent immédiatement : il a oublié le signe multiplié.

M. acquiesce et demande de noter.

M. intervient auprès d'un autre élève ; visiblement il n'a pas rentré correctement l'une des expressions et s'étonne du résultat. M. lui indique son erreur et là encore répercute collectivement en conseillant de bien vérifier à gauche sur l'écran, si ce qui a été entré est correct.

Elle leur conseille aussi de rentrer d'abord toutes les expressions et de noter avant de chercher à identifier les transformations faites par la machine.

A. appelle M. qui lui explique que ses problèmes sont dus au fait qu'il n'est pas en *pretty print* ; elle lui montre comment s'y mettre.

A. et B. ont maintenant fini de rentrer les expressions. Ils discutent ensemble de ce qu'a fait la machine, reconnaissent développement et factorisation, mais n'écrivent rien.

M. presse les quelques retardataires.

10h30 : M. fait un bilan collectif, expression par expression. Elle entre les expressions sur la rétroprojetable et pendant ce temps, des élèves, à tour de rôle vont écrire le résultat au tableau,

Expression algébriques

I - Entrez les expressions suivantes, notez le résultat obtenu après l'appui sur la touche $\boxed{\text{ENTER}}$ Expliquez le type de transformation que, selon vous, la machine a effectué.

	Expression entrée	Expression affichée avec $\boxed{\text{ENTER}}$	Commentaires
A	$(x-2)^2-4x^2$		
B	$(-x+3)^2+x(3x-9)$		
C	$\frac{2}{x}+\frac{1}{x-2}$		
D	$\frac{2}{x}+\frac{x}{x-2}$		
E	$\frac{x-2}{x^2-2x}$		
F	$\frac{x-4}{(x-2)(2x-1)}+2$		

2 - Pour les chacune des expressions précédentes, notez le résultat fourni par les *commandes* :
expand(expr) **factor**(expr), **factor**(expr,var), et eventuellement **comDenom**(expr)

3 - Parmi les expressions qui figurent sur la même ligne :
indiquez celles qui sont égales ;
indiquez de façon précise quelles méthodes et quelles commandes de la calculatrice vous avez utilisé.

	G	H	I	J
1	x^6-1	$(x^3-2x^2+2x-1)(x+1)(x^2+x+1)$	$(x^2-1)(x^4+x^2+1$	$(x^3+2x^2+2x+1)(x+1)(x^2-x-1$
2	$\frac{x^2-6x+2}{2x-1}$	$\frac{11}{4}+\frac{3}{4(2x-1)}-\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}+\frac{4-11x}{2(2x-1)}$	$\frac{(x-3-\sqrt{7})(x-3+\sqrt{7})}{2x-1}$
3	$3-\frac{1}{x}+\frac{16}{x-7}$	$\frac{3x-5}{x-7}+\frac{1}{x}$	$\frac{3x^2-4x-7}{x(x-7)}$	$\frac{3(x+1)(x-\frac{7}{3})}{x^2-7x}$

Préciser les méthodes que l'on peut utiliser pour démontrer que deux expressions sont égales..

4 - Vous avez démontré que les expressions $A=6+\frac{35}{4(x-3)}-\frac{7}{4(x+1)}$ et $B=\frac{6x^2-5x-4}{(x-3)(x+1)}$ sont égales. Indiquez , si cela est possible la suite des commandes de la TI92 qui permettent, sur la TI92 de passer de A à B et de B à A.

D'après IREM de Montpellier

ce qui permet de conserver l'information. Chaque fois, les élèves précisent ce qu'a fait la machine : « Elle a développé », « Elle a factorisé », « Elle a changé l'ordre, rien d'autre ». Pour la seconde, elle fait détailler la factorisation en demandant comment passer de l'expression entrée à l'expression donnée par la machine (x-3)(4x-3). Elle les aide à formuler que $(-x+3)^2$, c'est la même chose que $(x-3)^2$ car (-x+3) et (x-3) sont opposés donc ont leurs carrés égaux.

M. passe ensuite à la quatrième expression. Un élève dit : « Elle a évité qu'il y ait un x en haut », d'autres font remarquer qu'il y a $\frac{2}{x}$ des deux côtés, qu'elle a juste transformé : $\frac{x}{x-2}$ en $\frac{2}{x-2}+1$.

10h35 : M. leur demande de le vérifier eux-mêmes à la main, commence à circuler et très vite reprend collectivement : « Comment passer de la première expression à la seconde ? » Un élève propose d'écrire 1 comme $\frac{x-2}{x-2}$. Le calcul est écrit au tableau et M. fait remarquer que cela revient à réduire au même dénominateur. Elle conclut ensuite en disant que la machine a mis l'expression entrée sous forme de la somme d'une constante et d'une fraction dont le numérateur est une constante.

Elle passe ensuite à la cinquième expression. Les élèves en choeur disent que la machine a simplifié l'expression. M. demande : « Ca ne vous pose pas de problème ? »

Visiblement non, à voir leur réaction. Elle insiste alors en demandant par quoi la machine a simplifié.

Es : x-2

Elle fait ensuite préciser que le dénominateur est x(x-2) puis revient au problème de la validité de la simplification.

M. : « L'année dernière, est-ce que vous simplifiez comme cela ? »

Une élève l'interrompt : elle n'a pas compris comment on arrive à 1/x. M. se fait dicter la suite des transformations algébriques et les écrit au tableau, puis revient à la question initiale.

M. : « Si vous simplifiez comme cela, croyez-vous que je serais tout à fait contente ? »

Les élèves semblent se demander où elle veut en venir.

M. choisit alors plusieurs valeurs de x : x=1 puis x=3 et fait comparer les valeurs des deux expressions : elles sont égales, ce qui n'étonne personne. Elle demande alors :

M. : « Est-ce que ce sera encore vrai pour toutes les valeurs de x ? »

B. : « Sauf pour x=0 »

M. : « Pourquoi ? »

B. : « Parce qu'on peut pas diviser par 0. »,

M. fait constater que, pour x=0, les deux expressions n'ont pas de sens, puis revient à la question initiale, en excluant 0. Un élève propose alors 2. M. détaille les calculs correspondants pour les deux expressions et on constate que l'expression de gauche n'est alors pas définie tandis que celle de droite l'est.

10h45 : M. précise que dire que deux expressions sont égales, c'est dire qu'elles sont identiques pour toutes les valeurs de x, puis elle demande : « Toutes les valeurs, qu'est-ce que ça veut dire ? »

E. : « Les entiers relatifs. »

M. : « Mais il n'y a pas que les entiers relatifs, parmi les nombres ! ».

Elle fait élargir à tous les nombres connus : décimaux, rationnels, nombres exprimés avec des radicaux..., puis demande d'écrire dans le cahier : « Pour que deux expressions soient égales, il faut qu'elles soient identiques pour toutes les valeurs de la variable ». Elle précise :

M. : « La variable, ici c'est x mais ce pourrait être t »

A. : « Ou y »

M. passe ensuite à la dernière expression que la machine renvoie sous la même forme.

A. dit à B. en aparté : « Si tu veux qu'elle fasse quelque chose tu fais : DIAMANT ENTER »

10h48 : M. demande aux élèves de passer à la partie 2 et vérifie collectivement qu'ils savent où trouver les commandes concernées. Les élèves répondent en coeur : « F2 ». Elle demande ensuite de prévoir la factorisation par la machine de l'expression : x2-4.

Es : (x-2)(x+2)

Elle le fait à la rétroprojetable, ce qui confirme la prévision. Elle propose ensuite de remplacer 4 par 3 et demande aux élèves comment factoriser cette expression.

B. : « on n'a qu'à remplacer -3 par -4+1 »

M. : « Quand on a factorisé x^2-4, qu'a-t-on utilisé ? »

Les élèves répondent qu'ils ont utilisé l'identité remarquable a^2-b^2 et M. écrit, sous la dictée :

$x^2-4 = x^2 - 2.2$

$x^2-4 = (x-2)(x+2)$

Puis elle demande si x^2-3, c'est très différent.

Es : « Non »

M. : « Alors que fait-on ? »

B. propose à nouveau son idée.

M. écrit, sous sa dictée : $x^2-3 = (x^2-4)+1 = (x-2)(x+2)+1$

M. accepte la réponse mais fait remarquer que l'expression n'est pas factorisée. Les élèves sont d'accord. Un élève propose alors de « mettre 3 sous la racine ». M. lui fait préciser son idée puis écrit :

$x^2-3 = x^2 - (\sqrt{3})^2$

Ils arrivent alors à prévoir la factorisation associée.

M. fait factoriser par la machine en utilisant la commande *factor*. L'expression n'est pas modifiée.

Elle demande comment faire alors pour faire produire la factorisation à la machine. Un élève propose aussitôt de marquer la variable et lui rappelle qu'elle en a déjà parlé en cours.

M. conclut alors : « *Factor* factorise en utilisant des entiers, si on veut factoriser avec des racines, il faut préciser la variable », puis leur demande de faire la partie 2. Pendant ce temps, elle circule dans les rangs.

10h55 : M. : « Les expressions, vous êtes obligés de les retaper ? »

Es : « Non »

M. : « Non, vous allez les rechercher avec votre souris. »

B. travaille et dit à A. : « C'est marrant ça »

Un élève demande s'il faut faire *comDenom* pour les premières. M. reprend collectivement et précise que l'on utilise la commande *comDenom* que lorsqu'elle a un sens, c'est à dire lorsqu'il y a un dénominateur[1].

M. intervient ensuite auprès de Benoît qui, sur sa feuille, a écrit : « *expand* = ... ». M. insiste sur la nécessité d'écrire correctement : ce n'est pas *expand* qui est égal au second membre. Voyant que certains ont du mal à organiser leurs réponses, elle leur propose de faire un tableau.

A. se lance aussitôt dans la construction du tableau. B., elle, continue à travailler avec la machine. Elle est gênée parce que la commande *Expand*, pour la deuxième expression, lui donne exactement ce qu'elle avait déjà et se demande si elle ne se trompe pas. Je la rassure.

11h : B. a du mal à gérer les parenthèses associées à la commande *factor*. Si l'on entre la commande par F2-2, *factor*(s'inscrit sur la ligne d'édition, il suffit ensuite d'entrer ou recopier l'expression à factoriser et de rajouter une parenthèse correspondant à celle ouverte automatiquement à la fin. B., visiblement, trouve qu'il y a trop de parenthèses, en efface et se retrouve avec un message d'erreur. Je lui explique la syntaxe de la commande.

---

[1] Précisons que la commande ne bloque pas en l'absence de dénominateur, elle renvoie simplement l'expression initiale.

M. passe et dit à A. qui est toujours en train de tracer son tableau, de se dépêcher.

11h03 : M., collectivement, fait le point pour les deux premières expressions, en utilisant la rétroprojetable.

M. précise que l'on peut aller chercher les commandes dans F2 ou les taper directement. Elle fait expliquer aussi pourquoi, pour les deux premières expressions, les deux commandes de factorisation donnent le même résultat. Elle les aide à formuler que les deux expressions se factorisant en deux facteurs du premier degré à coefficients entiers, on obtient cette factorisation avec la commande *factor* simple, et elle précise que ce serait aussi le cas si les coefficients étaient rationnels.

Elle demande ensuite si tout le monde a fait l'expression 3. Seuls quelques doigts se lèvent. En effet, la plupart des élèves ont mis du temps à s'organiser, à tracer le tableau, certains ont fonctionné par commande et non par expression, ce qui accroît encore le temps passé dans la recherche des expressions sur l'écran, si on veut éviter les recopies.

M. relance le travail individuel. A., qui a fini son tableau, avance maintenant rapidement, B., elle, se met à faire un tableau pour noter les résultats.

11h10 : M. fait le point pour l'expression E, en demandant ce que donnent les commandes pour cette expression.

Es : « On a toujours 1/x »

M. acquiesce. La sonnerie retentit. M. demande de terminer la fiche pour le lundi suivant en faisant un tableau propre pour cette activité 2.

Elle conclut ensuite rapidement la séance : elle souligne qu'on peut obtenir une même expression sous plusieurs formes et elle leur demande combien ils en ont obtenu pour D ; les réponses données sont 3 pour les uns, 4 pour les autres. Elle demande alors laquelle on prendra si l'on veut résoudre l'équation D=0 et plusieurs élèves répondent : « La factorisée »

M. acquiesce et ajoute que, suivant le travail que l'on veut faire, que l'on ait ou pas la machine, il faut choisir la forme la plus adaptée.

Analyse :

Lors de cette séance, où seules les deux premières activités ont pu être traitées, nous pouvons remarquer* (*pour une analyse plus détaillée, voir [Artigue & al., 1998]) que l'activité 1 a suscité un travail mathématique que ce soit sur le plan formel, à travers l'interprétation des résultats-machine par rapport aux transformations usuelles ; ou sur le plan sémantique, par la prise en compte des références et du domaine de validité des expressions (par exemple, à l'occasion de la transformation par la machine de l'expression $\frac{x-2}{x^2-2.x}$ en $\frac{1}{x}$ où il faut tenir compte du domaine de validité, à savoir IR\{2}). Ainsi, ces activités permettent-elles non seulement de mettre en place des connaissances-machine mais également d'approfondir des connaissances mathématiques qui, nous l'avons vu dans les entretiens individuels de l'année précédente (où beaucoup d'élèves ne découvrent la singularité de la fonction qu'après avoir tracé le graphe ou au hasard d'un parcours de TABLE), ne vont pas de soi même à une époque avancée de l'année scolaire.

Par ailleurs, sur le plan strictement instrumental, l'enseignante M. distribue, en début de séance, une fiche à chacun des élèves et annonce la séquence préliminaire de *nettoyage* (cf. *Dimension Institutionnelle - Année1*) : libération des variables par *F6* et nettoyage de l'écran par *F1-8*. Ensuite, elle a eu à traiter des contraintes de trois niveaux : Le premier niveau à travers des problèmes de syntaxe concernant les commandes *Expand* ou *Factor*(. , x) (gestion des parenthèses), le deuxième niveau concernait par exemple le passage en *Pretty Print* tandis que le discours de M. sur la différence entre *ab* et *a*b* indiquait la présence du troisième niveau.

Pour ce qui est de la gestion du collectif-individuel, notons l'intervention très marquée des élèves lors des bilans collectifs (*pendant que M. entre les expressions sur la machine rétroprojetable, des élèves, à tour de rôle vont écrire au tableau*) bien que M. reprenne souvent (en collectif) les erreurs qui apparaissent à titre individuel chez les élèves.

En ce qui concerne la comparaison des résultats TI92 et p/c, un des objectifs même de cette séance était le contrôle systématique en p/c des résultats fournis par la machine.

Notons que durant cette séance qui s'est déroulée uniquement dans l'application formelle HOME, les commandes suivantes ont été utilisées : *Factor*, *Factor(. ,x)*, *Expand* et *ComDenom*.

Enfin, remarquons que les deux dernières activités prévues n'ont pu être traitées et cela principalement à cause du coût d'utilisation de la machine : ainsi, même s'il n'y a pas eu beaucoup d'erreurs ou de difficultés liées à la machine - ce qui traduit d'ailleurs une familiarisation rapide, confirmant l'un des résultats de l'année précédente - et bien qu'il n'y ait eu qu'une application en jeu (HOME), le rythme de la séance a été retardé par les recopies des expressions. En effet, l'obtention des résultats-machine est coûteux en temps, même en utilisant les possibilités de recopie d'expression de l'écran vers la ligne d'édition, en procédant expression par expression, pour limiter les déplacements dans l'écran. Les conditions de viabilité de cette séance (surtout de l'activité 2) sont encore plus coûteuses si l'on ajoute le temps qu'il faut pour la constitution du tableau.

Observation 2 : La bille (décembre 96)

Contexte et objectifs :

Cette séance se situe au début du mois de décembre et à la fin de la période pré-analyse. Elle vise, à travers l'étude des variations d'une fonction - déduite elle-même d'un travail de modélisation -, à mettre en œuvre de manière articulée les trois registres permis par la TI92 : numérique, graphique et algébrique, et cela sur les objets mathématiques que sont les équations et les polynômes. Elle vise également, par le choix d'une situation où l'intuition est mise en défaut, à consolider l'importance du statut de l'approche algébrique - et donc de l'application HOME - dans le travail mathématique et à engager les élèves dans une démarche de généralisation. Elle aspire enfin à la mise en place du statut de la factorisation dans l'étude du signe, ce qui avait fait défaut dans le travail des élèves lors des entretiens de l'année précédente (cf. *Entretien 1 - Année 1 - Francis* par exemple)

Déroulement :

Après lecture du texte et un rappel collectif sur les formules donnant le volume du cylindre et de la sphère, les élèves se lancent dans le calcul de V(x). Comme l'on pouvait s'y attendre, un certain nombre d'entre eux vont éprouver des difficultés à définir une stratégie de calcul. Un point collectif sera effectué au bout de cinq minutes, avec l'aide de la TI92 rétroprojetable, les élèves dictant à l'enseignante les expressions à entrer et les calculs à effectuer. Cette phase collective se termine par la formulation de conjectures concernant la position de la bille suivant les valeurs de x. Comme prévu, la conjecture qui est formulée et écrite au tableau est la suivante :

« Si $x < 8$, la bille est totalement dans l'eau

Si $x = 8$, elle affleure l'eau,

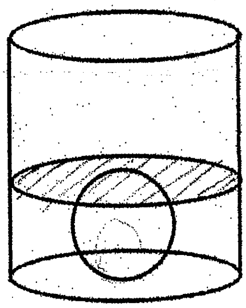
Si $x > 8$, la bille est hors de l'eau. »

Suit une courte phase de travail autonome où les élèves ont à trouver les moyens de prouver la véracité de leur conjecture. De fait, comme l'on pouvait s'y attendre, la reformulation du problème en comparaison de V(x) et V(8) ne va pas de soi et l'enseignante va de nouveau

Enoncé : la bille

Lundi 2 Décembre 1996	1 S4

- Dans un cylindre à base circulaire de 10 cm de rayon et de hauteur aussi grande que l'on veut, repose une bille de 8 cm de rayon que l'on recouvre d'eau jusqu'à affleurement.
  On remplace la bille par une autre bille de rayon x cm, la quantité d'eau dans le cylindre restant la même.
  On se propose d'étudier le problème suivant :
  - la bille est-elle sous l'eau ?
  - la bille sort-elle de l'eau ,
  - la bille affleure-t-elle



Indication : Appeler V(x) le volume d'eau qui permet de recouvrir exactement la bille de rayon x.

- Même problème si le rayon de la bille initiale est 3 cm au lieu de 8 cm.

- *Généralisation* : Le rayon de la bille initiale est a (en cm).
  Suivant les valeurs de a, peut-on trouver des valeurs de x pour lesquelles la bille de rayon x reste totalement immergée ?

assez vite intervenir et s'appuyer sur des schémas dessinés au tableau pour amener collectivement à la formulation souhaitée.

Toujours collectivement, l'enseignante engage alors l'exploration graphique, les élèves conduisant parallèlement l'exploration sur leur propre machine : entrée de V(x) et V(8) dans Y=, définition d'une fenêtre d'affichage : [-1, 11], après avoir fait préciser les valeurs à considérer pour x, utilisation de *ZoomFit* pour ajuster la fenêtre verticalement, utilisation de la commande *Intersection* du menu F5 pour trouver les coordonnées approchées des deux points d'intersection, en insistant sur le fait qu'il s'agit ici de coordonnées approchées. Certains élèves ne connaissant pas bien le fonctionnement de cette commande d'intersection n'y arrivent pas et elle recommence plus lentement en précisant la fonction de chaque étape.

L'exploration graphique conduit sans difficultés à la disqualification des conjectures initiales et à leur rectification.

Cette phase a duré 12 minutes.

L'enseignante annonce que maintenant on va s'appuyer sur le calcul et non plus seulement sur le graphique et demande aux élèves s'ils ont des suggestions à faire. Vincent, un élève observé, va répondre tout de suite en proposant de résoudre l'équation V(x) = V(8). En fait, il avait anticipé sur ce travail dans la phase collective d'exploration graphique et déjà résolu cette équation dans HOME après avoir calculé une valeur approchée de V(8). L'enseignante lui demande à quoi va lui servir cette résolution ; pour lui, il s'agit de trouver les points d'intersection mais elle insiste sur le fait que pour connaître la position de la bille, il faut aussi comparer V(x) et V(8). La tâche est reformulée en étude du signe de V(x) - V(8) et les élèves sont renvoyés à un travail autonome qui sera entrecoupé de points collectifs. Le lien : étude du signe / factorisation émerge sans difficulté, mais la factorisation obtenue par la commande *Factor* n'est pas complète puisque les racines ne sont pas toutes rationnelles. C'est l'enseignante qui va rappeler l'utilisation de *Factor(expression, x)* qui permet d'arriver à un produit de trois facteurs. Elle les aide aussi à obtenir des valeurs approchées des racines, en utilisant la commande *Zeros* associée à la touche diamant. Cette manipulation visiblement ne leur est pas familière, ce qui l'amène à rappeler les liens entre les commandes *Zeros* et *Solve*. Suit la réalisation autonome d'un tableau de signes qui ne pose pas, elle, de problème et la conclusion. L'ensemble dure environ 15 minutes.

On passe ensuite à la seconde bille. Les élèves pensent au départ que la situation va être la même. La situation va être gérée en une dizaine de minutes, sans difficulté particulière, toujours dans un travail autonome coupé d'interventions collectives. Les stratégies utilisées

sont soit graphiques, soit algébriques comme celle de Vincent qui, tout de suite, entre l'expression V(x) - V(3), la fait factoriser et fait aussi résoudre l'équation correspondante.
Un bilan collectif est effectué et le tableau de signes tracé au tableau.
C'est la fin de la séance et l'étude du cas général est donnée à chercher en travail à la maison.
Une synthèse collective sera organisée la semaine suivante à partir de ce travail.

Analyse :
Lors de cette séance, l'intervention de M. a été très fréquente mais souvent nécessaire. En effet, la difficulté mathématique qui accompagne cette activité demande une prise en charge indispensable de l'enseignante. Ainsi, c'est M. qui a aidé à la formulation du problème en terme de différence V(x)-V(8), et c'est également M. qui a orienté le travail des élèves vers l'algébrique avant de le soutenir, soit en encadrant l'utilisation d'ostensifs-TI92 (voir ci-dessous), soit en guidant l'étude de signe (tout en restreignant l'intervalle d'étude aux x positifs, ce qui est une conséquence de la modélisation). Cependant, les élèves ont eu des moments d'autonomie lors de l'exploration graphique ou de la formulation de conjectures.
Par ailleurs, et sur le plan instrumental, nous avons remarqué des changements considérables dans l'utilisation de la machine en classe. Son statut d'outil de conjecture est plus marqué, à travers une lecture graphique où a été mise en jeu la commande *ZoomFit* avec une adaptation de [xmin,xmax] (deuxième niveau de connaissances) en fonction des contraintes de modélisation (sachant que la variable en question devait être comprise entre 0 et 10), ainsi que la commande *F5-Intersection* qui a été introduite à l'occasion, ce qui a provoqué un petit retard le temps de présenter sa syntaxe (niveau 1) et de préciser que les résultats obtenus sont approchés (niveau 3). L'application HOME a également été investie pour des calculs, notamment pour la simplification d'une expression, pour la factorisation (où les deux ostensifs *Factor* et *Factor(. , x)* ont été mobilisés) et pour la recherche de zéros (où M. a saisi l'occasion pour préciser le lien qui existe entre les ostensifs *Zeros* et *Solve*). M. a également utilisé la combinaison de touches ♦ENTER pour obtenir des valeurs approchées des zéros trouvés et pouvoir les ordonner (dans le tableau de signe). Le travail p/c a pris le relais pour l'étude du signe d'une expression à l'aide du tableau de signe. Notons enfin la présence d'un discours faisant intervenir le niveau 3 des connaissances-machine, concernant la différence entre les deux signes "*moins*" qui apparaissent dans les calculs. Ces deux signes sont en effet des exemples de nouveaux objets spécifiques de l'environnement TI92 dont les propriétés sont restreintes par rapport à celles du signe "*moins*" usuel (Cf. *Problématique et cadre théorique*).

Ainsi, la TI92 a été mise à contribution de manière intense dans cette séance, que ce soit pour conjecturer (dans l'application GRAPH), pour prouver ou même pour calculer des valeurs approchées à l'aide de ♦ENTER (dans l'application HOME), où elle a pris en charge un travail technique lourd qui aurait pu être handicapant pour le déroulement de cette activité.

Observation 3 : Résolution d'une équation du second degré avec paramètre (janvier 97)

Contexte et objectifs :

Cette séance s'inscrit dans l'ingénierie déjà citée, qui a pour objectif une première approche des limites préparatoire à la notion de dérivée. Dans un premier temps, seules les approches graphique et numérique sont prises en compte dans l'utilisation de la machine, où sont traités progressivement les cas de fonctions de référence de limite nulle en 0, puis de fonctions telles que $x \mapsto \cos(x)$ ou $x \mapsto \frac{1}{x}$, ou même $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$, la preuve concernant ce dernier cas devant être complètement gérée par M. Par ailleurs, un des choix de base de cette ingénierie concerne l'utilisation de la notion de négligeabilité d'une fonction par rapport à une autre au voisinage de 0 pour traduire les différences de vitesses de convergence.

Dans ce contexte, cette séance-ci vise le réinvestissement de ce qui précède dans une situation de recherche : l'étude de l'évolution des racines d'une équation du second degré dépendant d'un paramètre lorsque celui-ci tend vers 0. Le scénario, quant à lui, est composé de trois parties : deux parties où l'approche est successivement graphique puis numérique et qui forment la phase d'exploration et de conjecture (avec l'aide notamment de l'ostensif *Zeros* et du module Tableur), puis une partie qui consiste en la preuve des conjectures et qui va être l'occasion d'introduire pour la première fois l'ostensif de calcul formel : *limit* de l'application HOME.

Déroulement :

Nous rendons compte ici synthétiquement du déroulement de l'expérimentation de cette séance à Chartres. La première partie va occuper environ 45 minutes, la seconde et la troisième environ 25 minutes.

Comme l'on pouvait s'y attendre, l'exploration graphique prendra du temps, et ce même si les élèves montrent dans leur grande majorité une aisance certaine dans le travail graphique avec

On considère l'équation $a\,x^2 - 2\,x + 1 = 0$ ***dans laquelle a est un nombre réel.***
On se propose d'étudier le comportement des racines de cette équation quand a devient « très petit ».

Approche graphique expérimentale.

Soit la famille de fonctions définies par $f(x) = a\,x^2 - 2\,x + 1$.

Dans le module ◆[Y=],

Définissez dans Y1 la fonction correspondant à $a = 1$. Comment lit-on graphiquement les racines de l'équation proposée ?

Définissez dans Y2, Y3, Y4,...Y8 les fonctions correspondant à $a = 0{,}5$, 0,1, 0,05, 0,01, 0,005, 0,001, 0,0001. Comment lit-on graphiquement les racines de l'équation proposée ?

Vous préciserez les fenêtrages que vous avez choisis et vous compléterez par lecture graphique le tableau suivant :

a	**f(x)=**	**plus petite racine de f(x)=0**	**plus grande racine de f(x)=0**
1	Y1(x)=		
0,5	Y2(x)=		
0,1	Y3(x)=		
0,05	Y4(x)=		
0,01	Y5(x)=		
0,005	Y6(x)=		
0,001	Y7(x)=		
0,0001	Y8(x)=		

Que devient chaque racine quand a tend vers 0 ?

Approche numérique.

On se propose de calculer les racines pour les diverses valeurs de a.

Dans le module ◆[HOME] :

Résoudre l'équation $a\,x^2 - 2\,x + 1 = 0$ en utilisant la commande : **zéros(,x)**

Vous obtenez une liste de deux éléments, les deux racines de l'équation f(x)=0.

Stockez cette liste dans la variable l

....

Définissez la fonction p de la variable a qui contient la plus petite racine.

Define p(a)=l[1]

Définissez la fonction g de la variable a qui contient la plus grande racine.

Define g(a)=l[2]

Pour visualiser les valeurs des racines pour chaque valeur de a, on va utiliser le **module tableur** de la TI.

On l'obtient par : [APPS][6]

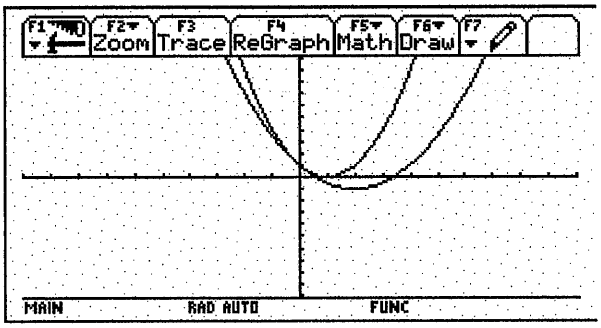
Dans la colonne c1 on met les valeurs de a.
Dans la colonne c2 on met la plus petite racine par la commande : c2=p(c1)
Dans la colonne c3 on met la plus ~~petite~~ grande racine par la commande : c3=g(c1)

a	plus petite racine de f(x)=0	plus grande racine de f(x)=0
1		
0,5		
0,1		
0,05		
0,01		
0,005		
0,001		
0,0001		

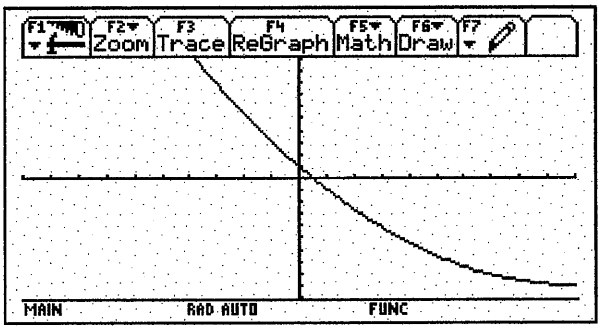
Que se passe-t-il lorsque l'on donne à a les valeurs 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}, 10^{-14} ?
Comment interpréter ce dernier résultat ?

la machine. Suivons par exemple le travail de Vincent observé pendant cette séance. Ne suivant pas exactement les consignes, sans doute par souci d'économie, il commence par définir la fonction f dans HOME puis entre la fonction correspondant à a=1 dans l'application Y= par : y1=f(x) | a=1. La TI92 semble accepter cette définition mais lui renvoie le message d'erreur : « Undefined variable » lorsqu'il demande le tracé dans GRAPH. Il aurait fallu en effet qu'il définisse f comme une fonction des deux variables x et a pour pouvoir procéder ainsi.

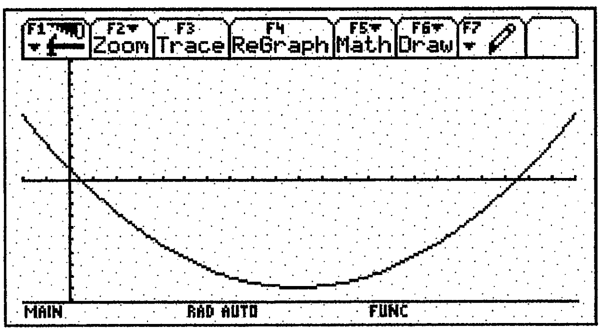
Il entre alors les deux premières fonctions dans Y= de façon standard et les fait tracer :



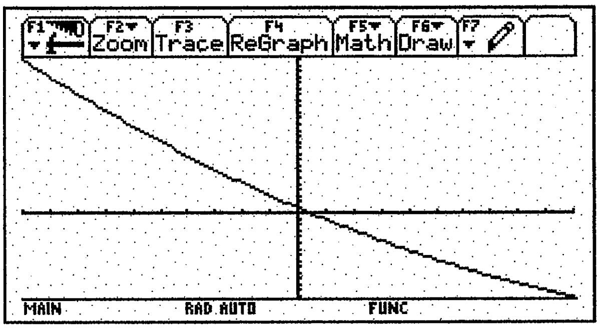
puis désélectionne y1 pour pouvoir visualiser les zéros de y2 seule. Ensuite il définit y3, désélectionne y2 et fait tracer, obtenant le tracé ci-après :



Il passe alors dans Windows, choisit l'intervalle [-2, 22] pour y et obtient :

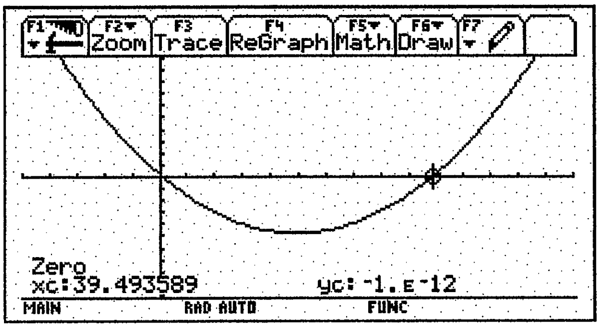


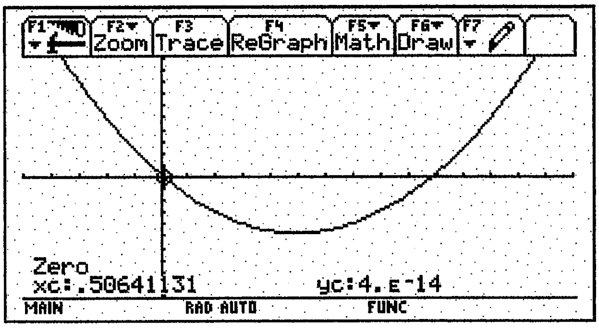
Il passe alors à y4, fait tracer la courbe en *ZoomStd* puis en *ZoomFit*, obtenant ceci :



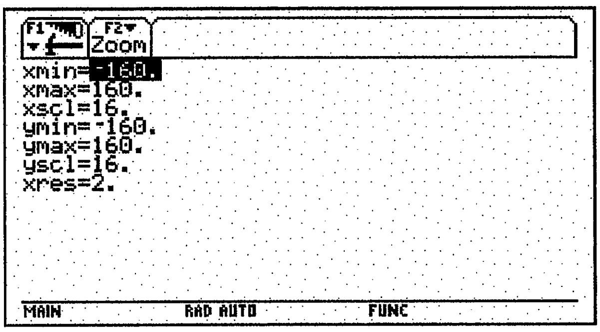
Dix minutes se sont écoulées, l'enseignante fait un point collectif, à partir des deux premières fonctions, montrant comment lorsque l'on utilise *Trace*, on bascule d'une courbe à l'autre avec les flèches haut et bas de la souris. Pour mieux visualiser la racine inférieure, les élèves proposent de faire *ZoomBox*, l'enseignante explique que l'on peut faire aussi *ZoomIn* et *ZoomOut*, et donne les facteurs correspondants. Un élève propose ensuite d'utiliser la commande *Zeros*. L'enseignante la fait fonctionner puis demande comment utiliser la commande *Intersection,* avant de faire le point sur les différentes méthodes à leur disposition.

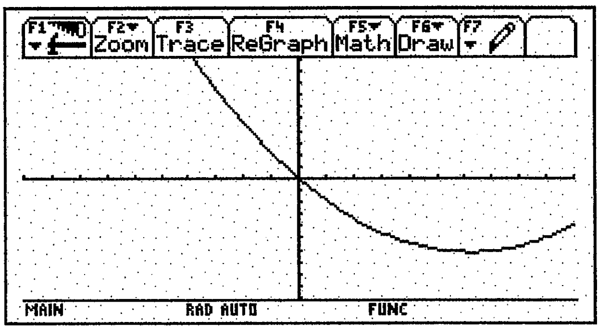
Pendant ce temps, Vincent avance, exploitant la commande *Zeros* avec y4 avec d'abord une inversion des bornes inf et sup de l'intervalle qui génère un message d'erreur.

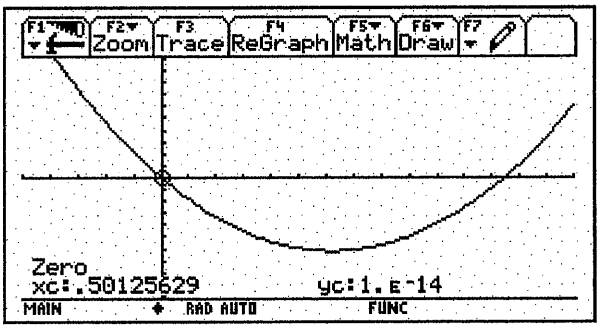


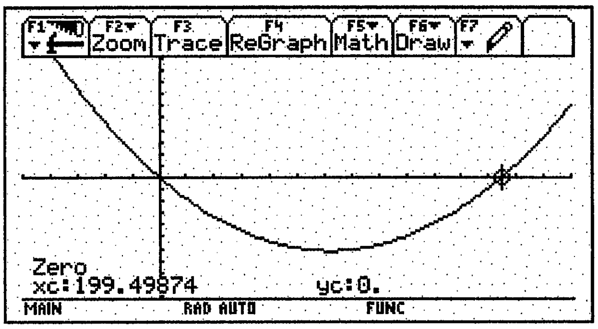


Il passe ensuite à y5, la fait tracer et par deux *ZoomOut* successifs à partir de l'origine obtient un tracé adapté puis utilise la commande *Zeros* pour approcher les racines :





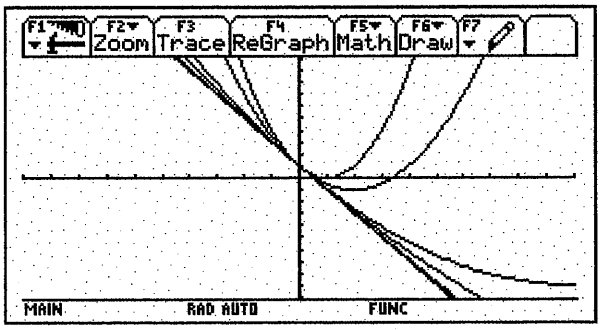




Au bout de 20 minutes, Vincent en est à y7. A ce moment, répondant à une question d'un élève, l'enseignante s'adresse à toute la classe pour savoir si la machine calcule exactement dans le module GRAPH. La réponse est clairement : « Non ». Elle est également obligée de revenir sur la commande d'intersection que des élèves ont du mal à utiliser. Vincent continue à travailler, adaptant ses fenêtres par le choix de valeurs, sans plus faire de zooms et utilisant systématiquement la commande *Zeros*. Il note soigneusement au fur et à mesure les valeurs approchées trouvées pour les racines.

Quand l'enseignante interrompt le travail individuel pour un bilan au bout de 30 minutes, il a pratiquement terminé.

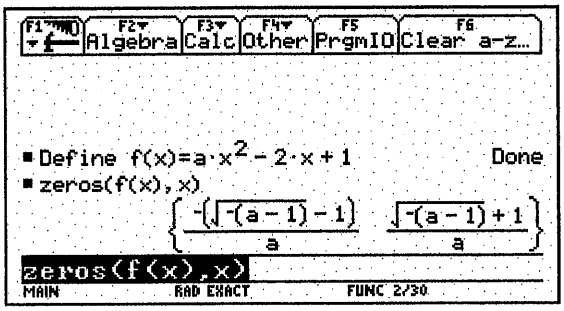
Dans le bilan, mené avec la calculatrice rétroprojetable, l'enseignante s'intéresse d'abord à la racine inférieure dans un tracé en *ZoomStd*.

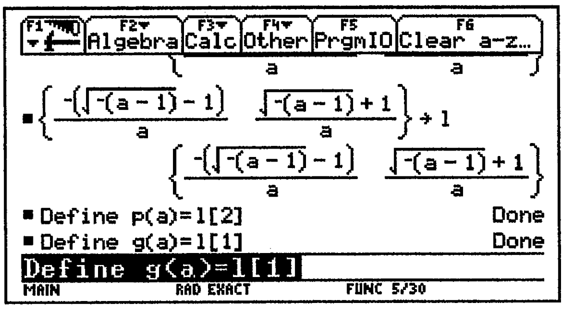


La première constatation faite par les élèves est que les courbes ont toutes l'air de passer par le même point mais que ce n'est pas tout à fait vrai, puis que les courbes ressemblent de plus en plus à des droites. Ceci va conduire à tracer la droite d'équation y=-2x+1 proposée comme un élève comme très proche de y8 et qui effectivement ne s'en distingue pas graphiquement. Ensuite l'enseignante oriente les élèves vers des conjectures concernant la racine. Elle obtient sans difficulté que cette racine a l'air de tendre vers 1/2. Les différents constats sont écrits au tableau puis l'enseignante revient sur la proximité parabole/droite en demandant la différence entre les valeurs correspondantes de y pour une même valeur de x : ax^2 et en la faisant évaluer pour x=1/2 et différentes valeurs de a.

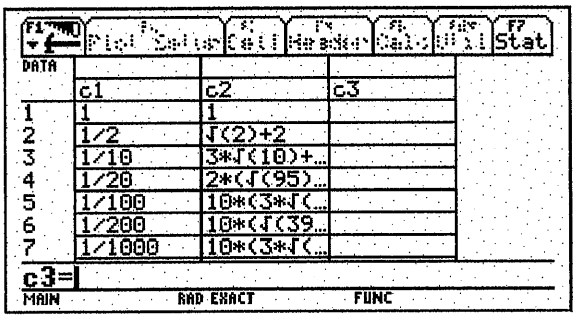
Pour la seconde racine ensuite, les élèves disent successivement qu'elle est positive et s'éloigne de 0, qu'elle est de plus en plus grande, puis qu'elle a l'air de tendre vers l'infini.

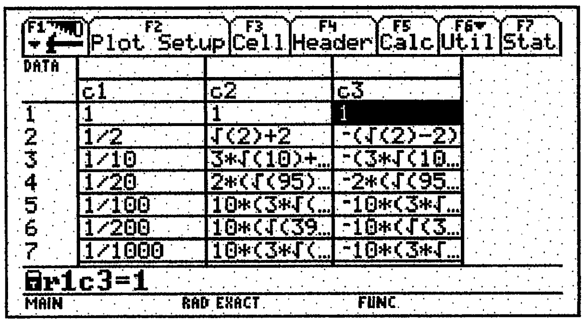
Pour démarrer l'approche numérique, l'enseignante fait nettoyer les variables, en précisant que F6 ne nettoie que les variables à une lettre. Elle demande aussi de mettre si ce n'est pas déjà fait les machines en mode exact. Vincent démarre tout de suite et ne rencontre pas de difficulté à suivre les instructions de la fiche.



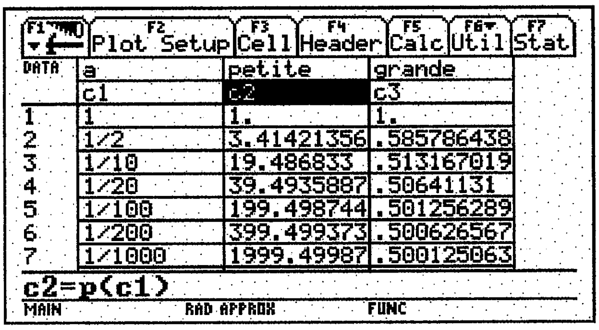


Les élèves travaillent avec leur fiche et l'enseignante effectue parallèlement les manipulations sur la rétrojetable. Elle précise assez vite que ceux qui n'obtiennent pas les racines correctes ont vraisemblablement oublié le signe * entre a et x, la TI92 considérant alors ax comme une seule variable. Elle demande ensuite quelle est la plus petite racine et fait détailler le raisonnement. Un élève demande ce qui se passe quand a est supérieur à 1. Cette question est réglée par le calcul du déterminant et on précise que l'on se limite bien aux valeurs de a comprises entre 0 et 1. Dans la définition des fonctions p et g, un petit problème apparaît car, suivant les EPROM, c'est la plus petite ou la plus grande racine qui est le premier terme de la liste. Ce problème est rapidement réglé et l'enseignante passe au tableur en soulignant qu'il va permettre d'automatiser le calcul des valeurs de p et g pour différentes valeurs de a. Pendant la phase suivante, les élèves reproduisent sur leur machine ce que l'enseignante fait avec la rétroprojetable, en le commentant. Soulignons que Vincent avait déjà ouvert le tableur que visiblement il a déjà utilisé seul. Il commet d'abord une erreur en définissant c2 comme p(c2) mais rectifie rapidement, agrandit la taille des cellules quand il voit l'affichage, puis définit c3=g(c1).





L'enseignante dit aux élèves de nommer leur fichier (Vincent le fait), puis leur indique comment mettre les colonnes à la même largeur que sur la rétroprojetable. Elle passe ensuite à la définition des colonnes, en commençant par les titres et en expliquant la fonction des guillemets. Voyant cela, Vincent rajoute des titres à ses colonnes. L'enseignante explique ensuite comment remplir la colonne c1, comment aller sur c2 et la définir. Un élève s'étonne de voir apparaître un cadenas, l'enseignante explique. Assez vite, après un petit moment de flottement, les tableaux sont remplis et l'enseignante demande de passer en mode approché puisque ce sont les valeurs approchées qui les intéressent ici.



DATA	a	petite	grande
	c1	c2	c3
1	1	1.	1.
2	1/2	3.41421356	.585786438
3	1/10	19.486833	.513167019
4	1/20	39.4935887	.50641131
5	1/100	199.498744	.501256289
6	1/200	399.499373	.500626567
7	1/1000	1999.49987	.500125063

Pour 10^{-14}, la TI92 renvoie la valeur 0 pour la plus petite racine. Ceci suscite des questions. Un élève explique que c'est « parce que la machine n'est pas capable d'aller jusque là » mais il n'est pas capable de préciser davantage, l'enseignante fait remarquer que le numérateur et le dénominateur de la racine sont alors très petits puis exploite le doute suscité par ce zéro intempestif pour proposer de démontrer les conjectures faites.

La justification de la limite infinie visiblement ne pose pas de problème et l'enseignante fait détailler le raisonnement. Pour la petite racine, face au produit d'un nombre très petit par un nombre très grand, les réponses sont variées : une élève propose R tout entier, un autre dit que 1/2, c'est comme la moitié entre 0 et l'infini. L'enseignante va alors revenir aux fonctions de référence et étudier divers cas conduisant à des limites nulles, finies ou infinies, avant de conclure que l'on ne peut a priori rien dire et que l'on reviendra sur ces questions quand on retravaillera les limites plus tard. La preuve est ensuite gérée collectivement, sans difficulté particulière, une fois retrouvée l'expression du produit des racines.

L'enseignante leur demande ensuite de faire un travail analogue, de façon autonome lorsque a est négatif et tend vers 0, en regardant ce qui va changer. Vincent reproduit en l'adaptant le calcul de la limite de g(a) puis utilise le tableur pour vérifier. Ensuite il adapte aussi la preuve pour la seconde racine. Au bout de cinq minutes environ, l'enseignante qui circulait dans la classe, fait formuler les conjectures, réadapter la preuve puis termine la séance en revenant sur ce qu'ils avaient dit au départ : que la courbe se rapprochait d'une droite et en faisant le lien avec l'expression de la fonction pour a=0 et la limite 1/2.

Analyse :

Approche graphique

Cette séance commence par la distribution de la feuille d'activité aux élèves. Afin d'effectuer les lectures graphiques demandées dans l'exercice, M. définit les fonctions dans Y= et les fait tracer en *ZoomStd.* Ensuite, et compte tenu de la question posée (*Comment lit-on graphiquement les racines de l'équation* $0.5\,x^2 - 2x + 1 = 0$ *?*), elle distingue implicitement - par rapport à leur degré de précision- plusieurs niveaux dans la lecture graphique : un premier niveau qui est la lecture à l'œil nu, un deuxième niveau qui est l'utilisation de *F3-Trace,* un troisième niveau qui est l'utilisation de *ZoomBox* ou de *ZoomIn* (combinés éventuellement avec la commande *F3-Trace*) et enfin un quatrième niveau qui se traduit par l'utilisation de l'un des ostensifs *F5-Zero* ou *F5-Intersection.* Parallèlement à cela, et hormis le fait de présenter ou de rappeler la syntaxe de ces commandes, M. met en jeu certaines techniques graphiques comme la sélection/dé-sélection des courbes à tracer (dans Y=), le saut d'une courbe à l'autre (à l'aide du curseur), le choix de l'épaisseur du trait (dans Y= *F6-Style*). Par ailleurs, M. insiste sur le caractère approché bien que relativement précis des calculs dans l'application GRAPH, et cela malgré la parenté des ostensifs GRAPH-*Zero* et HOME-*Zeros* (on retrouve ici le troisième niveau de connaissances-machine).
Ainsi, cette partie a été l'occasion pour M. de développer et d'affiner les techniques de lecture graphique. Soulignons que l'utilisation de l'ostensif *Intersection* pour la recherche de zéros, a permis de mettre en évidence le fait que l'axe des abscisses pouvait être considéré comme la courbe de la fonction $x \mapsto 0$: en effet, pour utiliser l'ostensif *Intersection,* il est nécessaire de choisir deux courbes de fonctions. Donc, pour chercher un zéro de la fonction en question, il faut définir et sélectionner dans Y= la fonction $x \mapsto 0$ dont la représentation graphique va se confondre avec l'axe x'Ox.

Approche numérique

Cette partie commence par la phase usuelle de *nettoyage*. M. rappelle de plus qu'il faut être en mode Exact (deuxième niveau de connaissances-machine). Elle montre ensuite comment définir une liste tout en parlant encore une fois de la différence entre *ab* et *a*b.* Après cela, M. informe les élèves de l'utilité du Tableur dans cet exercice et donne quelques indications sur les répertoire et fichier dans lesquels s'effectuera le travail. M. intervient plus tard pour la modification de la taille des cellules (deuxième niveau de connaissances-machine) et pour parler de la signification de **c1, Title="a"** : *"cet entre-guillemets signifie que c'est considéré par la machine comme du texte".* (On reconnaît là le troisième niveau de connaissances-machine). Bien plus tard, répondant à un élève, M. intervient collectivement en tenant le discours suivant, correspondant au niveau 3 : " . . . *alors, quand je prends une valeur très petite 10^{-14} en valeur approchée, la machine me met que la plus petite racine a comme valeur approchée 0 . . . en valeur approchée, elle travaille à 10^{-14} près; à partir de 10^{-14} pour elle c'est 0 . . . On montrera dans le détail un jour si on a le temps comment, en interne, la machine fait ces calculs. Mais il faut savoir que quand vous avez des différences ici, un nombre 1 et un nombre très très proche de 1, divisé par un nombre très très petit, eh bien ça ne devient plus très fiable au niveau de toutes les calculatrices. Celle-ci le devient à partir de 10^{-14}, d'autres le font beaucoup plus tôt quand on est en mode approché."*

Dans cette deuxième partie, et contrairement à ce qui s'était passé l'année précédente (cf. *Dimension Institutionnelle - Année 1 - Observation 4*), M. a soigneusement géré l'utilisation du module Tableur, bien que quelques difficultés subsistent et entraînent un petit retard dans l'avancement de la séance.

En somme, cette partie a nécessité la mise en œuvre des trois niveaux de connaissances-machine. Le premier niveau intervient quand il s'agit d'ouvrir le module Tableur ou de définir les colonnes. Le deuxième niveau est sollicité à travers le changement de la taille des cellules (dans *F1-Format*), le changement du nom de fichier de travail (dans *VAR-LINK - F1 - Rename*), le changement du mode (ce qui a été l'occasion de voir l'importance des deux modes : exact pour avoir les zéros dans HOME et approché pour pouvoir comparer les valeurs données par le tableur). Le troisième niveau apparaît via le discours de M. sur le fonctionnement des colonnes et cellules du module Tableur ou sur la représentation des nombres en interne (voir ci-dessus).

En conclusion, la première phase de cette séance qui se déroule dans l'application GRAPH a été à la charge des élèves qui semblaient disposer à cette époque de l'année de techniques pour l'exploration graphique. Cependant, l'enseignante est intervenue pour piloter l'utilisation de l'ostensif *Intersection.*

Pendant la deuxième phase, l'enseignante est souvent et fortement intervenue car une première utilisation du module Tableur (ce qui est le cas ici) demande des explications sur le fonctionnement des colonnes, des cellules ou même des fichiers et répertoires où se déroule ce travail.

Cependant, malgré les difficultés liées à cette instrumentation, les élèves sont arrivés à conjecturer comme prévu dans l'analyse a priori (cf. ibid) l'évolution des racines de l'équation.

Enfin, la dernière phase qui consiste à prouver les conjectures a été entièrement à la charge de l'enseignante, les connaissances des élèves n'étant pas encore suffisantes pour permettre d'effectuer ce travail, de façon autonome.

Observation 4 : Introduction de la notion de dérivée (Janvier 97)

Contexte et objectifs :

Cette séance s'inscrit dans une ingénierie visant à introduire la notion de dérivée (dans le cadre de [Artigue & al., 1998]) et prenant en compte les dimensions "outil" et "objet" (au sens de Douady) de ce concept ainsi que les différents registres sémiotiques dans lesquels il s'exprime et se travaille. Cette ingénierie tient compte également des différents points de vue qui peuvent intervenir, à savoir les points de vue géométrique, cinématique, numérique ou algébrique. Par ailleurs, les choix effectués l'ont été aussi en fonction du niveau limité de compétences algébriques des élèves, et en fonction des possibilités de calcul formel et manipulations graphiques offertes par la TI92.

Plus précisément, cette séance fait partie d'une paire de séances destinée à introduire la fonction dérivée en commençant par calculer le nombre dérivé de fonctions de référence en certains points et en étudiant la dérivabilité locale graphiquement.

Ingénierie :

L'ingénierie a été motivée au départ par certains principes fondés sur les résultats des observations de la première année d'expérimentation. Ces principes sont :

- *La prise en compte des dimensions "outil" et "objet" du concept de dérivée avec un travail plus approfondi sur le caractère local de l'objet "dérivée"*

En effet, à ce niveau d'enseignement, la notion de dérivée intervient surtout comme "outil" (notamment dans les problèmes d'étude de variation et d'optimisation) via la notion de fonction dérivée. Ce fonctionnement entraîne une prise en compte insuffisante du caractère local de l'objet "dérivée" au profit d'un travail plutôt algébrique lié à l'objet "fonction dérivée". Cette ingénierie a pour ambition de mettre en place, en faisant intervenir la machine, des situations où ce caractère local serait viable.

- *La prise en compte des différents registres sémiotiques dans lesquels se présente et se travaille la notion de dérivée*

Le fonctionnement cité ci-dessus, en privilégiant la dimension "outil" de la notion de dérivée, favorise le registre algébrique aux dépens des registres numérique et graphique. Cette ingénierie a pour objectif la prise en compte de la diversité des registres liés à cette notion, en gérant l'utilisation de la machine qui risque, le cas échéant, d'accentuer la tendance au calcul formel, et ce par la disponibilité d'ostensifs comme la commande *d(.)* pour le calcul de la dérivée dans l'application HOME.

- *La prise en compte des différents points de vue liés à la notion de dérivée, à savoir les points de vue géométrique, cinématique, numérique et algébrique.*

Cependant certains points de vue ont été plus privilégiés que d'autres, surtout en ce qui concerne l'introduction des dérivées, mais nous en parlerons un peu plus tard.

- *La prise en compte d'une reconstruction nécessaire du concept de tangente.*

Au début de l'enseignement de l'analyse, la tangente est un concept qui a déjà une certaine signification chez les élèves : une droite perpendiculaire au rayon du cercle et qui touche ce dernier en un point sans le traverser. Des recherches ([Castela 95] par exemple) ont montré que cette acception d'ordre global (comme celle de la tangente comme «la droite qui touche tout en restant du même côté») n'est pas suffisante pour comprendre le lien entre la tangente et la dérivée, lequel en particulier, demande une prise en compte de la "communauté de direction" comme propriété caractéristique de la tangente.

- *La prise en compte des compétences algébriques limitées des élèves.*

Le travail en analyse à ce niveau demande certaines compétences algébriques, mais ces dernières s'avèrent très limitées chez les élèves au début de l'enseignement des dérivées, en dépit de l'utilisation des machines (cf. première année expérimentale). Par conséquent, il semble nécessaire de limiter la complexité algébrique des tâches qui interviennent dans les séances d'introduction des dérivées.

- *La prise en compte des possibilités offertes par la machine, que ce soit en calcul formel via l'application HOME, ou sur le plan graphique à travers l'application GRAPH.*

Dans l'application graphique et plus particulièrement dans le menu *F5*, des ostensifs permettent d'obtenir des façon approchée des maximums et minimums, des dérivées ou des équations de tangentes. Il serait nécessaire de sensibiliser les élèves au fait que, même si elle est en mode exact, la machine ne fournit de calculs réellement exacts que dans l'application HOME. Dans cette application, il serait également important de faire prendre conscience aux élèves du fait qu'ils doivent contrôler le champ de validité des résultats obtenus, dans le cas de fonctions où interviennent des quotients, des racines carrées ou des valeurs absolues.

C'est sur ces bases que l'ingénierie s'est construite et que les sept phases qui la forment ont été mises en place. Ces sept phases sont :

1. Introduction de la notion de nombre dérivé
2. Fonction dérivée et dérivées des fonctions de référence
3. Dérivation formelle à la calculatrice et algébrisation du calcul des dérivées
4. Dérivées et sens de variation
5. La dérivée au service de l'étude des fonctions et de la résolution de problèmes d'optimisation
6. Approche cinématique de la notion de dérivée : la notion de vitesse instantanée
7. Réinvestissement dans une situation de recherche : un problème de raccords.

Nous avons choisi ici d'analyser de façon détaillée les deux premières phases et la dernière qui correspondent respectivement au début de l'apprentissage et au réinvestissement dans une situation plus complexe. Nous renvoyons le lecteur au rapport [Artigue & al, 1998] pour des informations sur les situations relatives aux phases intermédiaires, sachant que nous intégrerons certaines données s'y rapportant dans la partie de cette thèse consacrée au suivi des élèves.

Concernant l'introduction de la notion de dérivée, certains choix basés autant sur les observations de la première année que sur la littérature didactique liée à ce domaine, ont été faits. Ainsi :

- Une entrée cinématique à l'aide des vitesses a été évitée. En effet, à ce niveau d'enseignement, la notion de vitesse est appréhendée en physique comme une vitesse moyenne entre deux instants très rapprochés, ce qui ne correspond pas à la notion de vitesse instantanée. Rappelons qu'une telle entrée a montré ses limites l'année précédente (cf. *Dimension Institutionnelle - Année 1 - Observation 1*) confirmant par là même les résultats de certaines recherches didactiques (par exemple [Schneider 1989]). Ceci dit, le point de vue cinématique sera pris en compte mais seulement après que les notions de dérivée et de tangente soient mises en place, et il sera utile de revenir sur le caractère local de la dérivée.

- Une entrée "boîte noire" où par le biais du calcul formel qu'elle permet, la machine serait utilisée pour introduire la dérivée, est également écartée. Ce choix se justifie par la volonté, préalablement décrite, d'éviter la tendance habituelle à privilégier le registre algébrique symbolique. Par contre, ce type d'utilisation interviendra ultérieurement et permettra d'introduire les règles de dérivation. Les productions de la machine y seront considérées comme des données que l'élève aura à interpréter et modéliser afin de conjecturer puis tester les règles conduisant à la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables. Ceci permettra également de travailler sur le champ de validité de ces règles.
- En revanche, c'est le point de vue géométrique qui a été choisi pour introduire les dérivées, avec une intégration assez rapide de deux points de vue complémentaires sur la dérivée :
  a) le nombre dérivé comme limite des coefficients directeurs des sécantes autour d'un point
  b) le nombre dérivé comme coefficient directeur d'une droite qui, par zooms successifs, tend à se confondre avec la représentation graphique, ce qui revient à voir le nombre dérivé comme coefficient de linéarité dans l'approximation affine de la fonction.

Dans cette entrée géométrique, l'accent est mis sur la problématisation de l'unicité de la tangente et sur la mise en évidence du fait que c'est la seule droite fournissant une approximation au premier ordre. Par ailleurs, la gestion de l'interaction numérique/géométrique va être facilitée par l'utilisation du logiciel Cabri-géomètre et ce en partant du point de vue a) ci-dessus. En effet, dans la phase d'exploration et de conjecture, ce logiciel va permettre d'afficher en temps réel le coefficient directeur des sécantes qui entrent en jeu.

- L'expérience de la première année a montré que la séance d'introduction, quels que soient les choix effectués, est difficile et que le fait de pouvoir déléguer certains calculs à la calculatrice ne change pas fondamentalement sa complexité. Par conséquent, certains points à traiter ont été mis en lumière tels que :

  * veiller très soigneusement à garder une complexité raisonnable aux calculs à effectuer

* être très attentifs au nombre de variables et paramètres figurant dans les expressions ainsi qu'au jeu valeurs particulières - valeurs littérales

* permettre aux calculs dans leur organisation de prendre sens dans un travail à la main avant d'être délégués à la machine pour des situations un peu plus complexes, partiellement ou totalement

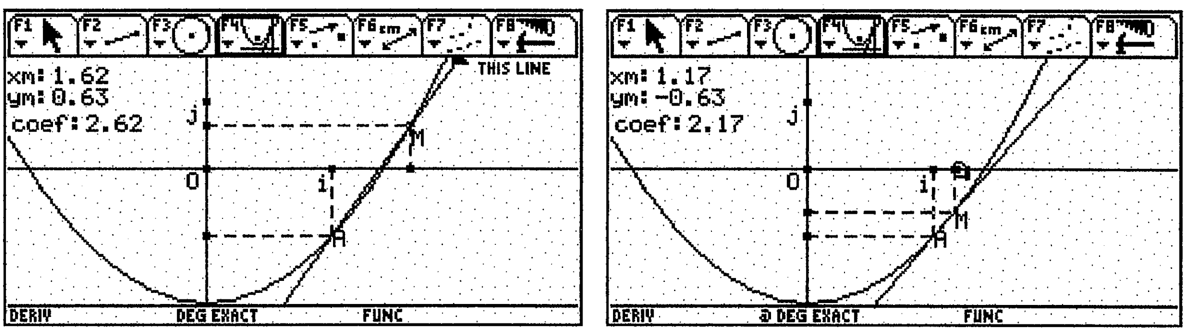
- Enfin, dans cette séance d'introduction, le degré d'autonomie laissé aux élèves et l'équilibre travail élève / travail professeur est difficile à gérer ; mais un maximum d'autonomie est à procurer à l'élève. Ainsi, son activité doit être soigneusement problématisée, afin qu'elle ne se limite pas à des tâches d'exécution et que le sens global n'en soit pas perdu. Pour cela, l'intervention de l'enseignante est nécessaire sous diverses formes (dévolutions successives, aides, maintien de la cohérence globale, bilans et institutionnalisations locales) sans qu'elle soit pour autant le seul acteur de la situation.

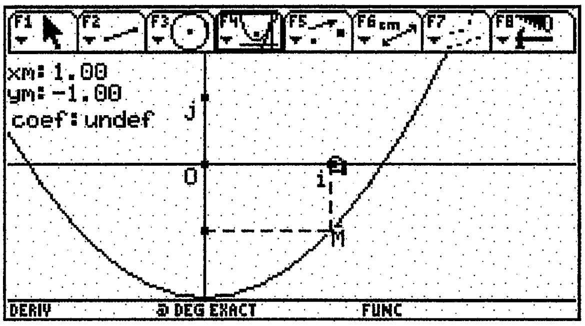
Scénario :

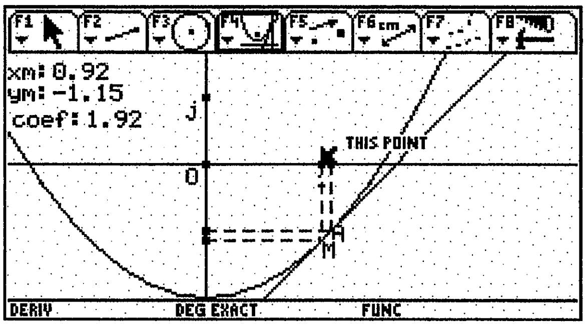
Nous présentons ci-dessous le scénario de la séance concernant l'introduction de la notion de nombre dérivé tel qu'il a été élaboré dans le cadre du projet [Artigue & al 1998]. Cette séance est subdivisée en quatre phases où l'autonomie de l'élève irait crescendo pendant les deux heures prévues pour le déroulement.

Phase 1 :

On s'intéresse dans cette phase à la fonction $x \mapsto f(x) = x^2 - 2$ au voisinage du point A d'abscisse 1. La gestion est collective. En utilisant le fichier Cabri construit , l'enseignant déplace le point M sur la parabole et donc la sécante (AM). Les coordonnées de M et le coefficient directeur de la sécante s'affichent dans le coin haut - gauche de l'écran.





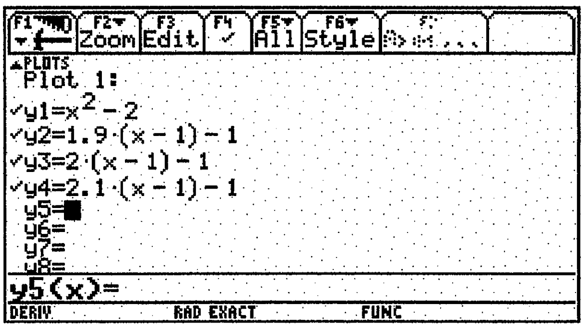


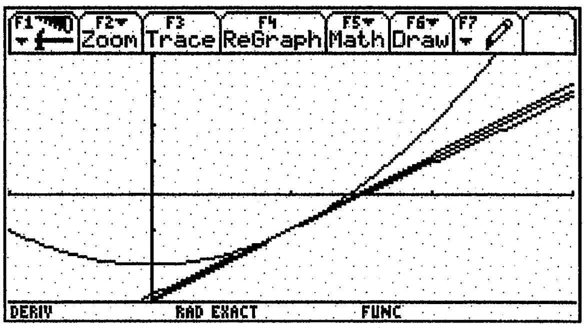
La question posée aux élèves est la suivante :

« Que se passe-t-il quand M se rapproche de A ? »

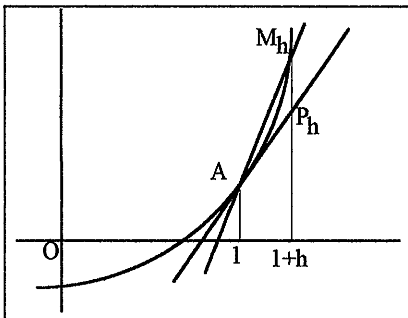
On notera que lorsque M et A sont confondus, le logiciel renvoie la valeur *" undef "* pour le coefficient directeur. On peut s'attendre à ce que les élèves, dans cette situation, identifient le mouvement géométrique de la sécante et conjecturent au vu de l'évolution des coefficients directeurs que la sécante tend vers la droite passant par A de coefficient directeur 2, vu le caractère attractif de cette valeur entière. On peut s'attendre éventuellement aussi à voir apparaître dès cette phase le mot « tangente » et, si c'est le cas, on demandera à quelles caractéristiques la tangente est identifiée.

L'enseignant va alors utiliser l'application graphique pour problématiser ce " 2 " trop facilement obtenu. Dans l'application Y = , ont été rentrées préalablement la fonction ainsi que les droites passant par A de coefficients directeurs respectifs : 1,9 - 2 - 2,1. Pour faciliter l'interprétation, les équations de ces sécantes ne sont pas réduites mais laissées sous la forme $y_i = y_A + m\,(x - x_A)$. Au tracé, toutes les trois collent à la parabole. Cette constatation permettra à l'enseignant de poser la question de la légitimité du choix de la valeur 2 parmi les valeurs voisines.





Nous faisons l'hypothèse que, dans cette situation, les élèves, habitués à la manipulation graphique de la machine, vont proposer de faire des zooms, en pensant qu'ils permettront de faire apparaître la droite de coefficient directeur 2 comme celle collant le mieux à la courbe. Le phénomène graphique résistant bien à des zooms effectués autour du point A, le problème devrait rester entier, les zooms successifs permettant cependant une première articulation graphique des points de vue a) et b) cités plus haut. Nous faisons l'hypothèse que l'échec de l'exploration va aboutir à la problématisation souhaitée du choix de la valeur 2 et faire ressentir la nécessité de dépasser des critères purement perceptifs pour analyser et différencier les proximités droite / parabole. En revanche, il nous semble illusoire de penser que les élèves de ce niveau peuvent découvrir, en l'espace d'une séance, par eux-mêmes, une technique permettant de dépasser ces critères perceptifs. C'est pourquoi, dans le scénario, une fois la question bien posée, nous laissons cette partie à la charge de l'enseignant : c'est lui qui proposera d'étudier l'écart $\overline{P_hM_h}$ pour M_h point de la courbe et P_h point de la tangente supposés de même abscisse : 1+h, puis de comparer avec les valeurs obtenues en prenant P_h cette fois sur l'une des deux autres droites.



Il nous semble raisonnable ici de mettre en place collectivement le premier calcul à effectuer, vu la complexité formelle des expressions à manipuler : l'enseignant introduit donc l'accroissement h, les notations M_h et P_h et fait évaluer

$\overline{P_hM_h} = f(1+h) - [\, f(1) + 2h]$

Le calcul est piloté par les élèves, après précision collective du sens de f(1+h).

Ce calcul n'est pas compliqué en lui-même et comporte une seule variable h. On arrive ainsi à : $h^2 + 2h - 1 + 1 - 2h = h^2$

On peut ensuite partager la classe en deux groupes, chacun ayant en charge d'adapter le calcul précédent à l'une des deux autres droites, ce qui permet une appropriation individuelle de la démarche collective. On arrive ainsi aux expressions :

Coefficient directeur	$\overline{P_hM_h}$
1,9	$h^2 - \dfrac{h}{10}$
2	h^2
2,1	$h^2 + \dfrac{h}{10}$

qui tendent toutes trois vers 0 lorsque h tend vers 0, mais qui sont différentiables, compte tenu du travail sur la négligeabilité mené dans l'initiation aux limites, par la vitesse à laquelle elles tendent vers 0. Nous faisons l'hypothèse que cette différenciation est ici tout à fait accessible et va conduire à la conclusion suivante :

« la différence tend plus vite vers 0 pour la droite de coefficient directeur 2, ou reformulé autrement :

$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{P_h M_h}}{h} = 0$ pour m = 2 mais pas pour 1,9 et 2,1,

$\overline{P_h M_h}$ est négligeable devant h pour m = 2 »

La valeur 2 est à ce moment singularisée mais il reste à montrer qu'elle est la seule à posséder cette propriété là. Le calcul fait nécessairement cette fois intervenir un paramètre mais il s'agit de la reproduction d'un calcul déjà effectué à trois reprises avec des valeurs particulières. Il peut se faire collectivement, piloté par les élèves et toujours à la main.

$\overline{P_h M_h} = f(1 + h) - [f(1) + m h]$

$\overline{P_h M_h} = h^2 + h(2 - m)$

$\frac{\overline{P_h M_h}}{h} = h + 2 - m$

donc $\overline{P_h M_h}$ est négligeable devant h pour m = 2 et seulement pour m = 2.

La valeur 2 est maintenant complètement caractérisée. L'enseignant peut alors récapituler l'ensemble de la démarche et institutionnaliser le résultat local obtenu, introduisant à cette occasion le terme de tangente, s'il n'est pas apparu spontanément.

Cette première phase se termine par le lien effectué avec la tangente “ ancienne ”, en cherchant l'intersection de la droite avec la parabole. Là encore, l'exemple numérique est choisi pour que le calcul ne présente pas de difficulté puisque l'on aboutit à une identité remarquable :

$x^2 - 2 = 2(x - 1) - 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 1)^2 = 0$

La tangente apparaît donc comme la droite passant par A qui a une intersection double en ce point avec la courbe. Nous faisons l'hypothèse que, pour les élèves de la classe expérimentale qui ont justement eu à travailler dans un devoir maison donné au premier trimestre sur les intersections de paraboles avec des droites, le problème de l'articulation avec ce qu'ils avaient à l'époque dénommé tangente à la parabole par analogie avec la tangente au cercle ne sera pas vécu comme un problème artificiel.

Phase 2 :

Dans cette phase, il s'agit de reprendre intégralement la même démarche avec cette fois la fonction $f : x \mapsto f(x) = \dfrac{x^3 - 6x}{4}$ au point d'abscisse 2.

Pour cette adaptation à une nouvelle fonction, on va demander aux élèves de piloter collectivement la démarche, les différentes étapes du travail étant au fur et à mesure notées au tableau. L'exemple choisi a aussi pour fonction de faire rencontrer un cas où la tangente à une courbe recoupe cette courbe en un point autre que le point de tangence.

La question posée est la suivante : on cherche à savoir si ce qu'on a trouvé avec la parabole est encore ici valable et si les mêmes méthodes marchent.

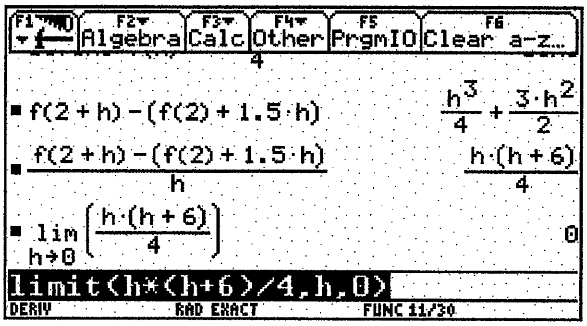
- Le coefficient directeur de la tangente n'est cette fois plus entier (il vaut 1,5) et la tangente recoupe la courbe.
- Les calculs sont faits maintenant à la machine, par l'enseignant, piloté par les élèves. Soulignons que quand M = A la machine renvoie cette fois comme coefficient directeur 1.0, ce qui peut être déroutant.

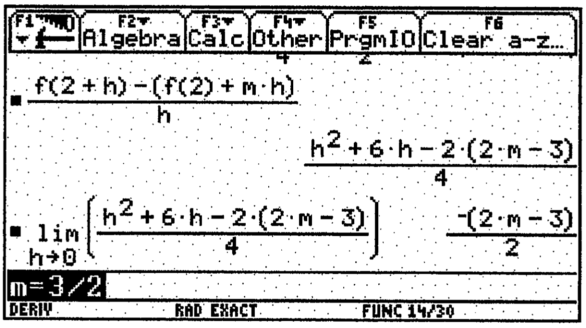
Il nous semble important d'écrire le début des calculs sous forme littérale au tableau :

$\overline{P_hM_h} = f(2 + h) - [\, f(2) + 1.5\, h]$

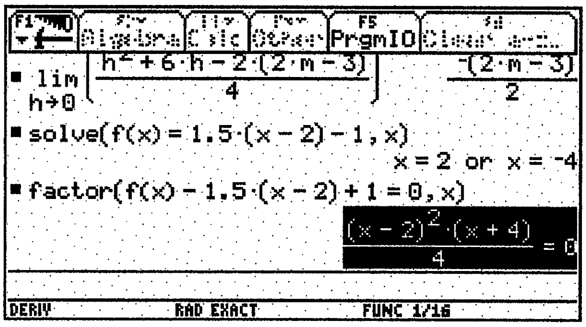
avant de les entrer en machine et de noter également au tableau les résultats obtenus.

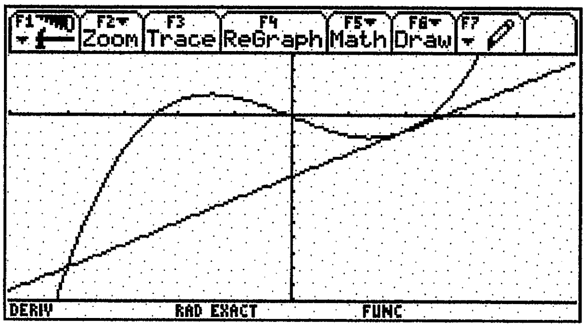
Dans ce cas, $\dfrac{\overline{P_hM_h}}{h} = \dfrac{h^2}{4} + \dfrac{3h}{2}$ et on retrouve bien la négligeabilité ; dans le cas d'un coefficient directeur m, s'y rajoute le terme : $m - \dfrac{3}{2}$, ce qui prouve bien l'unicité.





- Le lien avec le point de vue algébrique se fait également à la machine :- résolution machine de l'équation :





Si la recherche des points d'intersection par la commande *Solve* ne permet pas de distinguer les racines, l'utilisation de la commande *Factor*, elle, permet bien de différencier les deux racines trouvées.

Il est bien sûr prévu de pointer dans la synthèse sur ce nouveau cas le fait que, contrairement à ce que l'on avait constaté pour la parabole, les tangentes à cette cubique peuvent la recouper.

Phase 3 :

De façon autonome, par binômes, les élèves ont dans cette phase à traiter eux-mêmes pour la même fonction le cas x = 0. Nous faisons l'hypothèse que l'ensemble de la démarche doit leur être alors accessible. Ce nouveau cas les confrontera de plus à une situation d'inflexion, permettant de mettre en débat la conviction sans doute forte pour eux que la tangente ne saurait en aucun cas recouper la courbe au point de contact.

Phase 4 :

La phase 4 qui conclut cette séance est celle où s'effectue la définition de la dérivabilité de f au point d'abscisse a , en mettant bien en évidence l'équivalence, pour un m quelconque, des deux formulations :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-(f(a)+m\,h)}{h} = 0 \text{ et } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = m$$

qui permet, dans la pratique, en recherchant directement la limite du quotient, de simplifier le travail de conjecture et de preuve qui a été effectué sur les trois premiers exemples traités.

Déroulement

Ce scénario d'introduction a été expérimenté à Chartres, le 31 janvier, sur deux heures : une séance collective d'une heure, suivie de deux heures de travail en demi-groupes.

Comme prévu, confrontés à l'interprétation du phénomène visuel montré à la calculatrice, les élèves conjecturent que lorsque le point M se rapproche de A, le coefficient directeur dont la valeur est affichée se rapproche de 2 et en concluent sans le moindre doute que la limite est 2. Aucun ne parle cependant de tangente. Il semble bien ici que l'affichage dynamique de la valeur du coefficient directeur en haut de l'écran attire suffisamment l'attention des élèves pour constituer une situation où les cadres numériques et géométriques jouent de façon équilibrée et interactive, dans le processus de limite.

L'enseignante fait formuler l'équation de cette droite et la laisse volontairement sous la forme : y = 2(x-1)+f(1) pour favoriser l'interprétation des équations introduites dans l'éditeur de fonctions Y=. Tout cette phase, gérée collectivement comme prévu, ne pose pas de difficulté. Les élèves semblent surpris ensuite par la proximité des trois droites tracées et surtout le fait que les zooms effectués ne permettent pas de singulariser clairement la droite de coefficient directeur 2. Et, comme nous l'avions anticipé, ils n'ont pas a priori d'idée sur la manière de comparer la proximité respective des trois droites tracées et de la courbe. C'est l'enseignante qui propose donc d'étudier la valeur de $\overline{P_hM_h}$ et introduit les notations, comme prévu. L'expression de la valeur algébrique de $\overline{P_hM_h}$ dans le cas de la droite de coefficient directeur 2 est produite collectivement, sous la dictée d'un élève, après une très courte phase de travail individuel. Le calcul et les différentes substitutions sont soigneusement explicités et détaillés. L'enseignante demande ce que devient cette expression lorsque h tend vers 0. Les réponses produites sont diverses : « elle devient nulle », « elle est nulle », « elle tend vers 0 ». L'enseignante les reprend et fait reformuler et écrire dans le langage usuel des limites, en soulignant que la fonction de h considérée ici est une fonction de référence. La classe se partage ensuite en deux groupes pour traiter, à la main toujours, les deux autres cas. Ce calcul soigneusement préparé (l'enseignante a fait préciser où allait se situer le changement dans l'expression formelle), est rapidement exécuté par la grande majorité des élèves. Ils semblent déçus de constater que toutes les expressions ont la même limite 0, ce qui était pourtant prévisible, pensant sans doute que la suggestion de l'enseignante devait mener directement au résultat. Les résultats sont écrits au tableau dans un tableau à double entrée, l'enseignante faisant soigneusement justifier les calculs de limites, ce qui visiblement ne pose pas de problème à l'élève interrogé :

« Si h tend vers 0, h^2 a pour limite 0 et h aussi, donc h/10 aussi donc la limite de $h^2+h/10$ est 0 »

Les trois limites nulles étant établies, l'enseignante demande ce que l'on pourrait faire, quelle question on pourrait se poser. Elle obtient cette fois immédiatement une réponse : « On pourrait chercher laquelle va le plus vite ». L'enseignante reformule aussitôt cette suggestion en termes de négligeabilité, faisant appel à la mémoire de la classe. Peut-être aurait-on pu laisser ici davantage l'initiative aux élèves, un bon nombre se souvenant visiblement de la notion et plusieurs se proposant pour rappeler sa définition. Une colonne est rajoutée au tableau initial pour noter les limites des quotients $\overline{P_hM_h}/h$ et les limites sont trouvées et justifiées sans aucune difficulté. L'enseignante demande aux élèves de conclure, fait noter cette conclusion sur le cahier à la suite du tableau, avant de relancer le problème, comme prévu, en posant la question : « La droite de coefficient directeur 2 est-elle la seule à posséder cette propriété ? »

Un élève propose aussitôt de refaire le calcul pour x, précisant ensuite sur demande qu'il s'agit du coefficient directeur. L'enseignante suggère d'utiliser la lettre m pour éviter les confusions (les élèves visiblement préféreraient la lettre a) et les laisse faire le calcul. Visiblement, pour la plupart des élèves, la structure de l'expression est maintenant bien comprise et les adaptations sont faites rapidement. Un élève demande cependant si f(1+h) est bien égal à h^2+2h-1 et l'enseignante redétaille collectivement la substitution. On arrive ainsi pour le quotient à l'expression h+2-m et les élèves concluent rapidement que 2 est bien la seule valeur possible. L'enseignante fait récapituler le raisonnement et noter le résultat obtenu, avant de conclure : « Donc cette droite joue un rôle bien particulier par rapport à la parabole au point d'abscisse 1. »

Un élève demande : « C'est ça la dérivée ? ». L'enseignante lui demande de préciser et l'on entend, de ci de là fuser le mot « tangente ». Elle en profite aussitôt pour leur demander à quelle occasion ils ont déjà entendu parler de tangente. Les élèves parlent de la tangente au cercle qui est perpendiculaire au rayon, de la tangente en trigonométrie. Faisant appel à la mémoire de la classe, elle leur demande s'ils ne se souviennent pas d'un travail effectué cette année. Des élèves se souviennent alors d'un devoir à la maison sur des positions relatives de fonctions « où les courbes se touchaient en un point ». L'enseignante fait le lien avec la situation présente en revenant à la visualisation géométrique et fait rappeler la stratégie suivie dans le problème : écriture du système associé à la recherche de l'intersection, recherche des solutions par substitution et obtention d'une racine double dans le cas de la tangente correspondant à deux points d'intersection confondus. Les élèves prennent ensuite en charge le calcul dans le cas de la parabole P et de D2. Cela va très vite.

L'enseignante récapitule alors l'ensemble du travail effectué, annonce que ce coefficient directeur de la tangente va jouer un rôle très particulier et que, dans la séance qui suit; en demi-groupes, ils vont refaire la même chose avec d'autres fonctions.

Pour la séance qui suit, en demi-groupes, nous suivrons plus précisément deux élèves : Arnaud et Marianne, dont les calculatrices étaient reliées à des ordinateurs portables et l'écran à une tablette rétroprojetable, suivant le dispositif classique dans l'expérimentation.

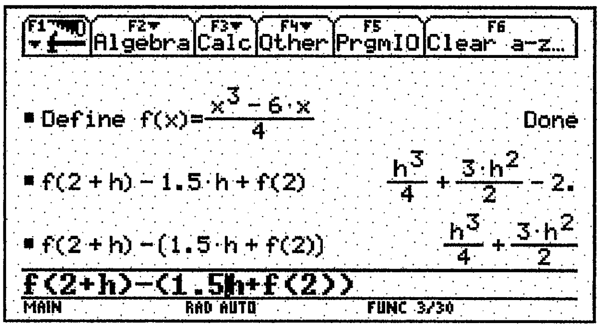
L'enseignante lance la séance en rappelant le point où ils sont arrivés puis en annonçant qu'on va faire un travail analogue avec la fonction f définie par : $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^3 - 6x}{4}$ au voisinage du point A d'abscisse 2. Elle fait évaluer f(2) et écrit au tableau les coordonnées de A sous la forme A (2 , f(2)) suivies de f(2) = -1.

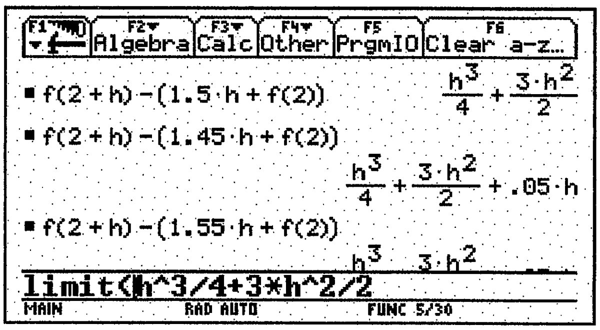
Elle passe ensuite, comme prévu, dans l'application géométrie et déplace M sur la courbe en le rapprochant de A. Le coefficient directeur se rapproche de la valeur 1,5 mais cette fois quand les deux points semblent confondus, la valeur bizarrement devient 1. Ceci perturbe certains élèves qui pensent que c'est la droite de coefficient directeur 1 qui sera donc la plus proche de la courbe au voisinage de A. L'enseignante fait afficher une droite de coefficient directeur 1 en bougeant le point M et la conjecture est invalidée. Elle passe ensuite à l'éditeur d'équations Y= dans lequel elle a préalablement rentré outre la fonction f, les équations des droites de coefficient directeur 1.5, 1.45 et 1.55. Cette fois les élèves ne sont pas étonnés du résultat : « c'est comme la première fois », et plusieurs suggèrent de faire les limites comme pour la fonction précédente. L'enseignante fait produire collectivement les coordonnées de M_h (2+h,f(2+h)) et P_h(2+h, 1.5h+f(2)), puis leur demande de prendre chacun leur machine et de définir la fonction f dans le module HOME.

Elle conseille aux élèves de libérer les variables avant de commencer le travail. Arnaud va dans VAR-LINK pour vérifier. Marianne aide son voisin Nicolas qui a libéré les variables par F1-6 mais après avoir défini f et qui ne comprend pas ce qui lui arrive.

L'enseignante se fait ensuite dicter les calculs à faire à la machine par les élèves, chacun les faisant parallèlement sur sa proche machine.

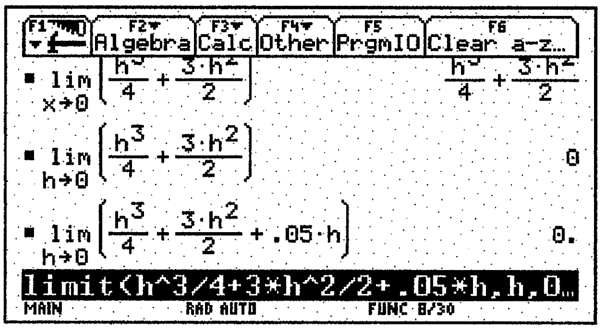
Arnaud et Marianne ne rencontrent pas de difficultés. Nous reproduisons ci-après les premiers écrans d'Arnaud. Ceux de Marianne sont quasiment identiques, mais sans l'erreur de parenthésage présente dans la première entrée d'Arnaud et immédiatement rectifiée.

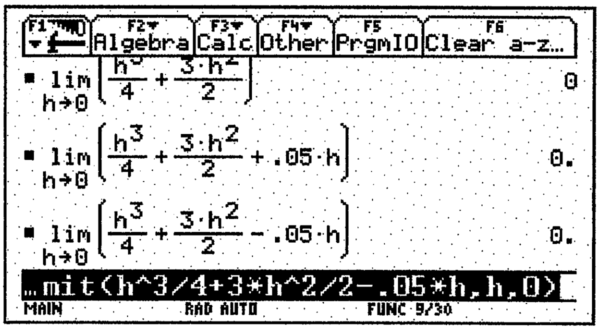




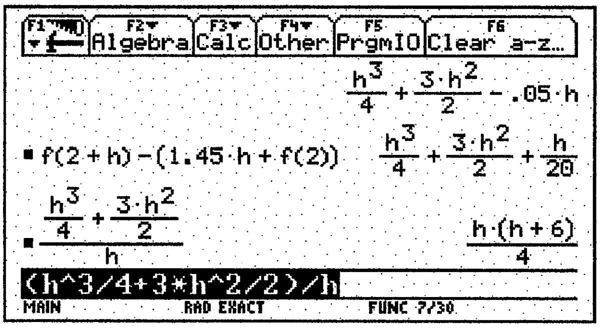
L'enseignante note dans un tableau comme précédemment les différentes expressions trouvées et demande les limites lorsque h tend vers 0. Cela ne pose pas de difficulté et les formulations des élèves sont claires quand il s'agit de justifier. L'enseignante leur propose d'utiliser ensuite la commande *limit* pour obtenir ces mêmes résultats, pour vérifier qu'ils connaissent bien la syntaxe.

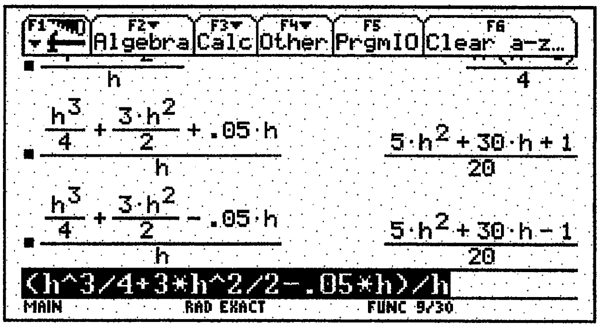
Arnaud le fait :

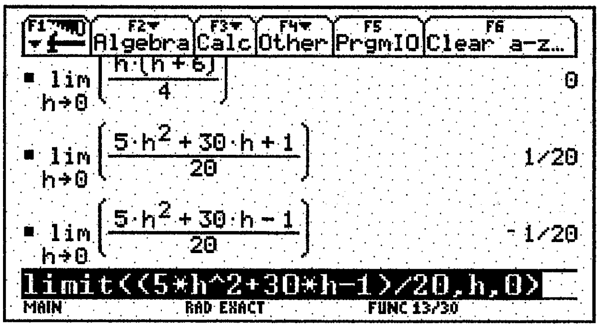




et change ensuite le MODE AUTO en EXACT. L'enseignante demande ensuite que faire. Nicolas explique qu'il faut regarder si c'est négligeable par rapport à h. Les élèves le font individuellement. Arnaud et Marianne, comme beaucoup d'élèves, font tous les calculs à la machine, comme en témoignent les écrans suivants :

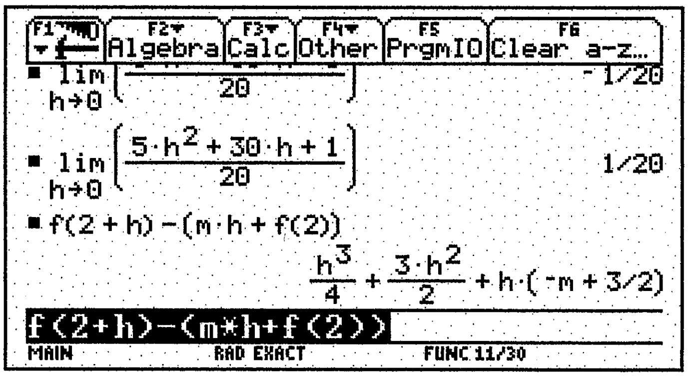






L'enseignante se fait ensuite dicter les résultats obtenus, en soulignant qu'ils pouvaient être obtenus facilement à la main comme les précédents et en faisant remarquer que la machine réduit automatiquement les expressions au même dénominateur et, dans certains cas, les factorise.

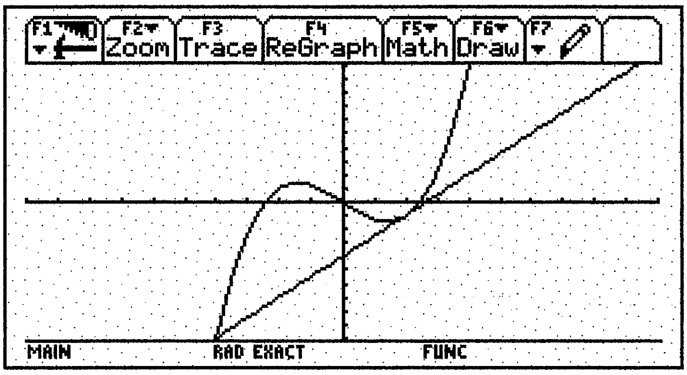
Les élèves concluent ensuite sans difficulté et certains suggèrent ensuite de remplacer m par 1.5 pour voir si c'est bien la seule droite, comme dans le cas précédent. L'enseignante le fait en allant rechercher l'expression de $\overline{P_hM_h}$ dans les premiers écrans et en substituant m à la valeur 1.55. Marianne le fait sur sa propre machine en retapant l'expression.



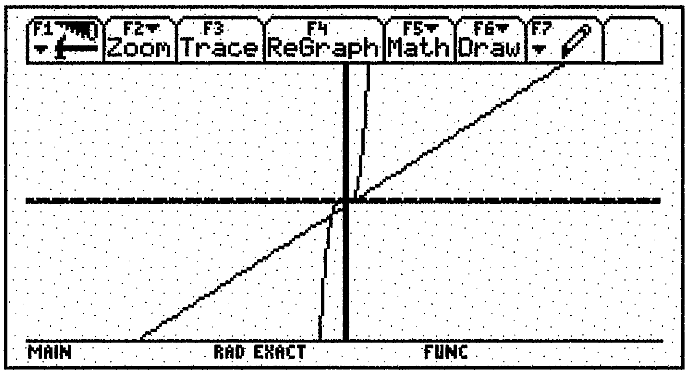
La suite du raisonnement est faite collectivement, sans recourir cette fois à la machine et sans difficulté. Les élèves concluent et notent.

L'enseignante revient ensuite dans Y=, désélectionne les deux droites auxiliaires et leur demande d'étudier plus globalement les positions de la droite et de la courbe.

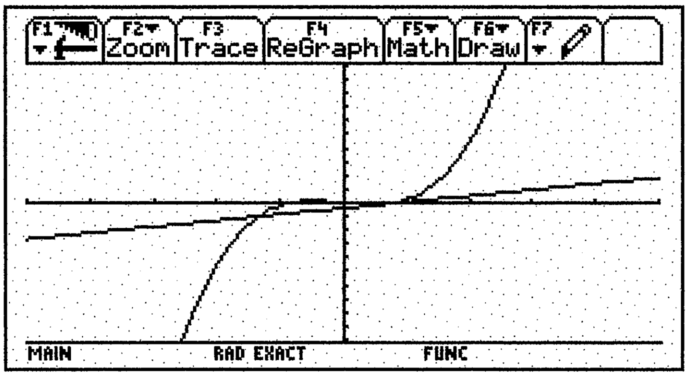
Arnaud fait tracer les deux courbes en *ZoomDec*, puis, il change de fenêtre, choisissant [-10,10]x[-20,20] :



Marianne, elle, choisit d'abord cette fenêtre puis passe à [-100,100]x[-100,100] :

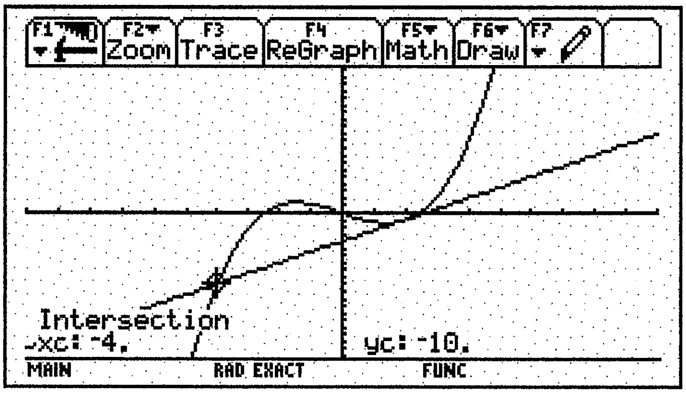


puis réduit sa fenêtre :



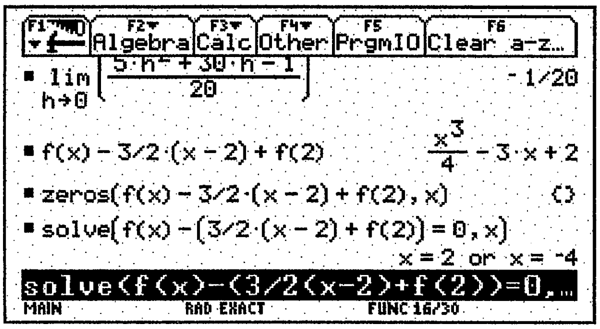
Très vite, l'enseignante de son côté, passe dans la fenêtre standard puis agrandit jusqu'à avoir tous les points d'intersection de la courbe et de la tangente visibles et demande aux élèves d'interpréter les tracés. Les élèves disent d'abord massivement que la droite est tangente à la courbe, ensuite les formulations divergent : « elle n'est plus tangente », « autour de A, elle est tangente », « elle coupe deux fois ».

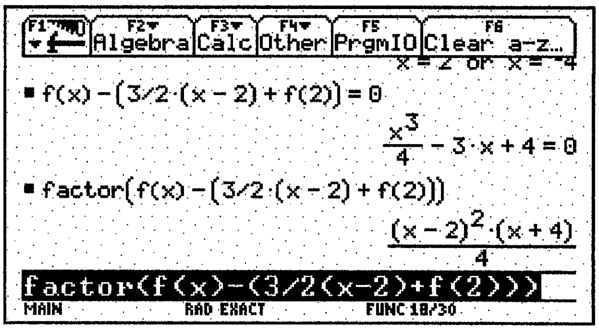
Arnaud avec la commande *Intersection* cherche à déterminer les coordonnées du second point d'intersection.



Marianne suit la phase collective. Des élèves disent que la courbe recoupe en -4 et l'enseignante demande comment le vérifier formellement. Les élèves proposent d'utiliser les commandes *Trace, Zoom, Intersection, Zeros.* L'enseignante insiste sur la vérification formelle demandée, se fait dicter le système qu'elle écrit au tableau, puis demande comment résoudre dans HOME avec la machine. Un élève propose de faire la différence des deux expressions de y et de résoudre en x. L'enseignante entre cette différence puis se fait dicter la suite des manipulations à effectuer, arrivant ainsi aux deux racines 2 et -4.

Arnaud, de son côté a utilisé d'abord la commande *Zeros*, puis ensuite la commande *Solve*.





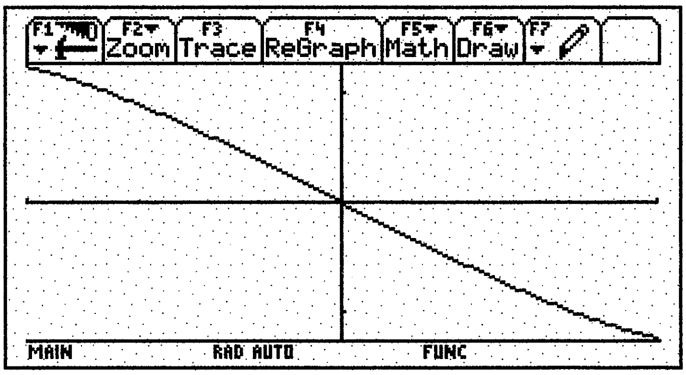
Marianne et Nicolas réagissent au fait qu'il n'y ait que deux racines alors que le polynôme est de degré 3 et disent qu'il doit y avoir une racine double et que ce doit être 2. L'enseignante demande comment vérifier et Nicolas propose de factoriser. L'enseignante le fait, Arnaud et Marianne aussi sur leur propre calculatrice et l'expression obtenue satisfait tout le monde.

L'enseignante commente cette situation, en soulignant la différence avec la parabole et en insistant sur le fait que la propriété de tangence est une propriété locale : une droite est tangente en un point.

Elle leur demande ensuite d'étudier seuls, comme prévu, le cas x=0 pour cette même fonction, mais comme il reste moins de 10mn, elle va reprendre la main très vite.

Arnaud calcule f(0) puis va dans GRAPH.

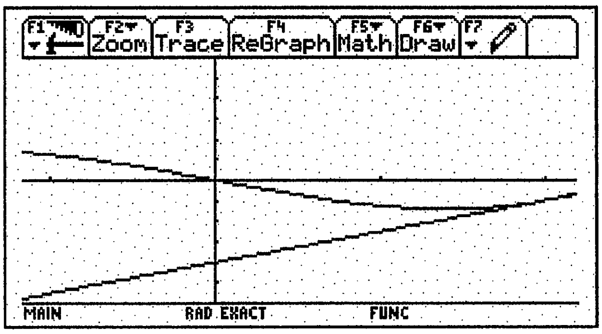
L'enseignante demande quel intervalle choisir. Un élève propose [-1,1] et elle fait un *ZoomFit*, obtenant l'écran suivant :

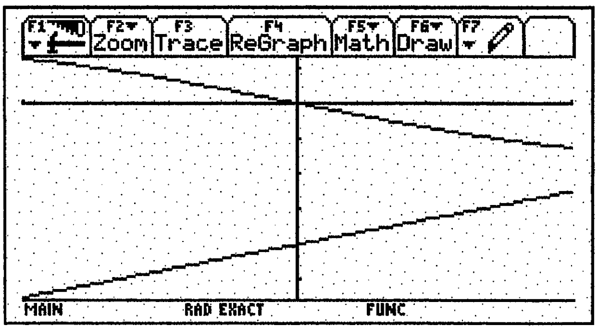


Un élève fait remarquer que la fonction est comme impaire. L'enseignante lui demande de préciser et fait démontrer par un raisonnement sur les exposants que la fonction est réellement impaire.

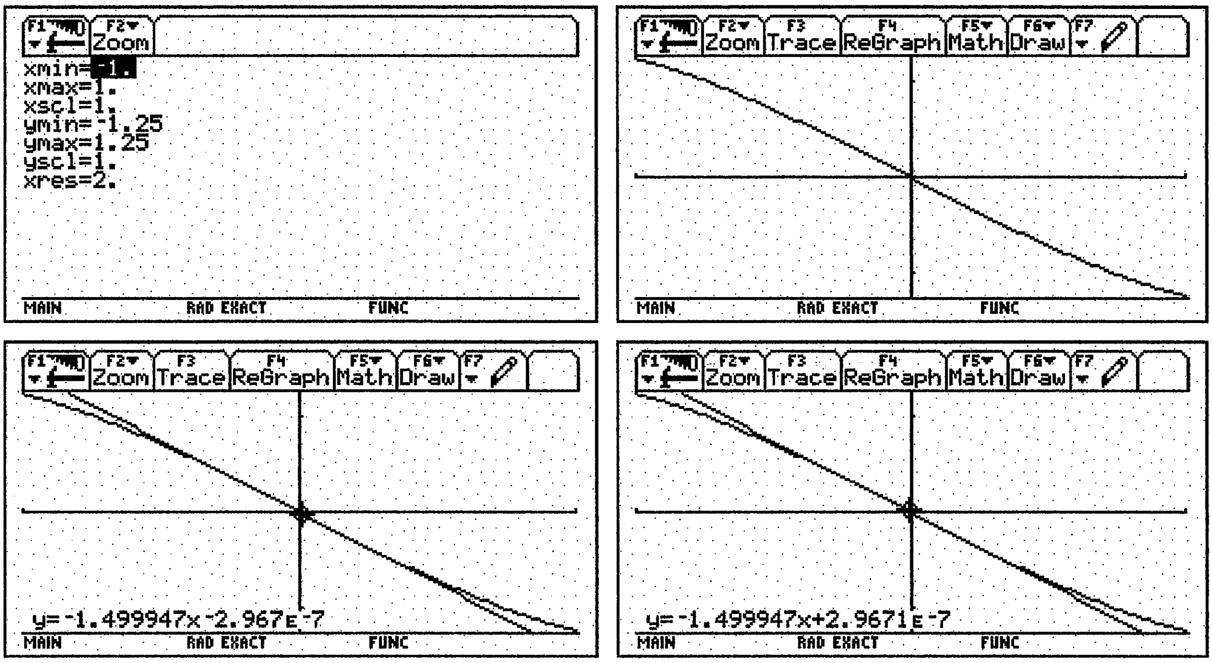
Elle leur demande ensuite comment ils vont faire pour savoir s'il y a une droite pour laquelle $\overline{P_hM_h}$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Un élève propose tout de suite la droite de coefficient directeur -1.5. Il l'a trouvée en utilisant la commande *Derivative* du menu F5. L'enseignante leur montre alors qu'il existe aussi une commande *Tangente.*

Arnaud, pendant ce temps, a fonctionné avec d'abord un *ZoomBox* puis un *ZoomFit*, obtenant les écrans suivants :



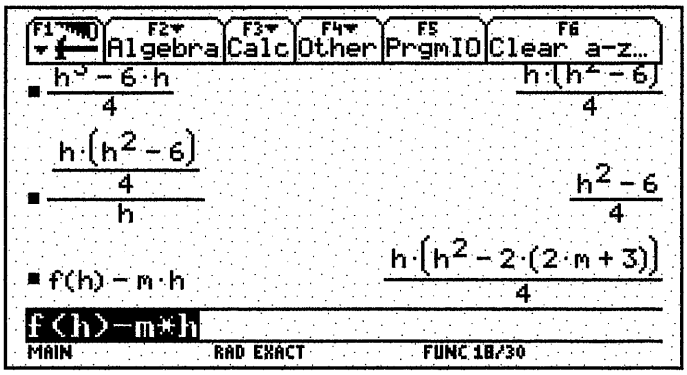


Il change ensuite de fenêtre [-1,1]x[-1.25,1.25] et, entendant l'enseignante, décide d'utiliser la commande *Tangente* :



Marianne de son côté était aussi dans une phase de tracé, changeant plusieurs fois d'intervalles avant de faire un *ZoomFit* sur [-1,1].

L'enseignante fait remarquer que la commande *Tangente* donne une valeur différente de -1.5 et en profite pour faire repréciser aux élèves que l'application graphique ne fonctionne pas en calcul exact. Elle demande ensuite aux élèves comment savoir alors si -1.5 convient bien ou non. Les élèves suggèrent de calculer les limites avec -1.5. L'enseignante accélère le processus en proposant de faire directement avec m cette fois-ci. C'est Marianne qui dicte les coordonnées de P_h, M_h et l'expression de $\overline{P_hM_h}$: f(h)-mh. Les élèves terminent ensuite à la machine (la sonnerie vient de retentir). L'enseignante se fait donner les résultats par Marianne (cf. l'écran de Marianne ci-après) et conclut rapidement en disant qu'à la séance suivante, on définira le nombre dérivé en s'appuyant sur ce qui a été fait.



Dans le deuxième demi-groupe, l'enseignante rencontre lors de l'exploration un petit problème technique : elle n'arrive plus à séparer les points M et A, ayant lâché la souris alors que les deux points étaient très près l'un de l'autre. Ne parvenant pas à le régler rapidement, elle passe à l'éditeur d'équations. La séance se déroule ensuite approximativement comme pour le premier groupe pour le premier cas traité, mais avance un peu plus vite. Amandine, l'une des élèves observées, bien que d'un niveau très moyen, participe très activement. C'est elle qui reformule par exemple la stratégie utilisée à la séance précédente, pour particulariser la droite de coefficient directeur 2 parmi les droites passant par A. Elle aura cependant un problème en calculant à la machine la limite en 0 pour l'expression dépendant de m car elle oubliera le signe de multiplication entre m et h. L'enseignante en profite pour reprendre ceci collectivement et expliquer pourquoi, alors que les expressions ont l'air identiques à l'écran, l'une a pour limite -mh et l'autre 0.

Dans le second cas, après affichage de la courbe, un élève déclare qu'il ne peut pas y avoir de tangente (et il montre de la main l'inflexion). Les autres ne sont pas d'accord. L'enseignante propose alors de recourir à la commande *Tangente* du menu F5. Les élèves constatent que la machine donne l'équation d'une tangente (y=-1.5x+0.), la trace et que cette tangente coupe la courbe en 0.

Plusieurs trouvent cela bizarre : « elle a l'air tangente, mais elle traverse ». Un certain doute s'installe. L'enseignante demande de compter les points d'intersection. La plupart répondent qu'il n'y en a qu'un mais un élève suggère qu'il pourrait compter pour 3. L'enseignante demande comment vérifier et le même élève propose de faire comme précédemment avec un point P et un point M. Ceci réoriente le travail sur la stratégie classique et ils arrivent en fin de séance à la conclusion que $\overline{P_hM_h}$ est négligeable devant h si et seulement si m = -3/2.

L'enseignante conclut que cette droite va être la tangente à la courbe à l'origine, même si elle la coupe et que le nombre m sera le nombre dérivé de la fonction en 0. Elle introduit aussi à cette occasion la commande *Derivative* du menu F5 qui avait été utilisée spontanément par un élève de l'autre groupe et de ce fait présentée ensuite à tous. Elle leur demande de chercher pour la séance suivante le nombre de points d'intersection entre la tangente à l'origine et la courbe.

Analyse

Pour notre analyse, nous nous situerons par rapport aux choix et objectifs qui ont fondé cette ingénierie. Nous interrogerons ainsi divers points tels que :

- L'interaction entre les cadres numérique et géométrique
- La mise en place du point de vue b) par rapport au point de vue a)
- La répartition du travail entre l'enseignante et les élèves : nous verrons par exemple si le degré d'autonomie des élèves correspond bien à ce qui a été prévu. Nous essaierons également de voir à quel niveau se situent les interventions de l'enseignante et comment celles-ci s'articulent avec celles des élèves dans le cadre du jeu collectif/individuel.
- L'utilisation de la machine. Nous verrons par exemple si le degré de complexité des calculs choisi est effectivement à la portée des élèves. Nous interrogerons également la répartition des calculs entre les deux environnements p/c et TI92, et la manière dont a été prise en charge par l'enseignante l'utilisation de la machine, que ce soit dans le registre graphique ou dans le registre formel.
- L'articulation entre les registres graphique et symbolique

Première heure : Phase 1

Bien que le scénario se soit déroulé globalement comme prévu, certaines interventions des élèves ont perturbé le déroulement de quelques étapes. En effet, au début de la séance la conjecture du nombre 2 a bien été faite par les élèves. Ces derniers ont été sensibles au fait que la position limite des sécantes correspondait à un coefficient directeur égal à 2, mais la présence de ce même nombre dans l'expression de la fonction ($f(x)=x^2-2$) donnée au début de la séance semble parasiter cette conjecture. Ceci a poussé l'enseignante M. à demander aux élèves d'écrire l'équation de la droite sécante qui passe par A et de coefficient directeur 2, ce qui a permis de focaliser l'attention sur l'évolution des coefficients directeurs des sécantes que M. manipule à la rétroprojetable. En fait, l'interaction entre le cadre numérique et le cadre géométrique n'a pas fonctionné exactement comme prévu à cause de la donnée de l'expression de la fonction (registre formel). Cependant, cette étape a fourni une occasion supplémentaire pour impliquer les élèves dans un travail individuel et pour rappeler les connaissances sur les équations de droites nécessaires à cette séance.

A l'étape suivante concernant l'inefficacité des zooms à distinguer la "bonne" sécante, c'est l'enseignante qui a proposé un zoom (*ZoomIn*) et non pas les élèves comme il était prévu. De plus, cette étape nous a semblé trop rapide pour permettre une bonne transition du point de vue b) au point de vue a), sachant que cette étape constitue un passage clé dans la problématisation du nombre 2 :

M: . . . laquelle (*des sécantes*) est la plus proche de la parabole ?
-chuchotements-
M: Est-ce qu'on sait? . . . non. Je regarde, je fais un *ZoomIn* autour du point A, toujours ma parabole, la droite de coefficient directeur 1.9 ; celle de coefficient directeur 2 ; celle de coefficient directeur 2.1. Est-ce qu'on est plus avancés? . . . non. Est-ce que vous pensez qu'avec d'autres zooms ça va nous permettre . . . non. Donc, d'autres zooms a priori ne nous permettent pas de conclure. Alors, quel moyen va-t-on avoir d'évaluer la proximité de cette droite, de l'une de ces droites avec la courbe représentative de la fonction autour du point d'abscisse 1 . . .

Par ailleurs, le jeu collectif/individuel prévu a été bien respecté. Dans les étapes collectives, les élèves avaient à leur charge de piloter les calculs dont la complexité moyenne (présence d'une seule variable, expression comprenant une identité remarquable) n'a pas posé de problème. Dans l'étape individuelle, les élèves avaient à réinvestir dans le cas des deux droites candidates à être la tangente, les calculs faits pour celle de coefficient directeur 2. Et bien que l'on ait l'impression, dans cette étape, que les élèves ont d'eux-mêmes proposé de différencier (conformément aux hypothèses de l'ingénierie) la "bonne" droite à l'aide de la vitesse de convergence, il nous semble que cela a été un peu dirigé par le discours de l'enseignante:

M *(en se basant sur le tableau dont les colonnes représentent $\overline{P_hM_h}$ et $\lim \overline{P_hM_h}$)*: Donc est-ce qu'on est plus avancés? Non, les trois (expressions de $\overline{P_hM_h}$) ont pour limite 0 quand h tend vers 0. Maintenant est-ce que ces trois quantités tendent vers 0 <u>de la même façon</u>?
Un élève E: Non
M: la question qu'on pourrait se poser c'est par rapport à h . . .
E: Laquelle va le plus vite.
M: Laquelle va le plus vite, ou encore est-ce qu'elles sont toutes les trois négligeables par rapport à h . . .

Concernant l'unicité du "2", le réinvestissement du calcul de $\overline{P_hM_h}$ dans le cas où il y a un paramètre a bien été effectué en collectif et piloté par les élèves. Cependant, avant que l'enseignante ne passe à l'étape suivante qui est celle de la récapitulation de la démarche, le terme "tangente" a été proposé par certains élèves. M. a alors saisi cette occasion pour aborder la question du lien avec la conception "ancienne" de la tangente, ce qui a donné lieu, comme prévu, à une institutionnalisation locale. En revanche, M. n'a pas fait de bilan global de la démarche sans doute parce que cette première heure touchait à sa fin.

Deuxième heure : séance avec un demi-groupe

Phase 2

Cette deuxième heure commence directement par la phase 2, et l'étape de récapitulation de la démarche pour la recherche du "bon" coefficient directeur n'a finalement pas eu lieu. Le début de cette phase qui devait aboutir à une conjecture géométrique sur le "bon" coefficient directeur (sur la base de l'affichage numérique dans le module GEOMETRY) a été compromis. En effet, le cas M=A où la machine affiche 1 comme coefficient directeur (ce qui était d'ailleurs prévu) a entraîné une intervention de l'enseignante allant jusqu'à conjecturer sur le coefficient directeur, prenant ainsi en charge le travail qui devait être dévolu aux élèves :

M: Je prends un point M et puis qu'est-ce qui se passe? Eh bien, comme tout à l'heure, même problème, la sécante (AM). Vous voyez le coefficient directeur de (AM) qui s'affiche. Alors je déplace le point M. Vous observez ce qui se passe . . . coefficient directeur 1 . . . 2,1 . . . 2,2 . . . virgule 4 . . . virgule 5 . . . on voit plus de droite, y a marqué 1 . . . 1,6 . . . alors là, c'est bizarre, la droite n'existe plus

E (un élève) : Ils sont l'un à côté de l'autre?

M: Ouais, les points sont confondus normalement. Là, ils sont très proches l'un de l'autre. Alors très proches, vous voyez on a un coefficient directeur 1,6 . . . 1,5 . . . 1,4 . . . 1,3 . . . Alors, qu'est-ce qui se passe selon vous? . . .

-Pas de réponse-

M: Tout à l'heure, on se posait la question, vous aviez l'impression que c'était la droite de coefficient directeur 2 qui était proche. Alors, ici laquelle semble proche? . . .

Petit silence, puis :

E: Celle de coefficient directeur 1

M (*quittant la rétroprojetable et se dirigeant vers le tableau*): Regardez, là c'est 1,4. Vous en affichez une de coefficient directeur 1 . . . celle de coefficient directeur, elle est là donc l'autre, le 1 affiché c'est manifestement une anomalie. On a déjà rencontré une anomalie d'affichage . . . Vous voyez 1,4 . . . 1,5 . . . 1,6. Donc c'est autour de 1,4 - 1,6. Ce qui se passe, ça a l'air de se passer entre 1,4 et 1,6 d'accord ? . . . Alors on va faire comme tout à l'heure, on va regarder laquelle est la plus . . . On va passer dans le module Y= et on va donner les . . .

Ensuite, il y a une intervention d'un élève (voir ci-après) qui nous semble une conséquence de l'absence de l'étape de récapitulation :

M: J'ai écrit l'équation de 3 sécantes . . . J'ai écrit y1, y2, y3 et y4 . . . Qu'est-ce que ça représente ? . . .

E: Des droites

M: Les équations de quelles droites ?

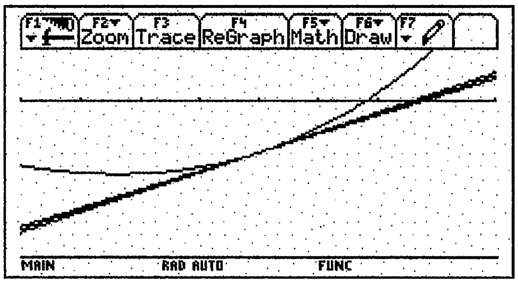
E: Tangentes à la courbe

Cette réponse nous montre bien que chez cet élève, l'unicité de la tangente ne paraît pas caractériser cette droite particulière. Ceci aurait peut-être pu être mis en évidence si l'étape de bilan de la recherche du nombre dérivé avait eu lieu. On remarquera par ailleurs que, bien qu'explicite, l'institutionnalisation locale concernant la tangente n'a pas suffi à consolider la propriété de l'unicité :

M: Donc <u>cette fameuse droite particulière</u> de coefficient directeur 2 coupe la parabole en deux points confondus. On dira qu'elle est tangente à la parabole et c'est son coefficient directeur qui va jouer un rôle très particulier, c'est ce fameux nombre 2.

Lors de cette première étape de la deuxième phase, l'aide de M. à la conjecture a été, comme dans la première phase, très appuyée. Ceci est visible à travers le cadrage qui a été entièrement pris en charge par l'enseignante, que ce soit pour le choix de la fenêtre au voisinage du point en question (qui s'est traduit par un changement manuel de la fenêtre dans WINDOW) ou pour celui du zoom (M. a proposé un seul zoom : *ZoomOut*). D'ailleurs, les réponses des élèves semblent sous-tendues plutôt par des raisons de contrat :

Après avoir proposé une fenêtre autour du point en question, M. obtient le tracé suivant :



M: Est-ce que je peux trancher?

E: Non

M: Je fais un *ZoomOut* autour de . . .

M. effectue alors un ZoomOut

M: Est-ce qu'on est plus avancés ?

E: Non

M: Alors qu'est-ce qu'on fait ?

Nous voyons bien que la question *"Est-ce qu'on est plus avancés?"* appelle plus naturellement une réponse négative, alors que les élèves peuvent légitimement se demander si avec un *ZoomFit* adéquat par exemple, il ne serait pas possible de différencier les trois droites.

Prenons maintenant l'échange qui a succédé à celui cité ci-dessus :

E: On étudie la limite

M: On étudie la limite de quoi?

E: Eh bein . . .

M: Allez, qu'est-ce qu'on va faire pour décider laquelle des droites est la plus proche. Est-ce que c'est $D_{1,5}$? Est-ce que c'est $D_{1,45}$? Est-ce que . . .

E: On va . . . même abscisse

M: Oui on va chercher comme tout à l'heure, la différence y de la courbe moins y sur la droite, c'est-à-dire qu'on va calculer $\overline{P_hM_h}$, M étant le point de coordonnées . . . Alors vous me dites quelles sont les coordonnées de M? Ici, on est autour du point d'abscisse?

E: 2

M: 2, donc le point M a pour abscisse?

E: x

M: Alors c'est x, mais on voudrait exprimer clairement que cette abscisse est proche de 2. Comment tout à l'heure, on avait exprimé que l'abscisse de M était proche de 1?

E: 2+h
M: On l'avait appelé 1+h en disant que h allait tendre vers?
E: 2
M: Vers 0, donc ici on va prendre?
E: 2+h
M: 2+h . . .

Là, à travers leurs réponses, nous voyons que les élèves ont du mal à se rappeler de la démarche en question, ce qui fait que l'enseignante prend en charge finalement tout ce passage de mise en place de la méthode algébrique. Ceci aurait peut-être pu se passer de manière plus "fluide" si le bilan, déjà mentionné antérieurement, avait eu lieu.

Par la suite, les étapes concernant la recherche formelle du nombre dérivé et de son unicité se sont déroulées comme prévu. C'est l'enseignante qui annonçait les différentes étapes mais les calculs étaient pilotés par les élèves et ce à la machine. Comme pour toute utilisation de la machine en classe (Cf observations précédentes) M. demande de libérer les variables et de commencer par définir la fonction dans l'application HOME. Par ailleurs, pour le calcul des limites, M. oriente le travail tout d'abord vers une recherche se basant sur les fonctions de référence, ce qui a fait l'objet d'un échange oral où les élèves étaient engagés dans la justification des calculs. Ensuite, M. a permis aux élèves d'utiliser l'ostensif *limit* et après un temps de travail individuel à la machine, M. a rempli le tableau (où il fallait calculer les différentes quantités relatives à la négligeabilité) en se basant sur les réponses orales des élèves. Pour ce qui est de l'unicité du coefficient directeur de la tangente, les élèves ont une fois de plus participé à la recherche en proposant la prise en compte du paramètre et en calculant la limite de l'expression correspondante. Ensuite, M. est intervenue pour conclure en insistant sur l'unicité de la tangente.

A l'étape suivante, M. est intervenue pour agrandir la fenêtre de tracé puis à sa demande, les élèves ont constaté qu'il y avait un autre point à l'intersection de la tangente et de la courbe représentative et ont déterminé à l'œil nu l'abscisse dudit point. M. est intervenu alors à deux niveaux : d'une part, pour signaler qu'une utilisation de l'ostensif *Intersection* était possible. D'autre part, pour souligner que cette première recherche de l'abscisse du point en question, que ce soit à l'œil nu ou à l'aide de *Intersection*, n'est que graphique et qu'une recherche formelle est nécessaire :

M: Alors grossièrement, elle a l'air de recouper au point d'abscisse ?
E: -4

M: Comment le savoir formellement? Graphiquement, vous pouvez utiliser *Intersection.* Comment prouver formellement ça?

Le jeu professeur/élève continue à bien fonctionner puisque les élèves proposent d'étudier un système d'équations, avant que M. ne décide de l'environnement dans lequel les calculs vont se faire, à savoir ici l'application HOME. Par contre, M. propose successivement les deux ostensifs *Solve* et *Factor* sans distinction précise, sans doute pour ne pas faire perdre le fil de la séance aux élèves. Enfin, après que ces derniers aient remarqué la présence de la racine double au niveau de la tangente, M. prend en charge totalement le bilan où elle compare au cas de la tangente à la parabole et où elle conclut sur le caractère local de la tangente dans le cas général d'une courbe représentative.

Phase 3

M. commence par annoncer l'activité qui devrait être dévolue aux élèves, mais un peu plus tard elle prend encore une fois en charge le choix du zoom (*ZoomFit*) sans le justifier, d'autant plus qu'il est différent de ceux utilisés jusqu'alors (dans cette séance). Puis, à la suite d'une intervention d'un élève (Gregory) qui propose d'utiliser l'ostensif graphique *F5-Derivative* pour trouver le coefficient directeur de la tangente, la séance bascule et la phase ne se déroule pas du tout comme prévu. Ainsi, au lieu que ce soit une phase où les élèves seraient enfin autonomes, tout se déroule en collectif et c'est M. qui détermine les différentes étapes. M. rebondit alors sur l'intervention de l'élève pour présenter l'ostensif graphique *F5-Tangent,* pour souligner que *"dans le calcul graphique, c'est jamais un calcul exact"* et en déduire la nécessité d'un calcul formel. Les élèves interviennent alors pour proposer la *"méthode des limites"* mais en se basant tout de même sur la valeur -1,5 trouvée avec l'ostensif *F5-Derivative* et proposée par Gregory. M. essaie alors de mettre en lumière la méthode générale avec paramètre :

M: Oui mais est-ce qu'on pourrait pas faire un peu l'économie des explorations qu'on a faites tout à l'heure? Alors Gregory nous suggérait -1,5 mais est-ce qu'on ne pourrait pas aller plus vite?

Cette transition nous paraît mal choisie dans la mesure où l'argument de la rapidité n'est pas justifié. En effet, l'utilisation de l'ostensif *Derivative* est, dans ce cas précis, indéniablement la plus rapide et la plus efficace. Et même si la réponse d'un élève (qui propose la méthode avec paramètre) a permis la transition recherchée, on pourrait penser que c'est pour des raisons de contrat.

Conclusion :

Pour ce qui est des deux premières phases, les prévisions de l'ingénierie ont été globalement vérifiées. Ainsi en est-il par exemple de la répartition du travail entre collectif et individuel, où les échanges dans les phases collectives ont été réguliers et soutenus. Dans les phases individuelles, les élèves, dans leur majorité, ne semblaient avoir de problèmes ni dans la manipulation de la machine, ni dans les calculs formels qu'ils avaient à effectuer. Cet investissement de la classe semble s'expliquer par l'accessibilité du travail qui était à leur charge, et par le choix délibéré d'opter pour un travail p/c avant toute utilisation de la machine, choix qui aura permis de donner du sens aux diverses étapes de cette séance. Ceci dit, les phases collectives ont été parfois étroitement pilotées par l'enseignante, ce qui n'est pas sans rappeler d'ailleurs une des réalités de l'enseignement dans l'environnement standard où le professeur tend à prendre en charge des situations devant être a priori a-didactiques. Nous retrouvons également une des raisons de cette tendance, à savoir le manque de temps. En effet, le scénario prévu est manifestement trop long pour tenir en deux heures (où la durée des pauses est comprise), ce qui semble expliquer l'absence de la quatrième phase et le traitement un peu rapide de la troisième phase. Cependant, nous ne pouvons ignorer que l'utilisation de la machine induit également des situations que le professeur n'arrive pas toujours à négocier de manière satisfaisante, du moins par rapport au déroulement prévu dans l'ingénierie. Citons par exemple l'intervention de Gregory qui propose un ostensif-TI92 (GRAPH-*F5-Derivative*) capable de donner une réponse correcte et rapide pour le cas étudié. Nous nous retrouvons ainsi au centre d'une des questions principales liées à l'intégration des calculatrices à l'enseignement : comment gérer l'utilisation d'ostensifs-machine quand ceux-ci sont bien plus efficaces (ne serait-ce que dans des cas particuliers) que des techniques-p/c ? Dans notre cas, le choix des valeurs numériques - qui sont des variables didactiques - de sorte à mettre en défaut la mise en œuvre d'un ostensif-TI92 (comme *F5-Derivative*, ici) nous paraît nécessaire pour éviter de compromettre le fil de la séance. En fait, nous pouvons situer de manière globale ce cas-là dans le cadre de la problématique de la gestion et du contrôle des multiples possibilités offertes par la machine mais, qui dit ouverture du champ des possibles, dit également contraintes. En effet, le cas "M=A" (au début de la deuxième phase) illustre bien la difficulté prévisible (et prévue par l'ingénierie) que le professeur peut avoir dans la gestion des *contraintes internes* dans des démarches de conjecture à l'aide de la machine. Cependant, vu que cette "anomalie" n'intervient pas au début de la séance mais plutôt dans une adaptation de la démarche mise en place dans la première phase, elle pourrait être exploitée par exemple comme une contrainte qui aiderait ou consoliderait l'accès aux connaissances visées par la première phase. De manière plus pragmatique, cette contrainte pourrait également avoir une fonction *d'indicateur* (pour le professeur) permettant d'évaluer en temps réel si la démarche a été acquise par la classe ou non, et donc si la cohérence globale est maintenue.

Par ailleurs, nous pensons que certains points de l'ingénierie peuvent être améliorés, bien qu'ils n'aient provoqué aucune perturbation apparente. En début de séance, par exemple, il nous paraît plus judicieux de retarder la donnée de l'expression de la fonction, afin d'éviter que cela ne parasite (comme ce fut le cas dans cette séance) l'étape de conjecture liée à l'interaction numérique/géométrique. D'ailleurs, ce "parasitage", qui se traduit par le recours à l'expression de f(x), est d'autant plus tentant pour les élèves que leur rapport aux limites n'est pas encore solide. Par ailleurs, nous pensons que le passage du point de vue b) au point de vue a) pourrait être plus "convaincant" (nous avions interprété l'absence de réaction des élèves lors de ce passage par des raisons de contrat didactique) si l'enseignante proposait plus d'un type de zoom : par exemple *ZoomFit* et *ZoomIn.*

Observation 5 : Fonction dérivée et dérivées de fonctions de référence (Février 97)

Scénario :

Après la séance d'introduction, le scénario prévoit de gérer sur deux séances, les fonctions suivantes :

$x \mapsto 2x+3 \quad x \mapsto \frac{1}{x} \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad x \mapsto |x| \quad x \mapsto |x^2-4x+3| \quad x \mapsto x\sin(\frac{1}{x})$

en faisant calculer directement les limites en divers points avec l'aide de la machine, dans un scénario qui alterne le travail algébrique et graphique, en fonction des spécificités des fonctions considérées. Ces séances doivent aussi permettre de repérer quelques cas de non-dérivabilité qui seront rassemblés dans le « récit » distribué ensuite aux élèves. C'est à l'issue de ces séances qu'il est prévu d'introduire la commande de dérivation formelle de la machine.

- Pour la première fonction, on prévoit de demander aux élèves d'anticiper le résultat en posant la question de savoir quelle est la tangente à une droite en l'un de ses points (question qui, on le sait, n'est pas triviale pour les élèves qui ont du mal à se départir de l'idée que tangente et courbe se touchent en un point mais sont bien distinctes au voisinage de ce point) avant de vérifier que la démarche algébrique mise en place la fois précédente conduit bien au même résultat. On généralisera ensuite au cas d'une droite quelconque.

- Pour la seconde fonction, on prévoit de demander un calcul à la main qui sera suivi d'une vérification à la machine.
- Pour la troisième fonction, on prévoit de débuter cette fois par un calcul à la machine. On cherchera ensuite collectivement comment retrouver le résultat $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ fourni par la machine et la méthode de produit par la quantité conjuguée sera identifiée.

Cet exemple devrait également servir à poser le problème du domaine de validité de la formule obtenue et à relier la non dérivabilité en 0 de cette fonction à l'existence d'une tangente verticale.

- Pour la quatrième fonction, il est prévu de demander aux élèves de formuler une conjecture à partir du tracé de la courbe représentative de la fonction. On utilisera ensuite le calcul machine pour tester les conjectures. Précisons que la TI92, dans ce cas, renvoie sign(a) pour $\lim\limits_{h \to 0} \frac{|a+h|-|a|}{h}$; c'est une fonction que les élèves ne connaissent pas encore et il leur faudra interpréter cette production.
- Pour $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ enfin, il est prévu de faire une exploration à la calculatrice par zooms successifs. Il n'est pas question de mener une étude précise de cette situation mais simplement de l'utiliser pour enrichir l'herbier des images associées aux cas de non dérivabilité et montrer qu'il existe des cas plus compliqués que ceux qu'ils seront amenés à rencontrer pendant cette première année de contact avec les dérivées.

L'ensemble se terminera par une synthèse sur les différents cas rencontrés de non-dérivabilité, on introduira aussi à cette occasion la commande de dérivation formelle de la calculatrice et on la fera fonctionner sur les exemples déjà traités.

Déroulement :

Cette partie du scénario sera gérée en deux séances de deux heures, 35mn de la première heure étant consacrée à la phase 4 de l'introduction non abordée pendant la séance précédente.

Séance 1 : 3 février 1997

L'enseignante fait rappeler ce qui a été fait à la séance précédente et le fait adapter au cas général d'une fonction f étudiée au voisinage de a. Une figure est tracée au tableau (cf. résumé de cours en annexe). Ni le rappel, ni l'adaptation ne posent de problème, l'enseignante ayant cependant à reprendre des formulations un peu floues. On arrive ainsi à la formulation : on cherche s'il existe m tel que $\overline{P_h M_h}$ soit négligeable devant h et à l'expression associée :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-(f(a)+m\,h)}{h} = 0$$

L'enseignante propose alors de transformer cette expression. Un élève propose de simplifier par h. En fait, il est prêt à simplifier par h y compris dans f(a+h). L'enseignante lui fait réexpliquer le sens de la notation f(a+h), puis reprend cette idée de simplification pour arriver à :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - m = 0$$

Elle demande ensuite si l'on peut encore écrire autrement cette limite, en les invitant à se remémorer ce qu'ils avaient fait quand ils avaient défini qu'une fonction avait pour limite l à partir des limites 0. Amandine trouve très vite et propose :

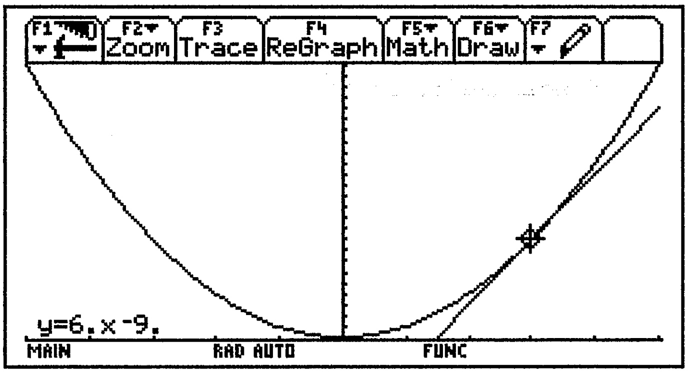
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = m$$

L'enseignante numérote les trois formes, fait rappeler ce qui était en jeu dans le travail du vendredi précédent et demande quelle est dans ce cas l'expression la plus commode. Les élèves n'hésitent pas, c'est la 3 car on n'a pas besoin de connaître m.

L'enseignante dicte ensuite la définition du nombre dérivé en a puis fait écrire l'équation de la tangente et relier nombre dérivé et coefficient directeur de la tangente.

Au bout de 25mn, elle passe à l'approximation affine et là va rencontrer des difficultés sérieuses. Visiblement les élèves n'arrivent pas à donner sens à la fonction φ introduite (cf. résumé de cours), pas plus qu'ils n'arrivent à suivre l'enseignante quand elle essaie de faire dire que $h\varphi(h)$ est négligeable par rapport à h pour justifier le choix de f(a)+mh comme approximation affine. Le contraste est saisissant si on compare à tout ce qui précède, montrant clairement qu'il y a là pour les élèves, même si toute l'argumentation précédente était basée sur un questionnement de proximité, deux mondes différents qu'ils ne peuvent relier par une simple transformation d'écritures.

Au bout de 35mn, l'enseignante passe à des fonctions particulières, reprenant d'abord la fonction f définie par $f(x)=x^2$ et posant la question de sa dérivabilité en a. Les élèves se mettent au travail rapidement et visiblement gèrent bien le calcul qui est à faire à la main, arrivant pour le quotient à l'expression 2a+h. Le passage à la limite crée un flottement chez certains élèves du fait de la présence des deux lettres a et h, facilement géré en proposant deux valeurs particulières pour a. On arrive ainsi à la conclusion que la fonction est dérivable pour tout a, de nombre dérivé 2a et l'enseignante fait vérifier que c'est bien compatible avec le résultat obtenu en 1, à la séance précédente. Elle demande l'équation de la tangente au point d'abscisse 3, fait tracer la courbe et la tangente sur la TI92 rétroprojetable :



Elle essaie ensuite de revenir à la question de l'approximation affine, en demandant une approximation affine de $(3+h)^2$ en précisant qu'il s'agit donc d'une approximation affine de f(3+h). Les élèves regardent leurs notes, l'enseignante circule puis aide collectivement les élèves à produire l'approximation et à l'interpréter :

M : Alors f(a+h) a pour approximation affine f(a) plus ?

E: mh

M: mh, que vaut m ici ? .....

E' : 2a

M. écrit au tableau :

f(a+h) a pour approximation affine f(a)+2ah

$(a+h)^2$ // // // a^2+2ah

M: ça vous fait penser à quelque chose?

E: Le début de l'identité remarquable.

M: Oui et qu'est-ce qui manque?

E: h^2

M: Il manque h^2, oui et......

E' : C'est le carré de h

E'' : C'est négligeable

M: Et le h^2 est négligeable devant h, ce qui manque c'est le $\overline{P_h M_h}$, et c'est le h^2, d'accord ? Eh bien on va continuer tout à l'heure avec d'autres fonctions.

C'est la pause.

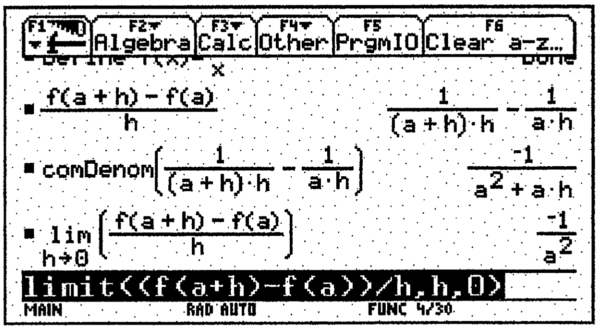
Après la pause, l'enseignante propose la fonction f définie par f(x)=-3x+5 et, comme prévu, demande si elle admet un nombre dérivé en tout point, après l'avoir faite tracer sur la machine rétroprojetable. Les réponses fusent :

« Elle est dérivable en tout point », « La tangente, elle est confondue avec la droite », « La dérivée vaut toujours pareil »

L'enseignante demande des précisions. Un élève répond que m vaut toujours -3. L'enseignante demande si l'on pourrait vérifier par le calcul. Loïc dit le calcul à effectuer et l'enseignante leur demande de le faire individuellement. Cela ne pose pas de problème. L'enseignante vient de conclure quand l'un des élèves Pierre demande : « mais la limite de la fonction du départ, c'est pas 5 ? ». L'enseignante fait préciser à Pierre en quel point il prend la limite, puis explique que ce n'est pas la limite de la fonction en 0 qu'ils calculent mais la limite du quotient quand h tend vers 0. Pierre réfléchit puis explique qu'il était gêné parce qu'il confondait la limite de f(x) quand x tend vers 0 et la limite de f(a+h) quand h tend vers 0 parce qu'on avait posé x=a+h. L'enseignante explique pour tous que chercher la limite de f(a+h) quand h tend vers 0 c'est la même chose que chercher la limite de f(x) quand x tend vers a et non pas la limite de f(x) quand x tend vers 0.

Elle leur demande ensuite de prendre leurs machines pour étudier si la fonction f définie par f(x)=1/x pour x différent de 0 est dérivable en a pour tout a différent de 0.

Marianne et Vincent sont les élèves dont les machines sont reliées aux ordinateurs pour cette séance. Ils définissent la fonction dans HOME puis font les calculs. Marianne oublie, pour la limite, d'indiquer la variable et reçoit un message d'erreur qu'elle interprète immédiatement et obtient très vite la limite. Vincent de son côté utilise la commande *ComDenom* avant de prendre la limite :



Voyant que les élèves ne rencontrent pas de difficultés, l'enseignante se fait dicter les calculs à faire à la machine. Elle demande ensuite aux élèves s'ils sauraient les faire à la main. La réponse est massivement « Oui ». Elle fait conclure et noter le résultat. Un élève Emmanuel l'interrompt car il n'arrive pas à obtenir le résultat. En fait, il a libéré la variable f après avoir défini la fonction. L'enseignante repère immédiatement l'erreur et la lui indique. Elle fait ensuite préciser le signe de la dérivée puis se fait dicter le détail des calculs qu'elle écrit au tableau.

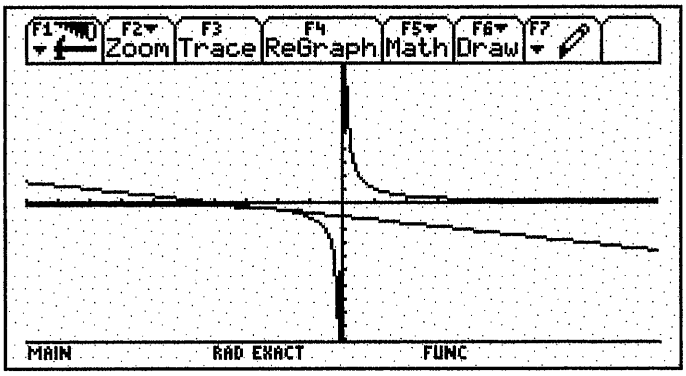
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{a-(a+h)}{a(a+h)h}=\frac{-h}{a(a+h)h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=\frac{-1}{a^2}$$

Elle demande ensuite l'équation de la tangente au point d'abscisse -2 et fait rappeler la forme générale : m(x-a)+f(a) avant de laisser les élèves faire individuellement le calcul. Vincent fait une erreur de calcul, écrivant :

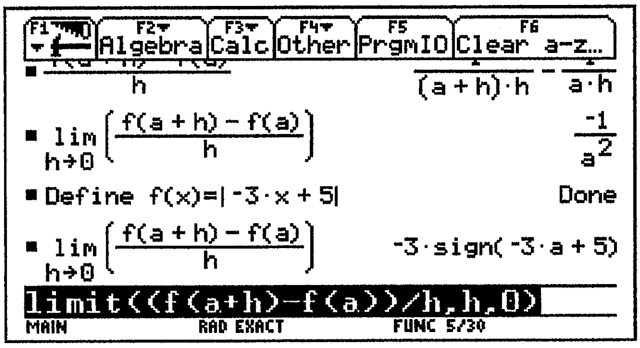
$$y=m(x-a)+f(a)=\frac{-1}{4}(x+2)+\frac{1}{2}=\frac{-1}{4}x$$

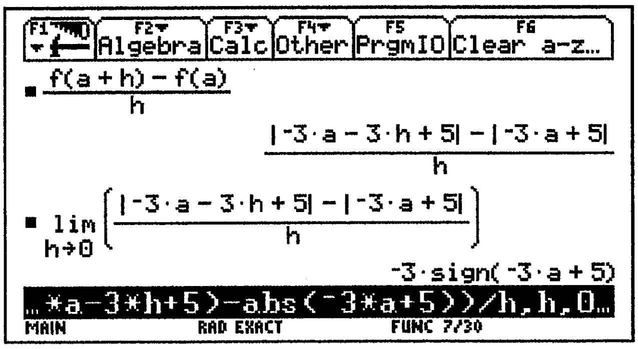
L'enseignante fait assez vite, de son côté, les calculs à la machine puis entre dans l'éditeur d'équation y=1/x et y=-x/4-1 pour vérifier graphiquement la tangence. Les élèves reproduisent que leur écran (cf. l'écran de Marianne reproduit ci-après) :



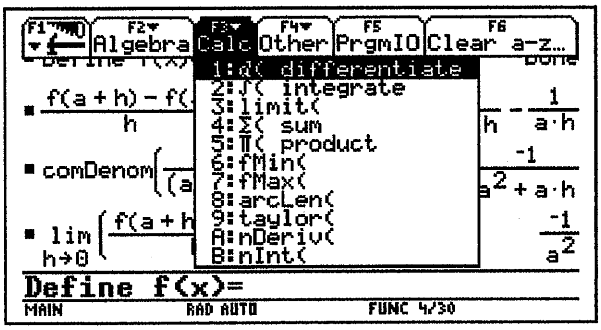
L'enseignante introduit ensuite une nouvelle fonction définie par f(x) = $|-3x+5|$

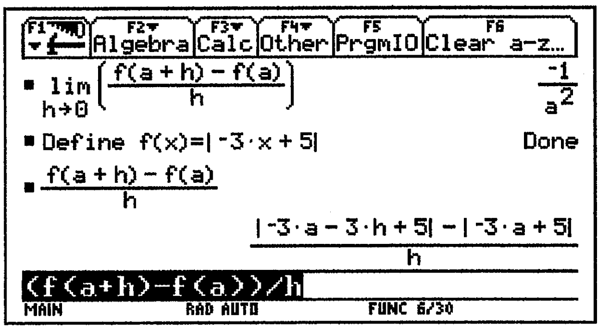
Marianne la définit puis demande directement la limite du quotient différentiel en une seule opération. Très étonnée par le résultat, en reprend le calcul en détaillant les étapes, aboutissant au même résultat :



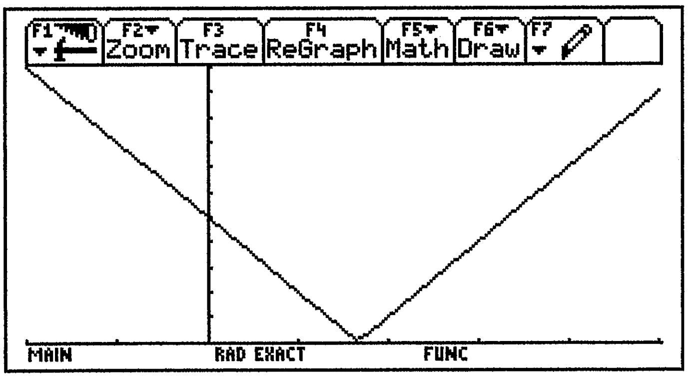


Vincent, de son côté cherche la fonction valeur absolue, puis ne la trouvant pas tape directement *abs*. Il calcule ensuite le taux d’accroissement.



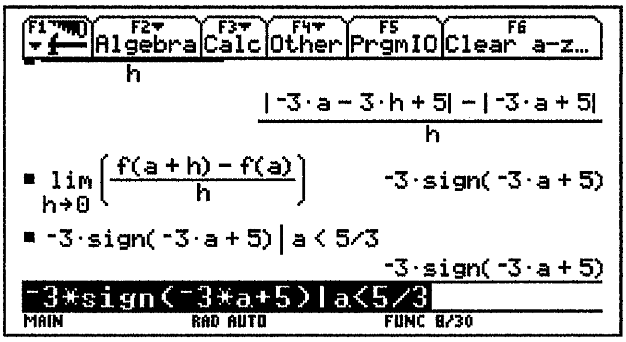


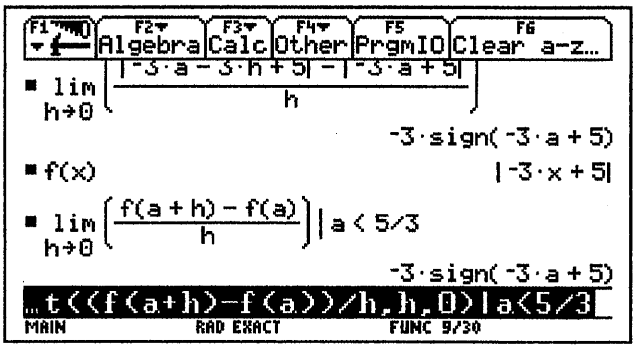
Environ la moitié des élèves a démarré comme Vincent et Marianne, tandis que l’autre a démarré en faisant tracer la fonction. Ceux qui ont obtenu l’expression formelle ne savent visiblement pas quoi en faire. L’enseignante intervient alors et après avoir fait remarquer qu’il y a deux stratégies, montre ce que l’on obtient avec chacune d’elles et souligné le problème posé par la fonction *sign*, elle oriente les élèves vers l’exploitation du graphique.



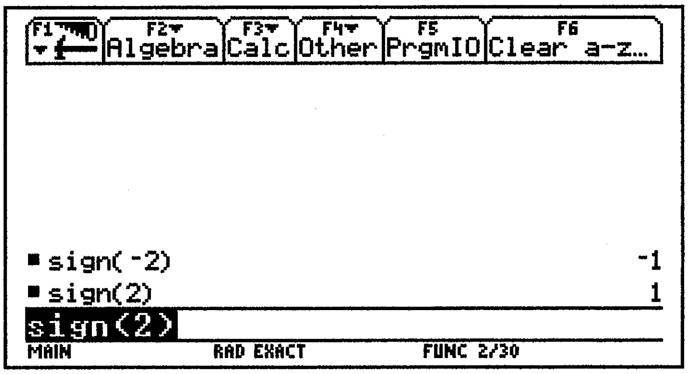
Elle veut faire produire aux élèves collectivement l’équation des deux demi-droites et ceci ne va pas aller sans mal. Les élèves disent que les coefficients directeurs sont 3 et -3 mais visiblement n’arrivent pas à exploiter rapidement l’expression donnée pour trouver ces

équations. Pour le point d'intersection avec l'axe Ox, on entend successivement : 5, puis 3/5 et enfin 5/3. Pour l'équation, un propose y=-5/3x que l'enseignante fait tracer puis un autre y=-3x+5/3. L'enseignante fait de nouveau tracer. Finalement, au troisième essai, on arrive à -3x+5. Pour la branche de droite, les avis sont partagés entre y=3x-5 et y=3x+5 et les élèves proposent d'essayer pour choisir. L'enseignante déclare qu'ils exagèrent et les oblige à revenir à la définition de la valeur absolue. Cela ne va pas de soi. Enfin, les deux expressions sont disponibles et l'enseignante passe à la question de la dérivabilité. D'emblée un élève (Emmanuel) dit qu'elle n'est pas dérivable là où f(x)=0 mais il ne sait pas dire pourquoi, les autres non plus. L'enseignante laisse momentanément le problème ouvert et passe aux autres points. Là, pas de problème, les élèves sont convaincus que c'est dérivable et que la dérivée vaut -3 sur la demi-droite de gauche et 3 sur la demi-droite de droite. Ils expliquent sans difficulté pourquoi : « C'est un point d'une droite, la tangente est confondue avec la droite ».
L'enseignante revient ensuite au module formel pour gérer le cas laissé en suspens. Elle fait afficher -3sign(-3a+5) en spécifiant a<5/3, mais ceci ne change rien. Vincent le reproduit sur sa machine, tandis que Marianne fait la spécification au niveau de la limite, obtenant le même résultat.





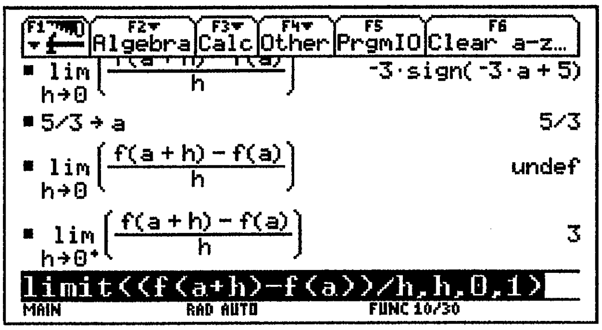
L'enseignante constate que l'on n'est pas plus avancé et leur demande s'ils ont une idée de ce que peut signifier l'expression sign(-3a+5). Un élève dit que cela varie avec le signe, Vincent que ça vaut 1 ou -1, puis précise à la demande de l'enseignante : « 1 quand le signe est positif et -1 quand le signe est négatif ». C'est testé à la machine avec 2 et -2 :

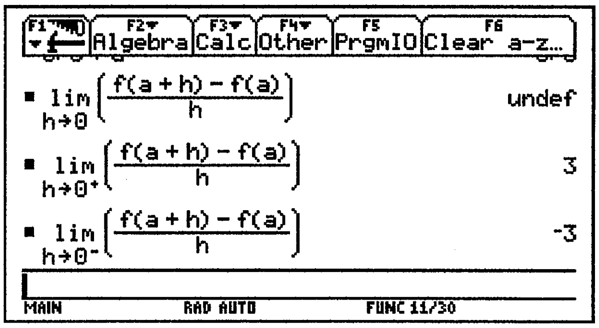


L'enseignante interprète alors la limite donnée par la machine, montrant que l'on retrouve bien les deux valeurs 3 et -3 qu'ils ont conjecturées.

Elle demande ensuite si, à leur avis, il y a une tangente, des tangentes au point d'abscisse 5/3. Des élèves proposent l'axe des abscisses mais tous ne sont pas d'accord car l'axe des abscisses ne colle pas à la courbe. L'enseignante tranche en reprenant cette idée et en rappelant la séance précédente.

Un autre élève dit qu'il y en a deux. L'enseignante reprend cette idée, fait un dessin et introduit la notion de demi-tangente, tout en insistant sur le fait que ces deux demi-tangentes ne sont pas confondues. Un élève demande s'il y a une limite alors. L'enseignante affecte la valeur 5/3 à « a » puis cherche la limite à la machine, obtenant la réponse : *undef*, mais montre que si l'on demande la limite à droite ou à gauche, on obtient un résultat. Tous les élèves reproduisent ceci sur leur machine.





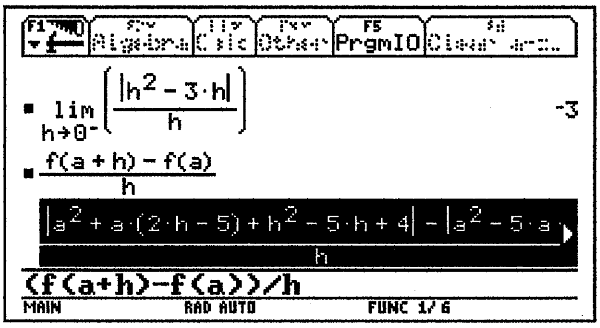
Elle conclut ensuite : « on dira qu'on a une fonction qui est dérivable à gauche, que le nombre dérivé à gauche va être : -3 (valeur donnée par les élèves), qu'elle est dérivable à droite; le nombre dérivé à droite ça va être : 3 (idem). Mais comme ces deux nombres ne sont pas égaux, on dit que la fonction n'est pas dérivable en 5/3. Et ça se traduit comment ? Eh bien ça se traduit par une demi-tangente de coefficient directeur -3 et une demi-tangente de coefficient directeur +3 ».

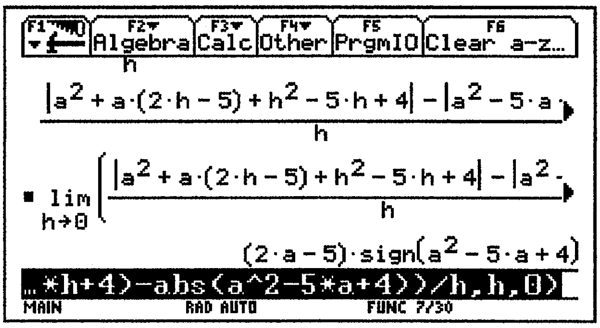
La séance se termine là, les élèves ayant à étudier pour la séance suivante la dérivabilité de la fonction f telle que $f(x)=|x^2-5x+4|$.

Séance 2 : 5 février 97

La séance débute par l'étude collective de la dérivabilité de la fonction introduite à la fin de la séance précédente. Nous suivrons ici plus particulièrement le travail d'Arnaud relié à l'ordinateur.

Visiblement les élèves n'ont pas réussi à résoudre complètement l'exercice. Ils ont le plus souvent fait tracer la courbe, calculé avec la machine le quotient différentiel dans le cas général, cherché sa limite mais été rebutés par la complexité du résultat :



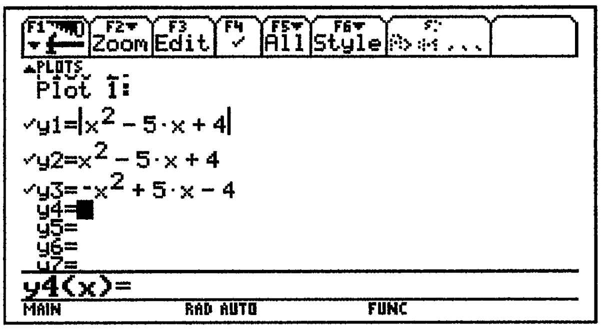


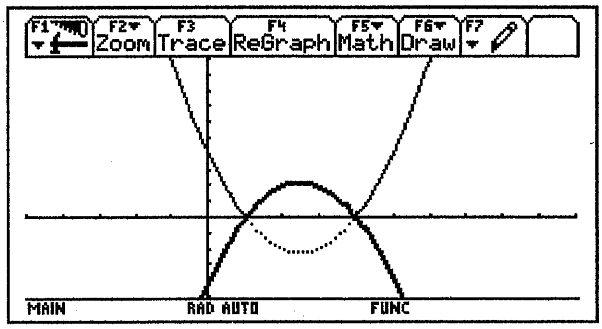
35mn vont être consacrées à cette fonction particulière. L'enseignante suit au départ les propositions des élèves. Elle fait donc tracer la courbe représentative de f, d'abord dans la fenêtre standard puis dans la fenêtre [-10,10]x[-1,10]. Un élève Pierre propose de décomposer la courbe en deux équations, d'autres disent qu'il y a trois morceaux. Pierre, sollicité par l'enseignante, explique le paradoxe apparent en disant que deux morceaux ont la même équation, et que les équations changent à cause de la valeur absolue. Ceci étant précisé, collectivement, les deux équations sont trouvées et leurs intervalles de validité exprimés en fonction des racines de l'équation : 1 et 4, sans difficulté.

L'enseignante propose alors de visualiser graphiquement le changement de signe sur l'intervalle [1,4]. Pour cela elle entre x^2-5x+4 dans Y= et la fait tracer. Les élèves constatent que les deux courbes coïncident en dehors de l'intervalle et sont symétriques sur [1,4].

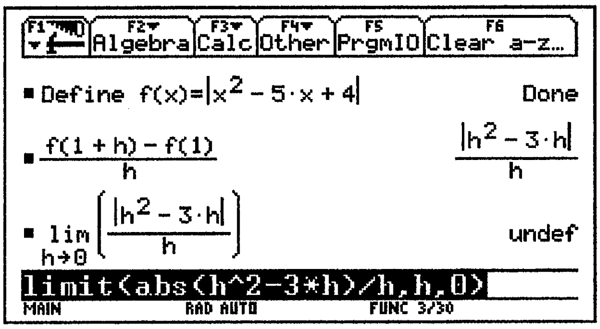
Elle pose ensuite la question de l'existence de tangentes. Visiblement, pour les élèves, l'existence de tangentes en dehors des deux points d'abscisse 1 et 4 va de soi. L'enseignante le justifie en s'appuyant sur les relations de coïncidence et de symétrie avec la parabole tracée qui, on le sait, a une tangente en tout point. Plusieurs élèves disent qu'en revanche la fonction n'est pas dérivable en 1 et 4. L'enseignante commence à réduire l'étude au cas x=1, en faisant remarquer que la courbe admet un axe de symétrie.

Arnaud a pendant ce temps, rentré les différentes fonctions sur la calculatrice :

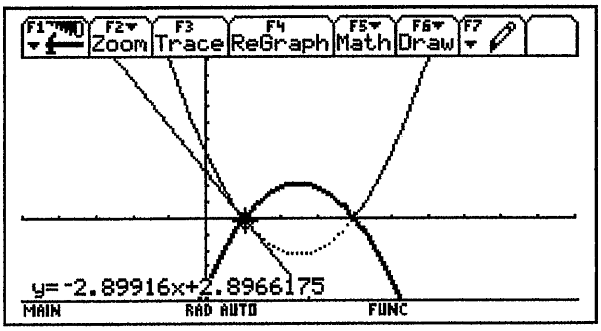


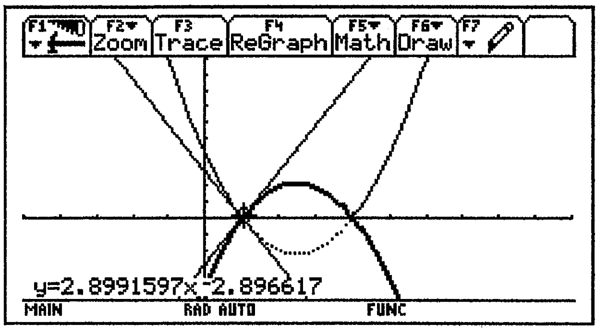


L'enseignante leur demande comment ils ont fait ensuite. Plusieurs élèves disent qu'ils ont calculé la limite à la calculatrice et que ça faisait un truc immense. Elle leur propose de chercher juste en 1. Elle suit leurs instructions et Arnaud reproduit pas à pas ce qu'elle fait à la rétroprojetable, arrivant comme elle à la réponse : *undef.*

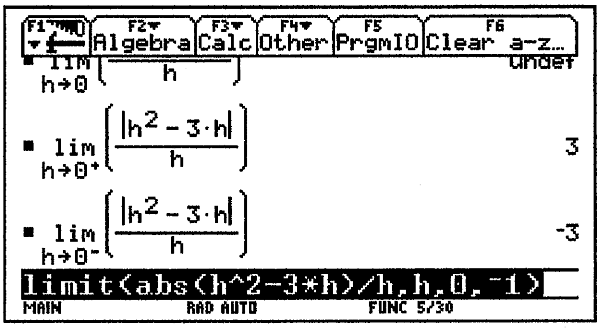


Les élèves ne sont visiblement pas étonnés par le résultat et Arnaud dit tout bas : « c'était prévisible ». L'enseignante leur propose alors de revenir au graphique et de regarder ce qui se passe pour les tangentes au point d'abscisse 1. Arnaud va dans GRAPH et, utilisant deux fois la commande *F5-Tangent* pour les deux paraboles obtient le résultat suivant :





L'enseignante fait, elle retracer les deux paraboles symétriques par rapport à Ox, puis demande aux élèves si elles ont des tangentes au point d'abscisse 1, puis ce qui se passe si l'on s'intéresse à la courbe représentative de la fonction f, c'est à dire si l'on cache la partie correspondant aux y négatifs. Un élève répond qu'il ne reste que des demi-droites. L'enseignante, pour le vérifier, fait tracer la tangente à la première parabole au point d'abscisse 1, obtenant l'équation y=3x-3, puis pour l'autre parabole, obtenant y=3x-3, puis fait le lien entre demi-tangentes et rapprochement du point d'abscisse 1 sous les conditions : x<1 et x>1. Elle repasse ensuite au module formel et leur demande ce qu'elle doit faire pour ne plus obtenir *undef*. Quelqu'un suggère de prendre les limites à gauche et à droite. Elle fait prévoir les réponses avant d'entrer les commandes et obtient sans difficulté les réponses attendues. Arnaud avait en fait anticipé cette dernière partie et déjà obtenu :



L'enseignante fait ensuite expliquer pourquoi il est logique que les deux nombres trouvés soient opposés, puis demande aux élèves de détailler les calculs à la main, en séparant les deux cas possibles. Il n'y a pas un grand enthousiasme. Arnaud consulte son cahier puis écrit : Cinq minutes plus tard, l'enseignante se fait dicter les calculs pour la limite à gauche et conclure. Elle demande ensuite s'il faut refaire les calculs pour la limite à droite. Un élève répond tout de suite que non, car f change juste de signe et qu'on va obtenir donc comme limite 3.

L'enseignante récapitule alors l'ensemble et fait noter :

« La fonction f est dérivable à gauche en 1, et son nombre dérivé à gauche est -3

De même la fonction f est dérivable à droite en 1, et le nombre dérivé à droite est 3.

La courbe de f admet donc au point d'abscisse 1 deux demi-tangentes, l'une de coefficient directeur -3, l'autre de coefficient directeur +3. La fonction f n'est pas dérivable au point d'abscisse 1 car le nombre dérivé à droite et le nombre dérivé à gauche sont .... ». Un élève continue : « opposés ». L'enseignante insiste sur le fait que c'est parce qu'ils sont différents et non parce qu'ils sont opposés que la fonction n'est pas dérivable.

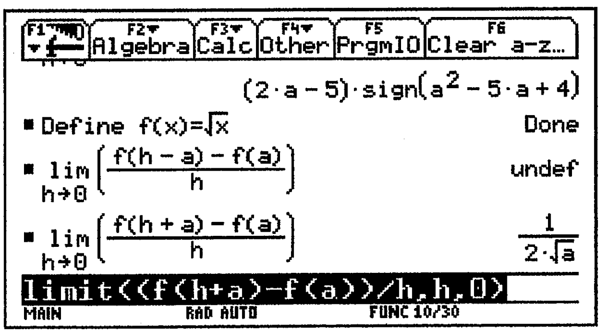
Après avoir rappelé que pour le point d'abscisse 4, la fonction n'est pas non plus dérivable, en raison de la symétrie, elle passe ensuite à la preuve formelle dans le cas général. Les élèves, une fois de plus, dictent les manipulations à faire sur la TI92 rétroprojetable et très vite, la classe arrive à l'expression (2a-5)sign(a^2-5a+4) qu'un certain nombre d'élèves avait déjà obtenue. Cette expression n'est toujours pas parlante et l'enseignante va devoir les aider à en faire l'analyse en faisant rappeler les valeurs prises par la fonction sign, pour trouver les valeurs 2a-5 et -2a+5 du nombre dérivé suivant la valeur de a par rapport à 1 et 4.

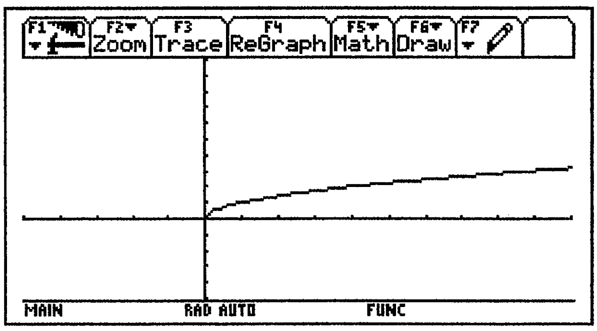
Finalement, tout est récapitulé au tableau :

	nombre dérivé en a
Si a<1	2a-5
1<a<4	-(2a-5)
a>4	2a-5
en a=1	nbre dérivé à gauche : -3
	nbre dérivé à droite : +3
en a=4	nbre dérivé à gauche : -3

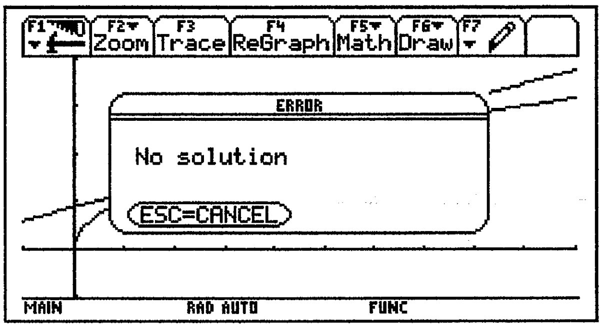
L'enseignante fait en même temps contrôler graphiquement les valeurs données par symétrie pour x=4 et termine cette étude par un petit commentaire général sur les fonctions où interviennent les valeurs absolues.

On passe ensuite à la fonction f définie par f(x) = $\sqrt{x}$, comme prévu. Les élèves peuvent utiliser la machine, précise-t-elle, et ensuite on essaiera de retrouver le même résultat à la main. Arnaud définit la fonction dans HOME, demande un calcul de limite mais obtient *undef* car il a fait une erreur de signe dans l'entrée. Il fait alors tracer la fonction, regarde attentivement le graphe, repasse en HOME, repère son erreur et obtient la valeur du nombre dérivé en a :

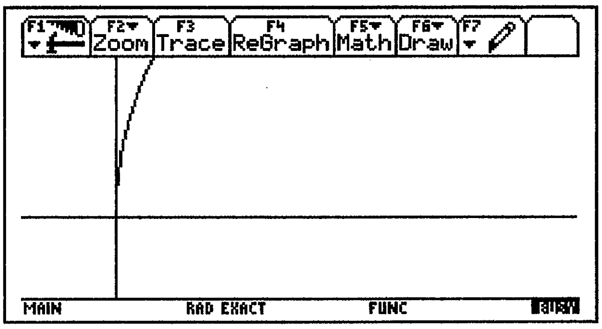




Visiblement, les élèves ne rencontrent pas ici de problème et assez vite, l'enseignante fait un bilan collectif. Elle fait tracer la courbe représentative dans la fenêtre [-1,10]x[-1,4], les élèves disent que c'est dérivable en a si a est positif ; l'enseignante fait alors tracer la tangente au point d'abscisse 3 en insistant sur le fait que l'expression donnée est une expression approchée, avant de poser la question de savoir si elle peut faire tracer comme cela des tangentes partout. Un élève dit qu'il y a un problème en 0. L'enseignante demande alors la tangente en 0 obtenant l'écran suivant :

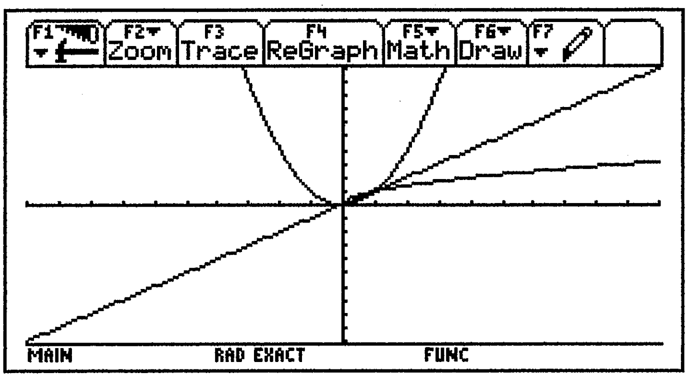


L'enseignante propose de zoomer autour de l'origine pour voir un peu mieux ce qui s'y passe. Elle prend en fait la fenêtre [-.1,.5]x[-.1,.2] et obtient ceci :



A sa place, Arnaud, lui, utilise les commandes *Zoombox* et *ZoomIn* pour ajuster son tracé. Plusieurs élèves disent qu'on dirait quand même qu'il y a une tangente l'axe des ordonnées. L'enseignante demande si cet axe des ordonnées a un coefficient directeur, puis en faisant rappeler l'expression du coefficient directeur comme quotient b/a, obtient sans difficulté le fait que lorsque a tend vers 0, ce coefficient directeur tend vers plus ou moins l'infini suivant le signe de a.

Elle fait ensuite le rapprochement avec la parabole d'équation $y=x^2$, en demandant la nature de la courbe tracée. Plus répondent que c'est une portion, une moitié de parabole. Elle introduit alors la parabole mentionnée ci-dessus, fait préciser sa tangente à l'origine, puis demande comment géométriquement, on passe de la courbe représentative de la fonction racine carrée à cette parabole, en précisant que l'on a changé x en y et y en x. Un élève propose d'abord une rotation, proposition qu'elle écarte en disant qu'une rotation qui transforme x en y, transforme y en -x, et très vite la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice sort. L'enseignante la visualise à la machine, en passant en *ZoomSqr,* pour avoir un repère orthonormé, en traçant la parabole et la première bissectrice :



Elle exploite ensuite cette symétrie pour justifier la conjecture faite d'existence d'une tangente verticale à la parabole symétrique à l'origine, donc d'une demi-tangente verticale à la courbe représentative de la fonction racine carrée qui, elle, n'est définie que pour x positif.

Elle passe ensuite au module de calcul formel, leur demandant ce qu'ils ont trouvé comme expression du nombre dérivé en a, et en leur faisant préciser le domaine de validité de cette expression, non indiqué par la machine. Ceci ne pose pas de problème.

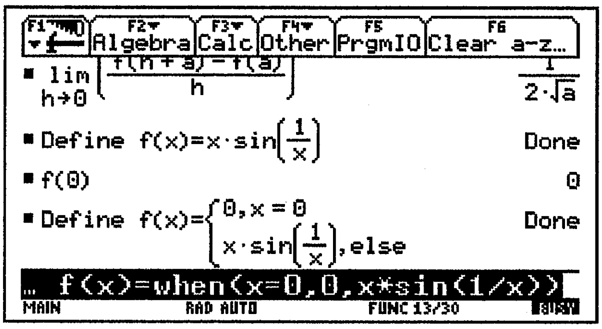
Le calcul à la main est fait ensuite collectivement. Elle fait mettre en évidence l'indétermination puis présente la technique de multiplication par la quantité conjuguée, qu'ils ont déjà utilisée à d'autres occasions, comme une technique qui permet de lever l'indétermination dans ce type d'expression. Ensuite, l'ensemble des résultats obtenus est récapitulé et noté. Et l'enseignante fait bien remarquer que dans ce cas, il n'y a pas dérivabilité mais il y a cependant une demi-tangente verticale.

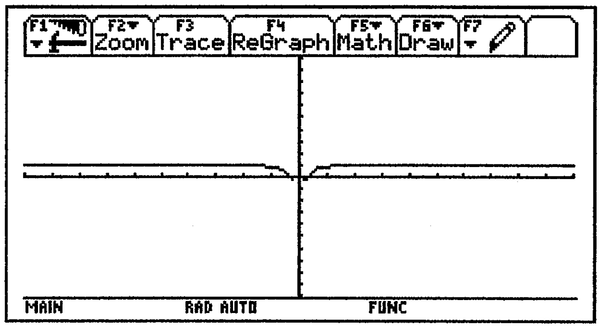
C'est la pause.

Après la pause, est introduite la dernière fonction qu'il était prévu d'étudier dans ce scénario,

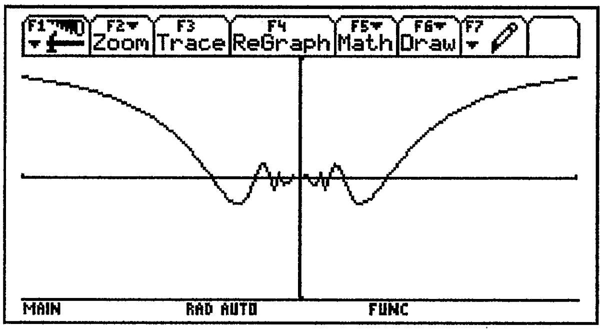
la fonction définie par :

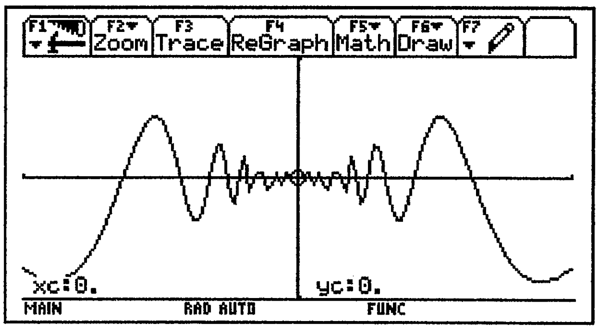
L'enseignante explicite la syntaxe de définition par cas qu'ils rencontrent pour la première fois. Arnaud qui avait tout de suite entré la fonction sans distinguer les deux cas et vérifié que la valeur en 0 donnée était bien 0, n'intervient pas et rectifie sa définition puis fait tracer dans la fenêtre standard :

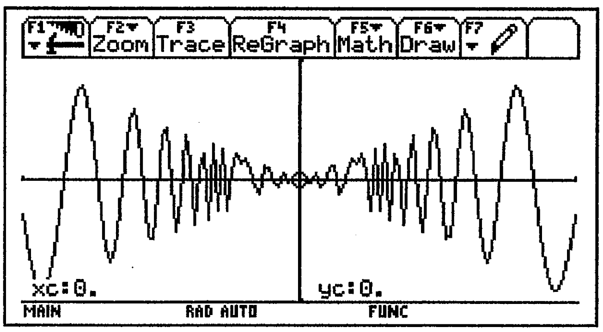


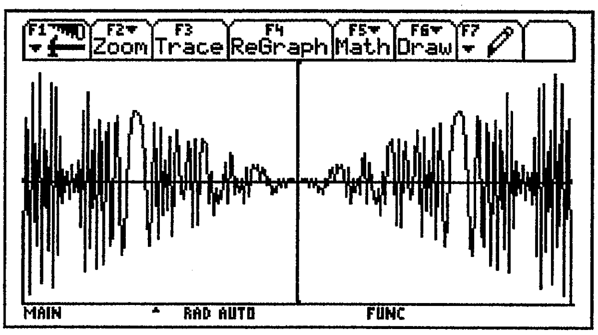


Il se place ensuite dans la fenêtre [-1,1]x[-1,1], avant de faire des *ZoomIn* autour de 0 avec xres=1 au lieu de 2, comme le conseille l'enseignante.







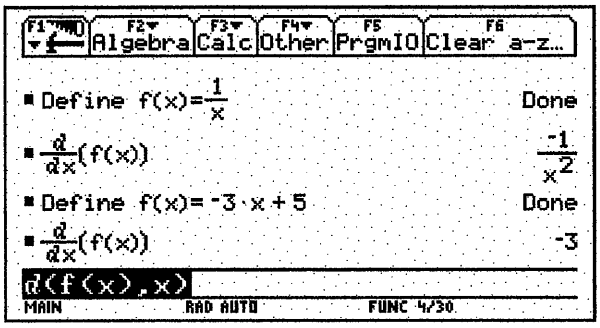


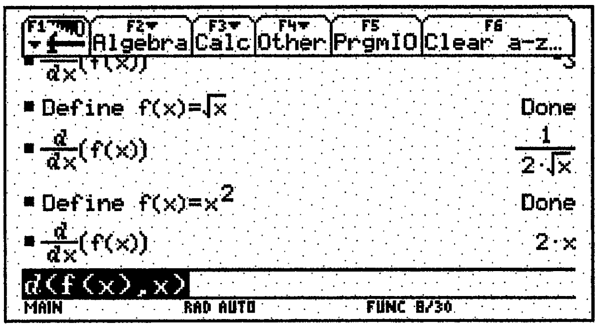
Les élèves en fait sont frappés par les oscillations mais tout autant par la symétrie de la courbe. L'enseignante fait prouver la parité, puis elle fait remarquer qu'au fil des zooms successifs dans ce cas, on ne voit pas la courbe autour de 0 devenir de plus en plus droite comme dans les cas où il existait une tangente. Elle fait examiner ce qui se passe pour le sinus et l'expression globale lorsque x tend vers 0, puis conclut qu'effectivement cette fonction n'est pas dérivable en 0.

Elle repasse en HOME, leur montre que la TI92 donne bien 0 comme limite en 0 et conclut cette phase par : « Donc j'ai une fonction qui est définie en 0, qui a une limite en 0 qui est égale à f(0), mais qui n'est pas dérivable en 0. Donc toutes les fonctions ne sont pas dérivables partout. Il y a des fonctions qui ne sont pas dérivables en certains points, et puis vous verrez après quand vous serez en fac qu'il y a des fonctions qui ne sont dérivables nulle part. Mais nous celles qu'on va étudier cette année ce sera exceptionnel qu'elles soient pas dérivables. Les fonctions pas dérivables qu'on va rencontrer, ce sera des fonctions qui seront pas dérivables en des points particuliers, c'est-à-dire dans l'exemple de celles qu'on vues $|-3x+5|$ au point d'abscisse 5/3; $\sqrt{x}$ au point d'abscisse 0; $|x^2-5x+4|$ aux points d'abscisses 1 et 4, d'accord ? Donc on a vu des fonctions qui étaient dérivables partout, des fonctions qui étaient dérivables presque partout sauf en certains points. »

Les dernières 20mn de la séance vont être consacrées à l'introduction de la notion de fonction dérivée et à l'introduction de la commande de dérivation formelle de la calculatrice. Après introduction de la notion de fonction dérivée, les résultats déjà obtenus sont tous reformulés dans le nouveau langage (cf. résumé de cours). Ceci prend une dizaine de minutes. Puis l'enseignante revient à la calculatrice, introduit la commande de dérivation formelle et fait remarquer aux élèves la notation adoptée par la machine, différente de celle qu'elle a introduite. Elle précise qu'il s'agit d'une notation différentielle, souvent utilisée en mécanique et en physique et profite de l'occasion pour leur dire qu'en physique, on utilise aussi des notations avec des points, lorsque la variable est le temps et que l'on travaille avec des vitesses et des accélérations. Quelques uns disent avoir déjà vu ces notations.

Ensuite, elle leur demande de faire fonctionner la commande formelle sur les exemples déjà étudiés et de vérifier qu'ils retrouvent bien les résultats déjà établis. Arnaud, à son habitude, a déjà commencé à le faire et a obtenu les deux écrans suivants :





L'enseignante, après avoir circulé dans la classe, précise que s'ils n'ont pas défini la fonction ils peuvent demander la dérivée par exemple, en tapant : $d(\sqrt{x},x)$ pour la fonction racine, mais qu'ils doivent bien faire attention que, ce que leur renvoie la machine, dans tous les cas, c'est le nombre dérivé en x, c'est l'image de x par la fonction dérivée. S'ils veulent travailler avec la fonction dérivée, ils doivent la définir comme fonction.

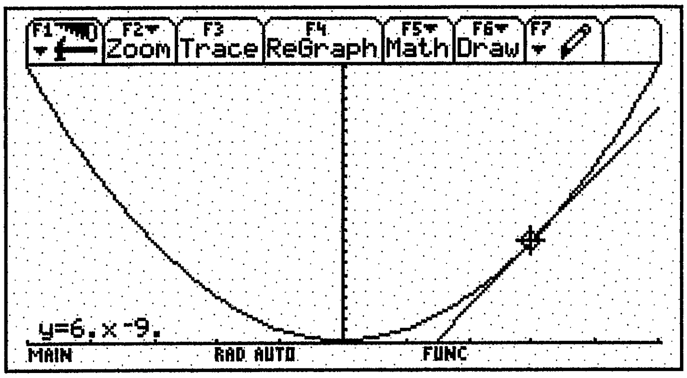
Elle demande ensuite : « à la main, si vous dérivez la fonction qui à x associe ax+b, qu'est-ce que vous allez obtenir ? ». Les élèves hésitent. Quelques « a » timides sortent mais le doute semble planer. L'enseignante repose la question et leur demande de laisser de côté la calculatrice pour l'instant. Un élève propose la fonction x→ x, visiblement il n'y a pas accord, puis un autre dit : y=a et l'enseignante reformule de façon fonctionnelle, puis leur demande de vérifier à la calculatrice (Arnaud avait déjà fait le calcul dès qu'elle avait posé la question initiale). Elle demande ensuite, toujours sans machine, de prévoir quelle est la dérivée d'une fonction constante. Là encore il y a des flottements et l'enseignante fait détailler le raisonnement en passant par la tangente cette fois. Chacun vérifie sur sa machine et ensuite l'enseignante fait faire le calcul à la main. la séance se termine là.

Analyse :

Séance 1 :

Les 35 premières minutes de cette séance ont été réservées à la phase correspondant à la définition du nombre dérivé et se sont déroulées totalement en collectif et sans recours à la machine. Avant l'institutionnalisation du nombre dérivé et du lien avec la tangente, les élèves ont participé activement aux calculs bien que M. soit intervenue pour rappeler l'objectif des transformations et mettre en évidence le caractère opérationnel de l'égalité "$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$=m" par rapport aux formulations antérieures qui nécessitaient de tester des valeurs de m. Ceci permet en effet de déterminer m par un calcul et libère l'élève du travail de conjecture qui était indispensable jusque là pour cette recherche. Après ladite institutionnalisation, l'étape concernant l'approximation affine semble avoir posé des problèmes aux élèves. En effet, le jeu exclusivement formel dans lequel s'est inscrite cette étape via l'introduction de la fonction φ n'a sans doute pas aidé à donner du sens à ce passage. Ceci est d'autant plus vraisemblable que les élèves ne semblaient pas voir le lien avec le cadre géométrique, ce qui aurait pu être évité peut-être par l'enseignante en utilisant successivement des zooms (sur la rétroprojetable), au voisinage du point considéré. En fait, cela reviendrait à reprendre le point de vue b) et se traduirait graphiquement par une linéarisation locale. Par ailleurs, nous pouvons nous interroger légitimement sur l'intérêt que peut représenter pour les élèves, à ce moment de l'apprentissage, le fait d'approcher des courbes par des droites. Ceci intervient comme l'explication d'un phénomène graphique mais n'est pas relié à la résolution de problèmes comme cela pourra l'être le cas plus tard lors de la sixième phase prévue dans l'ingénierie, et qui concerne l'approche cinématique de la notion de dérivée. Les élèves seront alors obligés de passer par une linéarisation locale pour résoudre le problème de vitesse qui leur est proposé.

Dans la deuxième partie de cette séance, le déroulement est globalement conforme aux prévisions. Le jeu construit entre prévisions et vérifications, travail p/c et travail-machine, que ce soit dans le registre graphique ou formel, semble fonctionner correctement pour la majorité des élèves. Soulignons néanmoins quelques passages qui nous ont paru assez significatifs. Ainsi, pour la première fonction $x \to x^2$, l'enseignante a fait tracer dans la même fenêtre la courbe représentative de la fonction et la droite tangente recherchée, mais en utilisant l'ostensif graphique *F5-Tangent.* Ceci s'est traduit par l'affichage simultané de l'équation de ladite tangente avant même que les élèves n'aient fini, dans une phase de travail individuel, de chercher cette équation en suivant une démarche formelle.

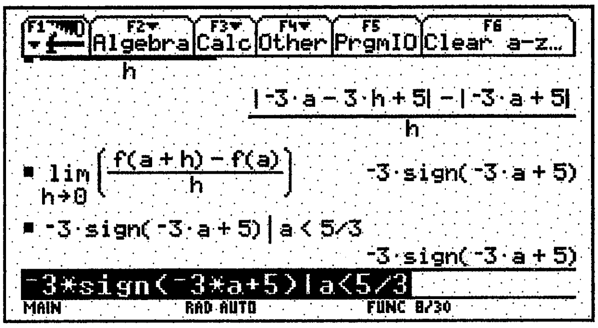


Dans la mesure où M. n'a pas eu de discours pour accompagner cette visualisation, et dans la mesure où l'équation affichée correspond bien à celle recherchée, nous pensons que cette gestion du graphique tend à installer la confusion chez les élèves. D'une part, sur le plan de l'*instrumentation*, où les élèves risquent de penser que l'ostensif *F5-Tangent* permet de donner systématiquement l'équation de la tangente à une courbe en un point. D'autre part, sur le plan de l'*instrumentalisation*, pour ce qui est du statut même de l'application graphique qui aurait ici le rôle d'un outil de résolution, aux dépens des techniques formelles qui sont visées par cette activité.

Pour ce qui est de la deuxième fonction $x \to -3x+5$, signalons que les élèves, très majoritairement, ne paraissent pas gênés par le fait que la tangente se confonde avec la courbe au lieu de la couper en un seul point, ce qui ne correspond pas aux résultats de recherches telles que celle de [Castela, 1995] par exemple. En revanche, nous pouvons penser que ce même fait (*la tangente se confond avec la courbe en tout point*) pourrait entraîner certains vers une globalisation erronée de ce caractère local. Ainsi, l'unicité de l'objet "*tangente*" en tous les points pourrait favoriser l'assimilation graphe de la fonction dérivée / graphe de la tangente.

Pour ce qui est de la quatrième fonction $x \to |-3x+5|$ qui a été choisie par M. au lieu de la fonction de référence valeur absolue, la perturbation a été double. D'une part, à cause de la présence d'une valeur absolue, ce qui confirme les difficultés bien connues des élèves dans la gestion des valeurs absolues. D'autre part, parce que c'est la première situation de non dérivabilité où apparaissent des demi-dérivées et des demi-tangentes. A travers le problème du repérage graphique de la non-dérivabilité, nous retrouvons encore une fois (et ce ne sera pas la dernière) le manque de fonctionnalité du lien fonction dérivable en un point / fonction dont le graphe est localement presque affine (ce qui pourrait se traduire par le fait qu'il n'y ait pas de *point anguleux*, ou encore de manière plus perceptive, par le fait que le graphe soit *lisse* au voisinage du point considéré). Cette situation aurait pu constituer une occasion intéressante pour une institutionnalisation locale de la visualisation de la dérivabilité (et de la non-dérivabilité), et une technique par zooms successifs aurait pu être installée, par exemple. En fait, nous voyons ici que le travail sur le phénomène de linéarisation locale a servi davantage à questionner l'unicité qu'il n'a été investi comme moyen de reconnaissance graphique de la dérivabilité, même si ce moyen est nécessairement partiel en raison des limites aux caractéristiques graphiques de la machine.

Ceci dit, nous pouvons penser que les nécessités requises par le travail dans le registre formel ont fortement influencé le déroulement de cette étape. En effet, l'utilisation de la machine pour étudier la dérivabilité de cette quatrième fonction s'est accompagnée de l'introduction d'un nouvel ostensif, *sign* qui apparaît dans les calculs formels effectués dans l'application HOME. Cette introduction est d'autant plus importante qu'elle permet d'interpréter les résultats qu'affiche la machine et de comprendre le sens des calculs.



Sur le plan instrumental, comme nous le voyons ci-dessus l'ostensif " **|** " a été mis en œuvre pour restreindre les intervalles où la dérivabilité est étudiée. Par ailleurs, les tracés ont été effectués à la rétroprojetable en *ZoomStd* et l'enseignante a utilisé l'ostensif *Trace* pour une lecture graphique des coordonnées du point où la quatrième fonction n'est pas dérivable.

Séance 2 :

Cette séance a débuté par l'étude de la dérivabilité de la cinquième fonction $x \to |x^2-5x+4|$. Cette étude a duré une trentaine de minutes, et c'est l'enseignante qui a pris en charge presque tout le travail bien qu'il soit prévu que cette étape soit dévolue aux élèves. Ceci nous paraît d'ailleurs raisonnable si l'on tient compte :

- D'une part, de la complexité du problème ainsi que des calculs et des argumentations nécessaires pour une bonne résolution, bien que le cas de la valeur absolue ait déjà été traité dans la séance précédente.
- D'autre part, des changements introduits par M. dans le déroulement prévu, où elle a introduit le cadre géométrique en se basant sur la notion de symétrie, la propriété de tangence étant implicitement considérée comme conservée par symétrie.

M. a ainsi pris en charge le changement de cadres (en institutionnalisant même le lien géométrique / algébrique dans le cas des "fonctions avec valeurs absolues") ainsi que l'articulation entre le travail p/c et le travail-machine. Néanmoins, les élèves sont intervenus

pour piloter les calculs ainsi que pour repérer les points de non dérivabilité, ce qui ne leur a d'ailleurs pas posé de problème bien qu'ils n'aient pas de moyen pour caractériser graphiquement lesdits points. Ceci peut être dû à la ressemblance avec la fonction précédente (dans les deux cas, les points remarquables sont ceux qui annulent la fonction).
Soulignons par ailleurs l'utilisation presque systématique par M. de l'ostensif graphique *F5-Tangent* pour le contrôle de la dérivabilité, que ce soit pour la cinquième ou la sixième fonction. Cette utilisation n'a été accompagné de discours qu'une seule fois :

M: . . . et on a une tangente pour laquelle la machine nous dit qu'une équation approchée c'est -3x+3

Comme ici cette équation correspond exactement à celle qui est recherchée, l'ambiguïté sur le statut de cet ostensif, déjà mentionnée lors de la séance précédente, nous semble entretenue et risque de le rester tant qu'il n'y aura pas d'institutionnalisation (locale) sur le statut et les limites de cet ostensif.
Concernant la répartition du travail entre la machine et le p/c, il nous semble que le temps réservé au travail-p/c pour la cinquième fonction pourrait être économisé, dans la mesure où les calculs à effectuer ne répondent pas à une nécessité par rapport aux objectifs de cette séance. Par contre, le recours au cadre géométrique (qui n'était pas prévu dans le scénario) nous semble intéressant parce qu'il pourrait offrir l'occasion d'installer des techniques graphiques pour repérer et contrôler la non dérivabilité, ainsi que des institutionnalisations concernant les ostensifs graphiques utilisés tels que *F5-Tangent* ou les zooms, par exemple.
En ce qui concerne la dernière partie de cette séance où la notion de fonction dérivée a été introduite, tout semblait bien fonctionner jusqu'au moment où a été traité le cas d'une fonction affine. La perturbation observée chez les élèves nous semble être une conséquence de la formulation déjà citée dans notre analyse de la séance précédente : "*la tangente se confond avec la courbe*". Nous pouvons penser que cette phrase a induit l'idée que la fonction (affine) et sa fonction dérivée coïncident.
Enfin, sur le plan purement instrumental, M. a utilisé le cadrage manuel (deuxième niveau de connaissances-machine) pour améliorer l'affichage à la rétroprojetable, notamment quand il était question d'étudier la dérivabilité en un point (par exemple, pour la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$ en x=0 et surtout de la fonction $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ en x = 0 en combinant *ZoomIn* et des changements de [xmin,xmax]x[ymin,ymax] ainsi que de *xres :*

ou encore pour restreindre le domaine des y aux nombres positifs (quand la fonction est une valeur absolue). Nous voyons ainsi que l'investissement du deuxième niveau de connaissances-machine est piloté par des objectifs d'ordre mathématique.

Par ailleurs, M. a utilisé l'application GRAPH essentiellement pour conjecturer sur la dérivabilité, en mobilisant certains ostensifs tels que *F5-A-Tangent* ou *ZoomSqr* (cette dernière commande qui fournissait un repère orthonormé a été utilisée pour montrer que les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto x^2$ étaient symétriques par rapport à la première bissectrice).

L'application HOME, quant à elle, a eu pour fonction soit l'aide à la conjecture (par l'utilisation de la commande *d(..,x)* qui a été introduite à cette occasion, ou encore de *limit*), soit la consolidation de conjectures (pour le calcul de la dérivée d'une fonction affine, M. s'est adressée aux élèves ainsi : *"Vous ne prenez pas les machines pour l'instant, on devine d'abord . . . on réfléchit, on fait fonctionner un peu ses méninges, on vérifie à la calculatrice ensuite"*), tandis que pour fournir une preuve de leurs conjectures, les élèves ne devait pas utiliser la machine (*" . . . on va le vérifier (*parlant d'une des conjectures) *à la machine puis on va le démontrer* (tout en indiquant le tableau)").

Signalons que la présence de la fonction $x \to \begin{cases} 0, x = 0 \\ x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{cases}$ a été l'occasion pour M. d'introduire *when* et sa syntaxe. Par ailleurs, M. s'est attardée sur le lien entre la notation *d(. .,x)* et la notion de fonction dérivée. (*"Alors regardez la notation de la machine . . . alors ce que nous, nous appelons f'(x), la machine le note* $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x)$ *. . . la notation de la calculatrice s'appelle la notation différentielle . . . faites bien attention entre ce qui est la fonction et ce que nous renvoie la machine qui est en fait un nombre; c'est le nombre dérivé, c'est l'image de x par la fonction dérivée. Faites très attention."*)

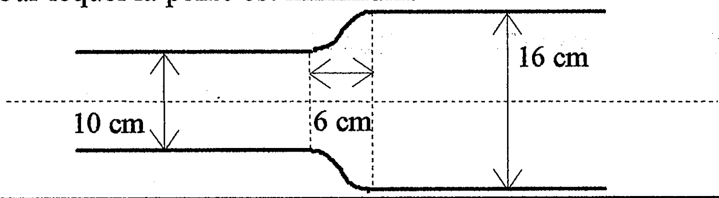
Observation 6 : Recherche de fonctions sous contraintes : le raccord de tuyaux (juin 1997)

Le problème dont le texte est donné ci-après a été proposé aux élèves de la classe A en fin d'année, le 6 juin, lors d'une séance de 2 heures. Il s'agit d'un problème de recherche de fonctions sous contraintes qui s'inscrit dans la dimension « outil » de la notion de dérivée.

PROBLEME DE RACCORD

On veut raccorder deux tuyaux représentés en coupe dans la figure ci dessous.
Le raccord est engendré par la rotation d'une courbe autour de l'axe des tuyaux. Cette courbe doit être tangente aux deux tuyaux aux points de jonction et ne doit nulle part changer brusquement de pente.

Le but de l'exercice est de trouver de tels raccords et de choisir, parmi ceux que l'on aura trouvé celui pour lequel la pente est minimum.



Objectifs et scénario

Il s'agit de faire travailler les élèves sur un problème se modélisant en termes de recherche de fonctions sous contraintes, les contraintes faisant intervenir à la fois les valeurs de la fonction et de sa dérivée. Le problème est proposé sans indication de modélisation, dans le contexte de la situation. Il admet des solutions diverses, même en se limitant aux fonctions connues des élèves de ce niveau, et un critère d'optimisation est donné : « minimum de la pente » qui devra sans doute être explicité puisque ce que l'on vise ici, c'est en fait la minimisation du maximum de la pente sur l'intervalle considéré. De plus, la modélisation fonctionnelle passe ici par le choix d'un repère. Si nous considérons la courbe dessinée dans la partie supérieure du schéma fourni, deux repères semblent bien adaptés au problème : le repère R1 dont l'axe des abscisses est parallèle à l'axe des tuyaux et l'origine au début du raccord, le repère R2 dont l'axe des abscisses est lui aussi parallèle à l'axe des tuyaux mais dont l'origine se trouve au milieu du segment déterminé par les deux points de raccord. Suivant le repère choisi, les contraintes fournies vont s'exprimer de façon différente et les élèves vont être confrontés, pour un même raccord, à des calculs différents et à des expressions fonctionnelles différentes. Il sera alors intéressant de vérifier graphiquement qu'il s'agit bien du même raccord, puis de chercher une justification analytique, en étudiant comment le changement de repère affecte l'expression fonctionnelle, de comparer également l'économie des calculs suivant le type de repère choisi.

Même si les élèves sont dans un premier temps tentés par une stratégie d'ajustement par essais successifs de fonctions, les tracés étant aisés à la calculatrice, il y a très peu de chances qu'une telle stratégie aboutisse, compte tenu de la nature des contraintes données. Il est prévu de ne pas laisser les élèves s'enfermer dans cette voie et, pour cela, après une première phase de recherche en binômes :

de faire exprimer par les élèves, collectivement, les types de raccord qu'ils envisagent (nous pensons voir apparaître des raccords avec des morceaux de paraboles, les élèves ayant déjà rencontré ce type de raccord dans la séance d'introduction de la notion de vitesse instantanée, et peut-être aussi des raccords de type sinusoïdal ou cubique),

de décider avec eux de commencer à travailler sur un type donné de raccord et de les aider, si nécessaire, à modéliser fonctionnellement la situation, avant de les engager dans une deuxième phase de recherche en binômes qui sera conclue par un bilan où sera gérée collectivement la recherche du maximum de la pente pour le type de raccord considéré.

Dans une quatrième phase de la séance, il est prévu d'envisager un second type de raccord, en leur laissant cette fois une autonomie complète dans la résolution. Cette phase conduira elle aussi à un bilan où le choix entre les deux raccords sur la base du critère de pente sera traité collectivement, même s'il n'a pas été abordé par les binômes dans la phase de recherche.

A l'issue de cette quatrième phase, il est prévu d'introduire un troisième type de raccord si cela n'a pas été fait spontanément et de leur demander de résoudre le problème correspondant hors classe.

Déroulement

L'enseignante distribue le texte encadré ci-dessus et conseille aux élèves de travailler en binômes. Vincent est l'élève dont les écrans sont enregistrés.

Assez vite, elle va intervenir car un élève dit qu'il ne comprend pas très bien ce qu'on lui demande. L'enseignante commente le texte puis trace au tableau deux raccords : un raccord zigzaguant et un raccord droit en demandant si ces raccords respectent les conditions fixées. Les élèves répondent que non, plusieurs précisant qu'il n'y a pas tangence. Un élève propose d'arrondir un petit peu le raccord droit et Vincent propose, quant à lui, de prendre une courbe en x^3. Quand l'enseignante lui demande d'expliquer pourquoi, il répond qu'une partie de la courbe pourrait ressembler à ce dont ils ont besoin. Nicolas rajoute que ça pourrait marcher parce qu'il y aurait un maximum et un minimum. L'enseignante utilise le rétroprojecteur pour visualiser ceci avec une cubique déjà tracée sur papier quadrillé, en marquant les tangentes horizontales aux deux points de raccord, nommés A et B.

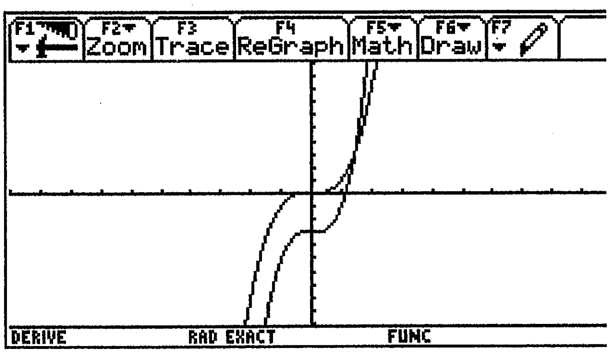
Elle demande ensuite aux élèves pourquoi ils sont passés directement d'un segment, c'est à dire de la courbe représentative d'une fonction affine à une fonction du troisième degré. C'est Marianne qui lui répond qu'avec une parabole, elle ne pourrait pas avoir deux tangentes horizontales. Un élève rajoute que ce serait peut-être possible avec deux paraboles. L'enseignante visualise cette seconde proposition en rétroprojetant deux paraboles, ayant leurs sommets respectifs en A et B et se raccordant entre ces deux points.

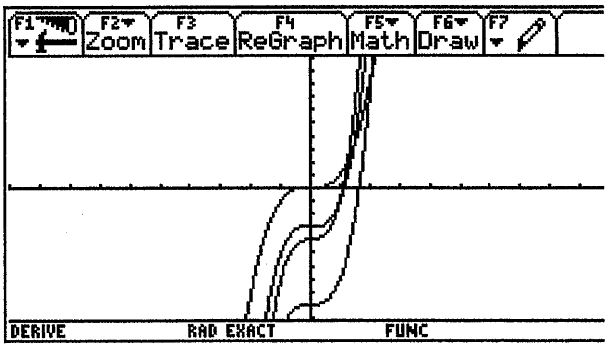
Elle demande ensuite s'ils ont d'autres suggestions à faire et un autre élève propose de prendre des fonctions sinus ou cosinus. L'enseignante, là encore, projette un morceau de sinusoïde qui assure le raccord, en les assurant que c'est bien un morceau de sinusoïde qu'elle a tracé.

Ces trois types de raccords ayant été envisagés, elle leur demande par quel type ils veulent commencer la recherche, lequel leur paraît le plus simple. C'est le raccord cubique qui l'emporte nettement et il est donc décidé de commencer par ce type de raccord. Une dizaine de minutes se sont en fait écoulées depuis le début de la séance et l'enseignante lance la phase de recherche individuelle, sans entrer plus avant dans la modélisation fonctionnelle.

Quelques élèves, dont Vincent, vont d'emblée écrire l'expression générale d'une fonction du troisième degré et commencer à écrire des conditions. Vincent, sans le préciser, a choisi un repère de type R1 mais travaille en millimètres puisque les premières conditions écrites sont : $f(0)=0$ et $f(60)=30$. Il conclut tout de suite que le terme constant est nul puis passe au calcul de $f(60)$ à la main.

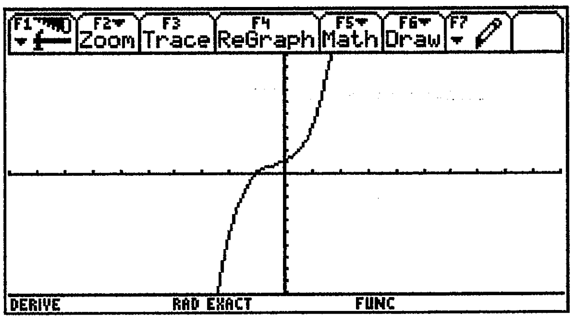
Mais beaucoup d'élèves font des essais à partir de x^3, avec leur calculatrice. Amandine par exemple entre successivement dans Y= les expressions : x^3, $2x^3$-3, $2x^3$-9, $3x^3$-4 et les fait tracer.





Elle déclare qu'il faut qu'elle arrive à faire quelque chose de « moins abrupt, de moins raide ». Jérôme appelle l'enseignante, en lui disant qu'avec x^3, il n'arrive pas à avoir de maximum et de minimum. L'enseignante répercute la question au niveau collectif. Elle entre la fonction dans Y= et la fait tracer en *ZoomSdt* puis demande s'il y a, comme l'avaient dit Vincent et Nicolas un maximum et un minimum. Les élèves répondent que non, que la fonction est toujours croissante. l'un d'eux propose de diviser x^3 par un entier. L'enseignante fait remarquer que cela ne va pas changer le sens de variation.

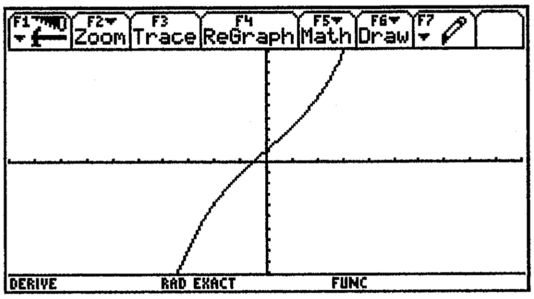
Vincent, perplexe, fait tracer x^3+x^2+x+1 :



L'enseignante insiste sur le fait que la dérivée peut s'annuler, comme c'est le cas pour x^3, sans qu'il y ait pour autant un maximum ou un minimum et elle pose la question de savoir si, finalement, on peut obtenir un maximum et un minimum avec une fonction du troisième degré.

Les avis sont maintenant partagés. Certains proposent d'abandonner les cubiques pour les paraboles. L'enseignante ne les suit pas et revient à la question initiale. Vincent suggère de prendre ax^3+bx^2+cx+d et de regarder la dérivée. L'enseignante lui demandant de préciser, il ajoute que, comme elle est du second degré, elle peut s'annuler deux fois. L'enseignante reprend aussitôt qu'effectivement comme elle est du second degré, soit il n'y a pas de racines et elle reste de signe constant, soit il y a une racine double, soit il y a deux racines et c'est donc vraisemblablement possible d'avoir un maximum et un minimum. Et elle relance le travail en binômes.

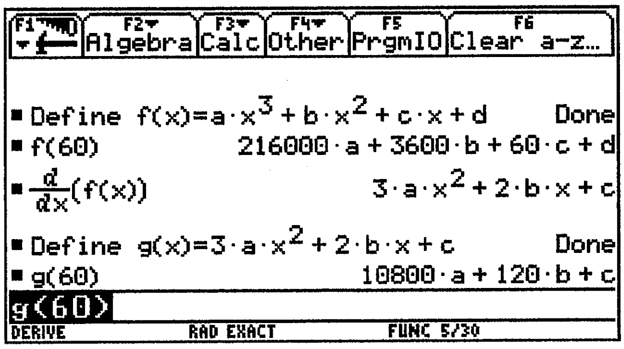
Beaucoup d'élèves se relancent dans des essais à la calculatrice, Amandine par exemple, essaie $0.1x^3+2x+1$:



Voyant cela, l'enseignante réintervient assez rapidement, en soulignant que s'ils cherchent de façon complètement empirique des fonctions du troisième degré, ils risquent d'y passer du temps... Elle ajoute que, s'ils veulent chercher des fonctions, il faut qu'ils choisissent un repère.

Elle circule dans la classe puis au bout d'un moment fait le point collectivement sur la question du choix du repère. Pierre explique le premier qu'il a pris un repère vertical, en mettant A en bas et B en haut, il fait le geste de tourner la feuille. L'enseignante dit qu'elle préfère qu'on laisse le tuyau horizontal comme il l'est initialement. Grégory ensuite propose de choisir le point A comme origine. Ce choix du repère R1 est le choix majoritaire mais quelques uns ont choisi le repère R2 et le disent. L'enseignante laisse les élèves libres de choisir un des deux repères et annonce qu'ensuite ils discuteront les avantages et les inconvénients des deux méthodes.

Elle guide ensuite l'expression des contraintes. Précisons que Vincent a de son côté avancé dans la recherche, écrivant que $f'(0)$=c. Il calcule maintenant $f'(60)$. Il vérifie ensuite ses calculs à la machine :



L'expression des contraintes ne pose pas de problème au niveau des valeurs prises par la fonction, mais la classe peine davantage sur les contraintes qui se traduisent par des valeurs de la dérivée. Ils formulent en effet sans problème la contrainte en termes d'équation de la tangente mais la reformulation en termes de valeur de la dérivée nécessite l'aide de l'enseignante. L'extrait suivant l'illustre bien :

P. : « D'accord les coordonnées de A vérifient l'équation donc $f(0)=0$ et qu'est-ce que l'on doit avoir de plus en A ? »

Plusieurs élèves : « une tangente horizontale »

P. : « Oui, une tangente horizontale ; et on le traduit comment Nicolas ? »

N. : « La tangente c'est y=0 »

P. : « Oui, la tangente a pour équation y=0, mais par rapport à f ? »

Silence

P. : « Qu'est-ce qui différencie une tangente horizontale d'une tangente comme ça ? » (elle trace une tangente oblique)

N. : « Le coefficient directeur »

P. : « Oui, le coefficient directeur. Et c'est quoi le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a ? »

Pierre : « C'est $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ »

D'autres élèves : « C'est m »

P. : « Oui, mais cet m, comment on l'obtient quand on connaît la fonction ? »

Silence puis Pierre : « C'est $f'(a)$ »

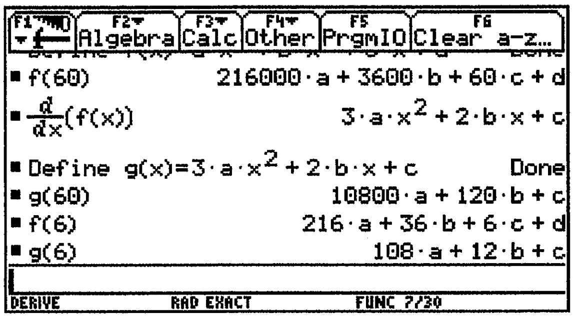
P. : « oui $f'(a)$, et alors ici quelle condition ça nous donne ? »

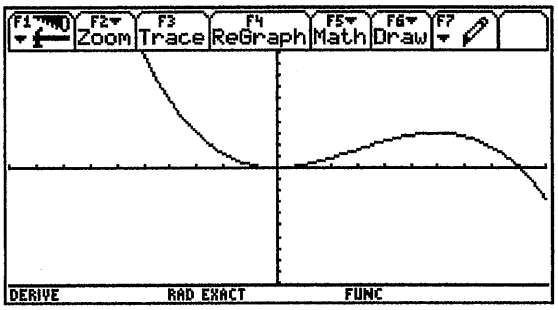
Plusieurs élèves : « $f'(0)=0$ »

On notera que dans cet épisode, les élèves qui ont déjà formulé les conditions sous forme de dérivée n'interviennent pas. Peut-être, comme Vincent, avancent-ils dans leurs calculs, sans s'impliquer dans la discussion collective.

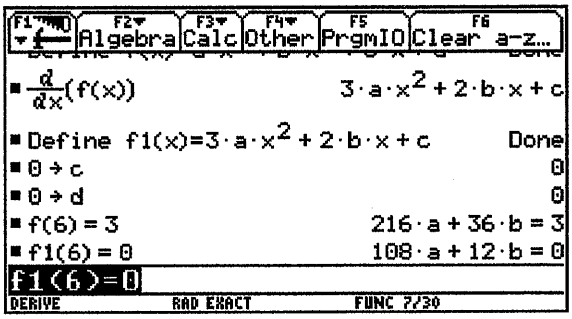
L'expression des contraintes en B se fait ensuite très vite et les élèves se remettent à la recherche. L'enseignante circule dans la classe. A un moment, elle reprend la parole suite à une demande d'élève pour faire préciser le nombre d'équations, le nombre d'inconnues. Les deux nombres étant égaux à 4, elle souligne qu'il y a de bonnes chances pour que le système ait une solution, qu'ils peuvent s'aider de la machine mais qu'ils peuvent aussi résoudre à la main. A une autre demande elle répond que oui, c'est la méthode de Gauss qui est à utiliser pour la résolution du système.

Au bout de 10mn, beaucoup d'élèves ont terminé. C'est en particulier le cas de Vincent qui a repris ses calculs en revenant au centimètre, résolu le système à la main, puis entré la fonction obtenue dans Y= et l'a faite tracer.





Mais un certain nombre d'élèves traînent dans la résolution du système. L'enseignante décide d'arrêter la recherche et récapitule collectivement, en utilisant la machine rétroprojetable. Elle définit la fonction *f* et exprime les contraintes. Plusieurs élèves proposent de remplacer tout de suite c et d par 0, ce qu'elle fait en affectant la valeur 0 à ces deux variables.

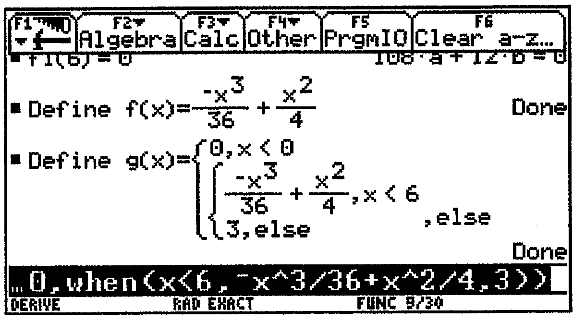


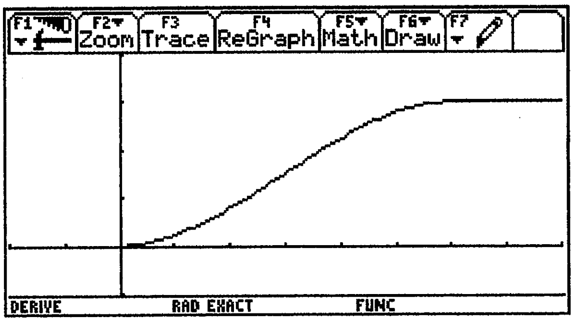
Elle recopie au tableau le système 2x2 résultant et le simplifie en :

72a+12b=1

9a+b = 0

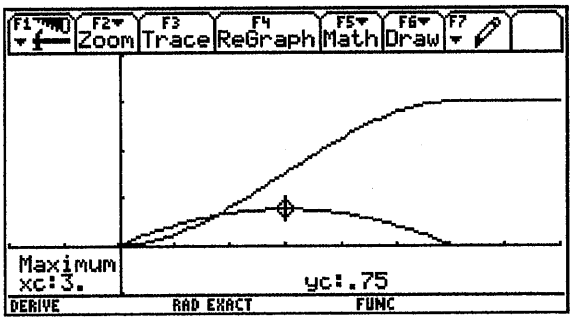
Puis elle fait oraliser les calculs et donner les résultats : a=-1/36 et b=1/4. Elle entre ensuite la fonction et la fait tracer en Zoom standard obtenant le même tracé que Vincent qui, entre temps, a modifié la fenêtre pour se limiter à [0,6]x[0,3]. Au vu du tracé, plusieurs élèves lui suggèrent d'ailleurs de se limiter à l'intervalle [0,6], mais l'enseignante dit qu'elle souhaiterait visualiser la fonction entière (elle trace au tableau). Un élève propose d'utiliser « *when* », ce qu'elle fait en détaillant soigneusement la syntaxe. Les élèves doivent faire de même sur leur propre machine. Elle choisit ensuite de tracer la fonction *g* sur [-2,8]x[-1,4].





L'enseignante en vient ensuite à la question du maximum de la pente. Pour les élèves, il n'y a aucun doute : le maximum est atteint au milieu de l'intervalle pour x=3. Elle demande comment le vérifier. Certains proposent de calculer l'équation de la tangente, mais cette fois le lien avec la fonction dérivée se fait plus facilement. Il est donc décidé de définir et tracer la fonction dérivée et de vérifier que son maximum est bien atteint pour x=3. La première heure s'achève sur ce point.

Après une pause qui est pour les élèves l'occasion de demander des informations sur le choix des options de terminale, la séance reprend. Suivant les propositions des élèves, elle définit la dérivée dans HOME et la fait tracer. Les élèves y voient la confirmation de leur conjecture et lorsque l'enseignante demande comment obtenir la valeur de ce maximum, ils suggèrent d'utiliser la commande maximum. L'enseignante le fait, en commentant les différentes étapes. Elle souligne également que la machine ne fonctionne pas ici en calcul exact, en dépit des apparences.



Un élève appelle à l'aide. En fait il a oublié de définir la fonction.

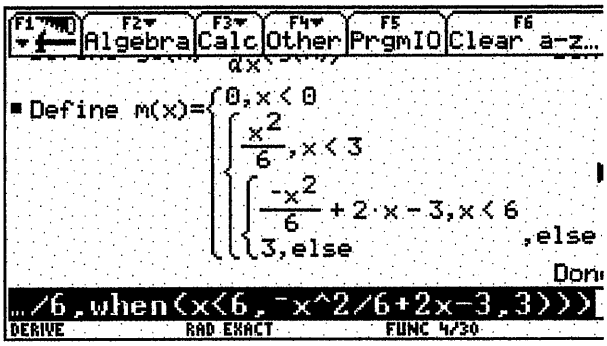
L'enseignante demande ensuite de prouver que le maximum est bien 3/4. Un élève propose de calculer la dérivée de *g* et de chercher où elle s'annule. L'enseignante demande la valeur de cette dérivée mais les élèves, visiblement effrayés par la complexité de l'expression formelle de *g*, ne peuvent répondre. Elle rappelle alors que l'on s'intéresse à la valeur de *g* sur l'intervalle [0,6] seulement et ceci débloque la situation. La dérivée est calculée mentalement : -x/6+1/2, un tableau de variation tracé et la démonstration achevée. Personne n'a pensé à raisonner directement en faisant appel aux propriétés de symétrie de la parabole. L'enseignante demande en revanche si le point correspondant au maximum de la pente a une autre propriété particulière vis à vis de la courbe de f et plusieurs répondent que c'est un centre de symétrie. Elle leur demande de le démontrer chez eux pour la séance suivante et passe au second type de raccord : par paraboles, en disant aux élèves que cette fois, ils doivent le faire sans aide. Cette première phase a duré une dizaine de minutes.

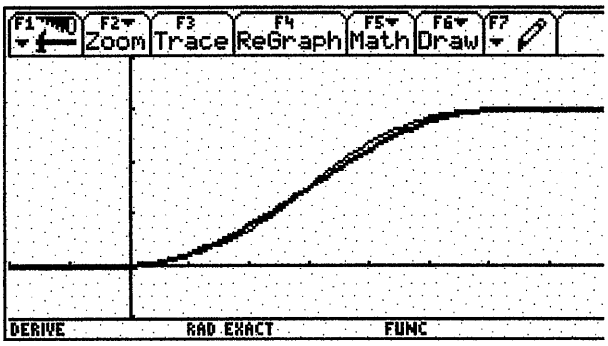
Vincent, pendant cette phase collective, a travaillé sur le raccord parabolique écrivant les conditions : $f(0)=0, f'(0)=0$ et $f(3)=3/2$. A partir de l'expression générale $f(x)=ax^2+bx+c$, il a ainsi obtenu l'équation du premier morceau de parabole et contrôle avec sa calculatrice.

L'enseignante circule dans la classe. Visiblement la mathématisation du problème du raccord des deux paraboles ne va pas de soi. Au bout de 5mn environ, elle intervient collectivement pour aider cette mathématisation. Elle trace au tableau un raccord possible, C n'étant pas spécialement au milieu de [AB], en précisant que les tangentes au point de raccord doivent être les mêmes, puis demande comment choisir le raccord. Tout de suite, des élèves proposent de fonctionner par symétrie autour du milieu de [AB]. L'enseignante acquiesce et lance tout le monde sur cette piste. Certains ont quand même du mal et elle sera obligée de faire préciser les trois contraintes que l'on va formuler pour trouver chaque parabole. Certains ont sans doute été gênés par l'expression de la contrainte de tangence au raccord qui, de fait, est momentanément abandonnée.

Suit une dizaine de minutes de travail en binômes. A ceux qui ont terminé, l'enseignante demande de vérifier que le raccord se fait bien sans rupture de pente en $x=3$. Vincent a fini assez vite, vérifie une fois de plus ses calculs à la machine, puis veut définir la fonction globale en utilisant *when* et fait l'erreur de l'appeler g tout en utilisant g dans sa définition. Sa machine se plante et, après avoir essayé diverses choses, il fait un *Reset*.

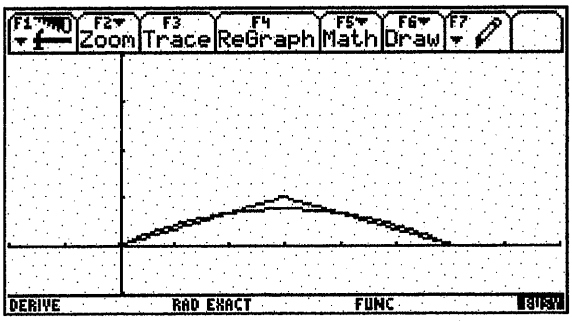
Suit une mise au point collective, les calculs étant dictés par les élèves et écrits par l'enseignante au tableau. On arrive ainsi aux deux expressions algébriques : $f(x)=x^2/6$ et $f(x)=-x^2/6+2x-3$. L'enseignante fait remarquer que les coefficients de x^2 sont opposés et fait rapidement le lien avec la symétrie par rapport au point C. Elle définit ensuite la fonction et la fait tracer, d'abord seule puis avec la cubique, la cubique étant tracée en plus épais.



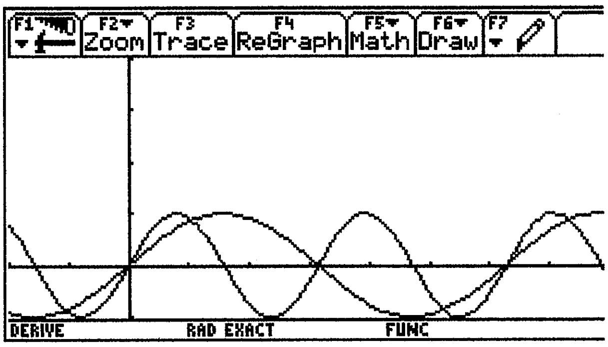


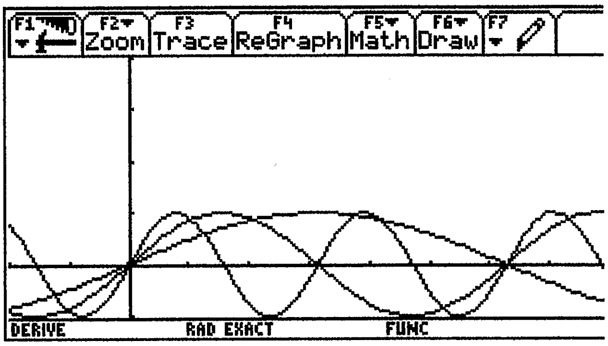
Les élèves sont étonnés par la proximité des deux courbes et ne savent pas très bien dire laquelle a « la plus grande pente ». Avant de travailler sur ce problème, l'enseignante revient sur le raccord des deux paraboles, qui est momentanément en suspens en demandant si les deux paraboles se raccordent vraiment bien. Encore une fois, des élèves proposent de trouver les équations des deux tangentes en x=3 et encore une fois, l'enseignante les ramène à la comparaison des seuls coefficients directeurs et des nombres dérivés. Ceci étant explicité, les calculs sont faits oralement et les résultats notés au tableau. Finalement, on peut conclure puisque les deux nombres dérivés sont égaux à 1.

Pour comparer les pentes, ils proposent ensuite de tracer les deux dérivées. L'enseignante le fait, tout en faisant remarquer que l'on peut déjà conclure puisque le raccord des paraboles se fait avec une pente 1 supérieure au maximum de ¾ trouvé pour la cubique. Elle fait analyser ensuite les positions relatives des deux courbes.



Cette phase collective a duré une vingtaine de minutes. On passe ensuite aux sinusoïdes pour les 10 dernières minutes de la séance. Vincent, à son habitude a un peu anticipé. Il a commencé à tracer diverses sinusoïdes correspondant aux expressions : sin2x, sinx et sin (x/2). Il compare les pentes et semble satisfait.





Il passe ensuite à l'expression des conditions et écrit :

$f(x)$=a sin(b x)+c

0=a sin(0)+c

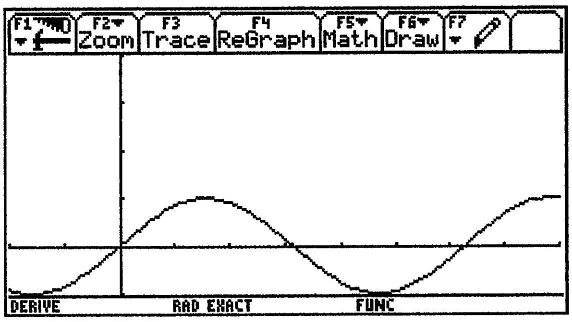
3=a sin(6 b)+c

0=a b cos(0)

0=a b cos(6 b)

Il en déduit : c=0 puis reste en plan, ce qui se comprend aisément.

L'enseignante, dans cette dernière phase, va préparer collectivement le travail sur les sinusoïdes que les élèves auront à achever seuls pour la séance suivante. Elle le fera en partant directement des caractéristiques graphiques de la fonction sinus et non de la forme générale de l'expression à trouver, comme dans les cas précédents. Après avoir écarté la proposition d'un élève : essayer sin x + x, déclarée trop compliquée, elle fait tracer la fonction sinus à la calculatrice :



puis demande aux élèves quelle partie de cette courbe leur paraît intéressante par rapport au problème posé. Ceci ne pose pas de problème. Elle reproduit cette partie au tableau, en faisant préciser les coordonnées des extrémités : (-π/2,-1) et (π/2,1) et en faisant préciser les caractéristiques que l'on doit avoir pour le raccord : un intervalle [0,6] pour les x, un intervalle [0,3] pour les y. Les élèves proposent d'abord de remonter la courbe d'une unité. Ensuite, elle attire leur attention sur l'amplitude qui est de 2 pour la fonction sinus et doit être ici de 3. Plusieurs proposent alors de multiplier le sinus par 3/2. Ensuite elle pose le problème de l'ajustement de l'écart sur les abscisses qu'il faudra gérer en multipliant x par quelque chose et leur dit aussi qu'il leur restera ensuite à centrer la courbe en C en rajoutant quelque chose aux x et quelque chose aux y. C'est la fin de la séance. Elle propose de faire des rédactions par groupes pour la séance suivante.

Analyse :

Cette séance a été très étroitement pilotée par l'enseignante, mais ceci nous semble s'expliquer par la complexité du problème. D'abord le contenu même de l'énoncé ne nous paraît pas, a posteriori, aller de soi :

- D'une part, dans la formulation des contraintes à travers la phrase *"Cette courbe doit être tangente aux deux tuyaux aux points de jonction . . ."* . Notons que les élèves ont l'habitude de voir les tangentes comme des droites, alors qu'ici c'est "une courbe" qui devrait être tangente à des droites (les tuyaux étant représentés schématiquement par des droites).
- D'autre part, à travers le fait que les élèves ont à deviner certaines questions qui ne sont pas faciles à inférer de l'énoncé telles que la recherche de la pente minimale qui est en réalité une recherche d'un minimum parmi des maxima. Notons également la condition de courbe qui *"ne doit nulle part changer brusquement de pente"* qui traduit en fait la continuité de la fonction dérivée.

Les difficultés qui sous-tendent cette situation se situent également à d'autres niveaux. Citons par exemple le type de fonctions qui interviennent dans la résolution, où il faut penser non seulement aux fonctions traitées auparavant et les adapter, mais également à définir des fonctions par morceaux. Si les élèves n'ont pas eu de mal à proposer des cubiques, des paraboles ou des sinusoïdes, ils ont eu par contre des difficultés à considérer l'union de deux paraboles, la définition d'une fonction par morceaux. De même, ils ont eu du mal - dans leur majorité - à appréhender le lien entre les coefficients d'une fonction polynomiale du $3^{ème}$ degré et la forme de sa courbe représentative à travers la fonction dérivée. D'ailleurs, l'articulation entre le cadre géométrique et le cadre algébrique nécessaire à la mathématisation du problème, avait été aidée par l'enseignante car beaucoup d'élèves semblaient avoir oublié - dans un premier temps - le rapport entre la tangente et le nombre dérivé. Nous pouvons penser que ce point de vue s'est éclipsé devant les techniques algébriques qui ont opérationnalisé le calcul des dérivées.

Par ailleurs, citons la prise en compte du repère R2 qui, contrairement à ce qui était prévu, a été éludée par l'enseignante sans doute par manque de temps. Remarquons que ce choix s'il avait été pris, aurait permis un travail plus aisé sur la symétrie, travail qui a été d'ailleurs renvoyé hors classe.

Un autre point qui aurait été coûteux à gérer, si l'argument de symétrie n'avait pas été utilisé, est celui de la dérivabilité au point C dans le cas des deux paraboles. "En effet, la condition de tangence en C rajoute une condition supplémentaire qui fait intervenir les deux fonctions, mais sera plus automatiquement satisfaite dès que les six autres le seront.".

En somme, c'est la densité de cette activité, ainsi que la contrainte permanente de temps qui nous semble justifier amplement la médiation appuyée de l'enseignante, sachant que les différentes tâches qui la composent sont loin d'être routinières pour l'écrasante majorité des élèves. Signalons cependant que malgré les interventions fréquentes de l'enseignante, les élèves ont été impliqués dans la résolution du problème que ce soit en pilotant les calculs intermédiaires ou encore dans les phases de conjecture. Ainsi, ont-ils proposé les types de fonctions recherchés ou encore le recours aux courbes des dérivées et l'utilisation de l'ostensif graphique *F5-Maximum* dans la phase de recherche de la pente maximale.

Conclusion :

Durant cette année, les pratiques instrumentées ont connu plus de stabilité en classe que l'année précédente. Ainsi, pouvons-nous décrire a priori un scénario de début de séance avec la TI92 comme suit :

- Distribution d'une feuille d'activité
- Séance de *nettoyage* de la machine
- Utilisation de l'application HOME pour définir fonctions et expressions
- Tout tracé se fait tout d'abord en *ZoomStd*
- C'est l'enseignante qui décide de l'ordre d'utilisation des environnements TI92 et p/c
- Chaque séance est l'occasion d'introduire au moins une nouvelle commande (d'où des connaissances-machine de niveau 1 puisque sont traitées les conditions syntaxiques). C'est également l'occasion, mais dans une moindre mesure de perfectionner l'utilisation d'une fonctionnalité connue (par exemple, en modifiant TblSet quand on travaille dans TABLE, ou

en changeant la taille des cellules quand on travaille dans DATA-EDITOR, ce qui correspond au 2ème niveau de connaissances), ou encore de tenir un discours sur ce qui se passe dans l'univers interne de la machine (par exemple, sur la différence entre *ab* et *a**b* ou entre les deux signes "*moins*", ce qui correspond au 3ème niveau de connaissances-machine).

Par ailleurs, la machine n'a pas vraiment été exploitée sur le plan informatique, que ce soit pour la programmation ou pour la gestion des répertoires et fichiers, sauf quand cela s'est révélé nécessaire (comme dans l'application DATA-*Editor*).
Concernant la gestion du travail entre collectif et individuel, bien que la feuille d'activité (par le scénario qu'elle imposait) ait réussi à canaliser le travail individuel des élèves, il nous semble très difficile de garder contrôle quand il est question d'activités telles que le cadrage (surtout à partir du moment où des outils de base (tels que les zooms) sont disponibles, induisant une démultiplication des cadrages possibles pour un même objectif), ou encore le travail dans le module Tableur. En effet, ce type d'environnement est assez difficile à gérer à cause du fonctionnement spécifique et délicat des colonnes notamment (Cf *Observation 4*).
Cependant, l'utilisation de l'application GRAPH a été très pointue. En effet, dans un premier temps l'enseignante a insisté sur la différence entre l'Exact et l'Approché, et essayé de mettre en évidence leurs statuts dans l'activité. Dans un deuxième temps, elle a introduit des degrés de précision dans l'Approché. Ainsi dans une lecture graphique, où l'on ne peut recueillir a priori que des informations approximatives (vu le caractère approché de l'application GRAPH), nous pouvons distinguer plusieurs niveaux de précision : tout d'abord la technique la plus fruste, à savoir une lecture à l'œil nu ; puis une utilisation de *Trace,* combinée éventuellement à des zooms (*ZoomFit, ZoomIn, ZoomOut* ou *ZoomBox*). Viennent ensuite les commandes du menu *F5*, comme par exemple *Intersection, Zero, Minimum, Maximum* ou encore *Tangent.*
Plus globalement, l'enseignante a essayé de rapprocher le statut de HOME de celui de l'environnement p/c, dans la mesure où c'est la seule application qui permette de fournir -à la demande- des résultats exacts. Malgré cela, la TI92 ne possède qu'un statut d'outil de conjecture ou de contrôle par rapport au travail en p/c, qui reste l'environnement de référence dans l'activité.
Par ailleurs, si l'utilisation de la TI92 a été l'occasion pour l'enseignante de mettre en lumière l'importance de l'Exact dans le travail mathématique et particulièrement dans la preuve, l'utilité de l'Approché a également été mise en évidence en classe pour avoir des ordres de grandeur de valeurs telles que les racines d'une équation pour pouvoir les ordonner dans le

tableau de variation par exemple (cf. *Observation 2*) ou encore pour explorer le comportement d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide du module Tableur (cf. *Observation 4*). Si nous comparons la gestion de l'utilisation de la TI92 en classe durant cette année 1996-97, nous remarquons qu'à tous points de vue, la différence avec l'année précédente est considérable. A cela deux raisons nous semblent principales :

- tout d'abord l'acquisition en début d'année scolaire des machines, ce qui a offert

évidemment trois mois d'utilisation en plus par rapport à l'année précédente. Mais cela a surtout permis de construire progressivement le rapport à la TI92 conjointement à l'évolution du rapport aux objets mathématiques dans l'environnement usuel papier-crayon, sans que cette genèse ne soit trop perturbée, comme ce fut le cas dans la première année d'expérimentation (pendant les trois premiers mois) par l'existence préalable de techniques de type calculatrice-graphique.

- Ensuite et surtout, un travail d'ingénierie qui a tenu compte des résultats d'une première année expérimentale (à travers de observations, des entretiens et des questionnaires) ainsi que des objectifs d'enseignement.

Cependant, malgré cette évolution, le travail en classe reste souvent à la charge de l'enseignante, ce qui nous semble dû à plusieurs raisons : d'une part, la complexité des ostensifs-TI92 que ce soit dans leur fonctionnement en tant qu'objets techniques (comme le Tableur ou encore la manipulation de listes pour résoudre des systèmes d'équations) qui demande un temps de familiarisation, ou dans leur statut en tant qu'objets mathématiques (comme la différence entre *Factor* et *Factor(.,x)* par exemple, ou encore le statut mathématique de l'ostensif-TI92 de calcul de dérivée qui donne l'expression d'un nombre dérivé et non la fonction dérivée). D'autre part, , la gestion simultanée de nouveaux concepts mathématiques (et de nouveaux ostensifs p/c) et de nouveaux ostensifs-TI92 (que ce soit des commandes telles que *Factor, Intersection*, la manipulation de listes, ou une application telle que le module Tableur), ou encore la gestion des différents registres sémiotiques qu'offre la TI92 par rapport à la conceptualisation et à la construction des savoirs en classe.

Dimension Individuelle :

Le suivi par entretiens :

Au cours de cette deuxième année d'expérimentation, tenant compte des résultats de l'année précédente et de l'éloignement du site, nous avons effectué quelques changements importants. Ainsi, afin de pouvoir réserver plus de temps aux entretiens, nous avons décidé de ne suivre que six élèves (au lieu de neuf). Par ailleurs, nous n'avons plus fait appel aux élèves qui ont une opinion négative sur les technologies informatiques afin d'éviter les désistements tels que celui de Michel, l'année précédente après le deuxième entretien.

Dans chacun des deux entretiens que nous avons effectués, nous avons omis de questionner la personnalisation de la machine ainsi que l'utilisation en devoir commun, car nous avons remarqué lors de nos observations de classe, et l'enseignante nous l'a confirmé, que la personnalisation demeurait aussi faible que dans la première année et que l'utilisation en devoir commun avait toujours pour objectif le contrôle du travail effectué en papier / crayon ou, dans une moindre mesure, la conjecture par le tracé de graphiques essentiellement.

Nous avons gardé le même type de tâche centrale : l'étude des variations d'une fonction. Cependant, nous avons réservé plus de temps pour le travail des élèves, et avons insisté davantage sur la sous-tâche préliminaire où l'élève "fait tracer" le graphe, afin de cerner davantage les connaissances mathématiques sous-jacentes. Cela nous semble également favoriser la genèse de techniques instrumentées liées au cadrage, lesquelles n'ont été traitées que superficiellement pendant la première année, en raison du manque de temps principalement. Par ailleurs, notre choix s'appuie aussi sur le fait que cela est plus conforme à l'ordre des tâches et au fonctionnement des élèves dans cet environnement.

En ce qui concerne le choix du type de fonction, nous avons évité les fonctions trigonométriques à cause de la fragilité des connaissances que les élèves pouvaient avoir dans ce domaine à ce niveau d'apprentissage. Nous avons par contre, proposé une fonction rationnelle au premier entretien et une fonction de la forme $x \to \sqrt{f(x)}$ où f est une fonction polynôme, au deuxième entretien, car elles enrichissent - à condition d'agir de manière convenable sur les variables - la tâche a priori routinière d'étude de fonction.

Rappelons par ailleurs, que contrairement à l'année précédente, les élèves ont reçu les calculatrices TI92 dès le début de l'année scolaire, au mois de septembre.

Portraits des élèves choisis :

Nous présentons ci-dessous les portraits des six élèves suivis, que ce soit au niveau de leur profil mathématique ou au niveau de leur profil technologique. Nous essaierons également de les classer par rapport aux catégories : *«numérique»*, *«graphique»* ou *«p/c»* (cf. *Année 1 - Dimension Individuelle - Conclusion*). Signalons que le questionnaire, sur lequel nous nous basons essentiellement pour dresser ces portraits, a été distribué en début d'année avant l'arrivée des TI92.

Amandine :

Amandine est une assez bonne élève. Elle dispose d'une CASIO 9900 depuis moins d'un an (auparavant elle avait une TI Galaxie40). L'année précédente, elle utilisait sa calculatrice souvent en classe et parfois à la maison, et cela plus pour tracer des graphiques que pour programmer, manipuler les mémoires ou pour des calculs numériques. Dans l'application graphique, elle mobilise souvent *Trace*, parfois *Range* mais jamais *Zoom*. Elle dit que la calculatrice a parfois affiché des résultats surprenants, et qu'elle ne vérifie jamais les résultats de la machine. Par ailleurs, elle pense que la calculatrice lui fait gagner du temps et lui permet de vérifier ses résultats, sans pour autant l'aider à résoudre des problèmes ou à préparer les contrôles. Elle utilise sa calculatrice également en physique.

Concernant les logiciels, elle dit avoir utilisé entre trois et dix fois des logiciels de traitement de textes (WordPerfect), de mathématiques (Dessiner l'espace), de dessin (DAO) et des jeux, mais une ou deux fois seulement un tableur. Signalons qu'il n'y a pas d'ordinateur chez elle. Elle pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques, "surtout pour le dessin en trois dimensions". Amandine serait une *«graphique»*

Arnaud :

Arnaud est un assez bon élève. Il dispose d'une CASIO 9960 GFX depuis moins de deux mois. L'année précédente, il avait une CASIO 7000 qu'il utilisait souvent, que ce soit en classe ou à la maison. Dans l'application graphique, il mobilise parfois *Trace, Zoom* et *Range*. Il dit que la machine lui a parfois affiché des résultats surprenants, par exemple "avec les statistiques (moyenne-écart-type)". Il vérifie parfois les résultats affichés par sa calculatrice "en statistiques et en trigonométrie". Par ailleurs, il pense que la calculatrice lui fait gagner

beaucoup de temps, lui permet de vérifier ses résultats, l'aide à résoudre des problèmes et à préparer les contrôles. Il utilise sa calculatrice également en physique.
Concernant les logiciels, il dit avoir utilisé plus de dix fois un certain nombre de logiciels de traitement de textes (Word), de dessin (Designer, PhotoFinish), le tableur Excel ainsi que des jeux, mais jamais de logiciels de mathématiques. Signalons qu'il y a un ordinateur chez lui qu'il utilise souvent. Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour "des cours sur l'espace". Arnaud serait entre *«graphique»* et *«numérique»*

Emmanuel :

Emmanuel est un élève moyen. Il dispose d'une TI8O depuis moins d'un an (auparavant il avait une CASIO FX82). L'année précédente, il l'utilisait souvent en classe, parfois à la maison, et cela plus pour des calculs numériques et des tracés de graphiques, que pour programmer ou manipuler les mémoires. Dans l'application graphique, il mobilise davantage *Trace* et *Zoom* que *Range.* Il dit vérifier parfois le résultat affiché par sa calculatrice pour des "approximations". Par ailleurs, il pense que la calculatrice lui fait gagner du temps et lui permet de vérifier ses résultats, sans pour autant l'aider à préparer les contrôles ou à résoudre les problèmes. Il utilise sa machine également en physique.
Concernant les logiciels, il dit avoir utilisé plus de dix fois le logiciel de traitement de textes Word, celui de dessin PointShopPro, le tableur Excel ainsi que d'autres logiciels (Eagle, DMT10, Trajec). Il a utilisé entre trois et dix fois des logiciels de mathématiques (Cabri) et des jeux.
Signalons qu'il y a un ordinateur chez lui qu'il utilise souvent. Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques ("aident à mieux comprendre, par exemple l'espace avec Cabri") mais peuvent être dangereux ("perte des notions de base"). Emmanuel serait entre *«graphique»* et *«numérique»*

Fabien :

Fabien est un élève très moyen. Il dispose d'une TI82 depuis plus d'un an (auparavant il avait une TI60). L'année précédente, il l'utilisait parfois, que ce soit en classe ou à la maison, et cela plus pour faire des calculs numériques que pour programmer ou tracer des graphiques. Dans l'application graphique, il mobilise souvent *Trace* et *Zoom* mais jamais *Range.* Il dit avoir été induit en erreur par la calculatrice "entre les degrés et les radians". Parfois, il vérifie les résultats affichés en faisant un "calcul de tête approximatif". Par ailleurs, il pense que la calculatrice lui fait gagner beaucoup de temps, et l'aide à résoudre les problèmes ainsi qu'à

vérifier ses résultats, sans pour autant l'aider à préparer les contrôles. Il utilise sa machine également en physique et en technologie.
Concernant les logiciels, il dit avoir utilisé plus de dix fois le logiciel de traitement de textes Word ainsi que des jeux informatiques. Il a utilisé entre trois et dix fois des logiciels de mathématiques et de dessin et une ou deux fois d'autres logiciels et tableurs.
Signalons enfin qu'il n'y a pas d'ordinateur chez lui. Il pense que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques. Fabien serait un *«numérique»*

Marie-Anne :

Marie-Anne est une bonne élève. Elle dispose d'une TI80 depuis moins d'un an. L'année précédente, elle l'utilisait souvent, que ce soit en classe ou à la maison, et cela plus pour des calculs numériques que pour programmer, manipuler les mémoires ou tracer des graphiques. Dans l'application graphique, elle mobilise souvent *Trace* et *Zoom* mais jamais *Range*. Elle dit avoir été induite en erreur par la calculatrice pour des "résultats non arrondis, par exemple". Parfois, elle vérifie les résultats affichés "en donnant un ordre de grandeur au résultat". Par ailleurs, elle pense que la calculatrice lui fait gagner beaucoup de temps, et l'aide à résoudre les problèmes ainsi qu'à vérifier ses résultats, sans pour autant l'aider à préparer les contrôles. Elle utilise sa machine également en physique-chimie. Elle pense que "la triche est facile avec une calculatrice".
Concernant les logiciels, elle dit avoir utilisé plus de dix fois le logiciel de traitement de textes Write ainsi que des jeux informatiques. Elle a utilisé entre trois et dix fois des logiciels de mathématiques (Intersec) et de dessin (DMT10), et une ou deux fois un tableur.
Signalons qu'il y a un ordinateur chez elle qu'elle utilise parfois. Elle pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques, car "ils permettent souvent une vue plus concrète des mathématiques". Marie-Anne serait une *«numérique»*

Vincent :

Vincent est un très bon élève. Il dispose d'une TI8O depuis plus d'un an (auparavant il avait une CASIO 6800fx). L'année précédente, il l'utilisait souvent, que ce soit en classe ou à la maison, et cela plus pour programmer et manipuler les mémoires que pour des calculs numériques ou des tracés de graphiques. Dans l'application graphique, il mobilise davantage *Trace* et *Range* que le *zoom.* Il dit "vérifier parfois le résultat affiché par sa calculatrice en changeant légèrement la formulation du calcul pour vérifier sa formule". Par ailleurs, il pense que la calculatrice lui fait gagner beaucoup de temps (surtout dans les contrôles "sans elle, on aurait à peine le temps de faire la moitié du dessin - calculs complexes, graphes, tableaux de valeurs, vérifications, calculs de trigonométrie, . . .) et lui permet de vérifier ses résultats, sans pour autant l'aider à résoudre des problèmes et encore moins à préparer les contrôles. Il utilise sa calculatrice également en physique et en technologie.

Concernant les logiciels, il dit avoir utilisé plus de dix fois un certain nombre de logiciels tels que Microsoft Word, Cabri, Derive, Geoplan, Microsoft Draw, Excel, Publisher, Money et des jeux. Signalons qu'il y a un ordinateur chez lui qu'il utilise souvent. Il pense enfin que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques, car "ils permettent des expérimentations". Vincent serait entre *«graphique»* et *«numérique»*

En conclusion, tous les élèves ont un rapport positif aux technologies informatiques. Néanmoins, Vincent est le seul à avoir une réelle familiarité avec ces technologies (il est également le seul à avoir travaillé avec le logiciel Derive), à l'opposé d'Amandine et Fabien qui ne possèdent pas d'ordinateur à la maison. Par ailleurs, tous les élèves pensent que les ordinateurs sont utiles pour apprendre des mathématiques. Emmanuel pense cependant qu'ils peuvent être dangereux "*parce qu'on peut perdre des notions de base*". Il écrit également que pour certains problèmes "*il est plus intelligent de résoudre à la main*" (on retrouve ici la même position prise par Vincent l'année précédente).

Pour ce qui est de l'utilisation de la calculatrice graphique, Amandine (qui en a une utilisation limitée) est du type *graphique*, Fabien et Marie-Anne sont plutôt du type *numérique*, tandis que Arnaud, Emmanuel et Vincent se situent entre les deux types. Précisons que cette typologie est sommaire dans la mesure où nous n'avons pas assez d'informations concernant leur utilisation de la calculatrice graphique. Nous nous basons en effet, essentiellement sur les réponses des élèves aux items 15 et 16 du questionnaire.

Enfin, Amandine, Emmanuel et Vincent considèrent que la calculatrice est plutôt un outil de contrôle tandis que Arnaud, Fabien et Marie-Anne pensent qu'il sert également pour la résolution.

Entretien 1 :

Scénario de l'entretien et critères de choix :

Cet entretien qui a eu lieu le 14 mars 1997 et qui a duré une demi-heure pour chaque élève, se compose de deux parties. Une partie A où l'on demande aux élèves de reconnaître des graphes de fonctions et de fonctions dérivables. Dans la partie B, la tâche principale est l'étude d'une fonction rationnelle dans l'esprit de ce qui a été réalisé aux deux premiers entretiens de l'année précédente, à laquelle nous avons adjoint, si le temps le permet, la résolution de deux sous-tâches : la recherche de coordonnées de points d'intersection avec les axes et le tracé d'une tangente. Par ailleurs, au début et à la fin de cette partie, nous avons posé aux élèves des questions relatives à la gestion des répertoires et fichiers. Nous souhaitions ainsi évaluer cette composante de l'instrumentalisation.

Partie A :

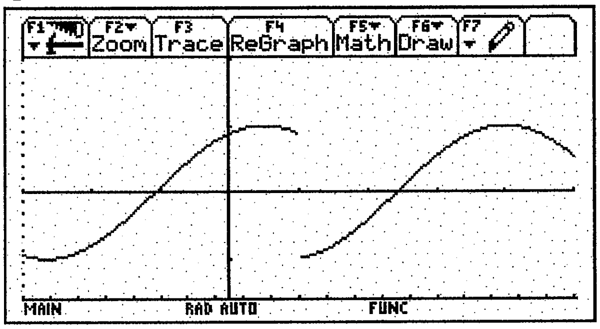
Dans cette partie, nous voulons revenir sur un point que nous avons déjà analysé lors des observations liées à la notion de dérivée (cf. *Dimension Institutionnelle*). Nous avions vu que le lien entre le caractère de linéarisation locale et la dérivée avait été mis en place dans les premières séances d'introduction de la notion de dérivée, mais que cela n'avait pas été institutionnalisé fortement. Le travail qui a été fait ensuite est un travail où l'on ne manipule que des fonctions régulières qui sont dérivables sur leur domaine de définition, si l'on excepte des fonctions qui ont été traitées rapidement comme la fonction racine carrée ou encore la fonction valeur absolue par exemple. Pour cette dernière fonction, nous avons vu d'ailleurs (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 5*) que des difficultés liées à la manipulation algébrique de la valeur absolue ont été assez prégnantes pour détourner l'attention de la visualisation graphique des demi-tangentes. Nous nous demandons si ce rapport à la notion locale de dérivée et à sa reconnaissance graphique a suffisamment vécu pour pouvoir s'installer et pour devenir une connaissance mobilisable, au sens donné à ce terme par A. Robert [Robert, 1998].

Par ailleurs, nous voulons également évaluer le rapport des élèves à la reconnaissance de graphes de fonctions. Nous prévoyons a priori trois tendances principales pouvant influer sur ce rapport :

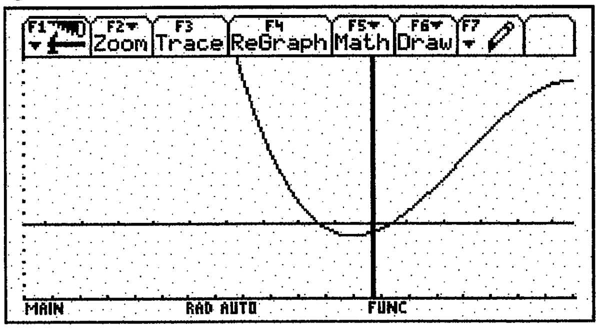
- le fait d'entrer systématiquement avant tout tracé l'expression formelle (qui peut être complexe) d'une fonction, que ce soit dans l'application Y= ou à l'aide de l'ostensif *Define,* ce qui a été fortement appuyé par l'enseignante (cf. *Dimension Institutionnelle*)
- le répertoire de fonctions et de courbes représentatives de fonctions déjà vues en classe
- la définition d'une fonction : *"tout élément de l'ensemble de départ a au plus une image dans l'ensemble d'arrivée"*

Dans la perspective de repérer les conflits possibles entre ces tendances ainsi que les tendances dominantes, nous proposons aux élèves dix images d'écran graphique de la machine qui représentent chacune un tracé. Pour obtenir certains tracés, nous avons entré des expressions de fonctions qui étaient généralement définies par morceaux. Pour d'autres tracés, nous avons utilisé les ostensifs contenus dans le menu GRAPH-*F7*, qui ne sont pas introduits en classe et qui permettent de fabriquer des courbes qui ne soient pas nécessairement des représentations graphiques de fonctions. Pour l'ensemble des tracés, nous avons tenu compte de plusieurs variables, comme le fait que ce soit une représentation graphique d'une fonction ou non, la continuité, ou la dérivabilité à travers la présence de points anguleux. Nous avons également essayé de construire des tracés dont des morceaux ressemblent à des courbes de fonctions prototypiques, tout en évitant de garder toujours les graduations correspondant à la fenêtre la plus familière, celle qui correspond à *ZoomStd.* Voici un tableau récapitulatif des images proposées en fonction des variables que nous venons de citer :

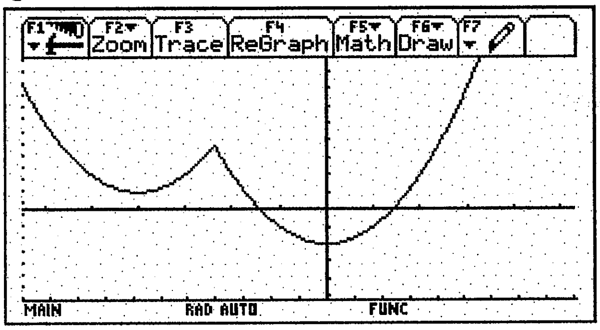
❶


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

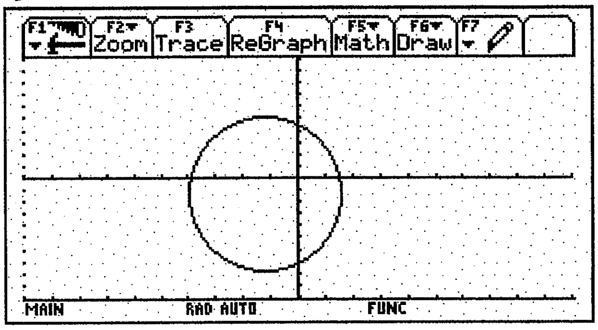
❷


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

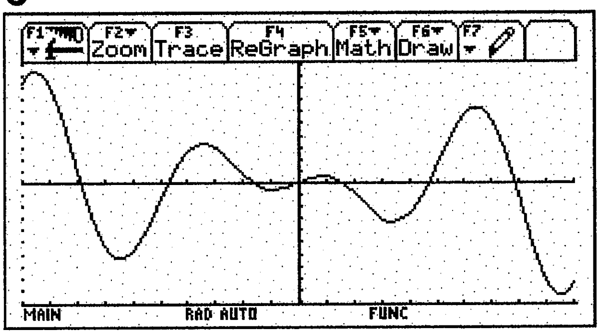
❸


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

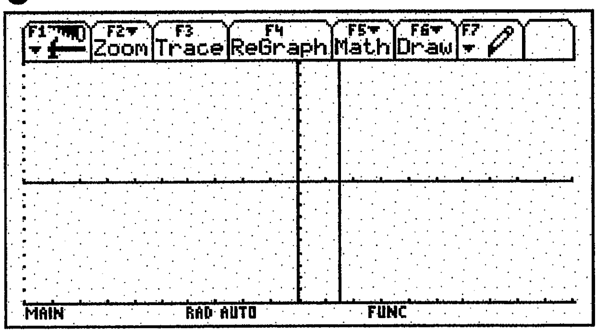
❹


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

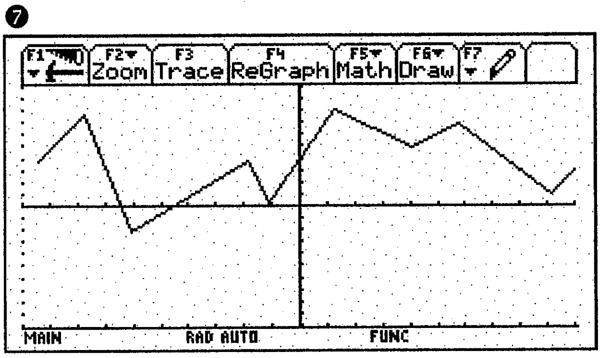
❺


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

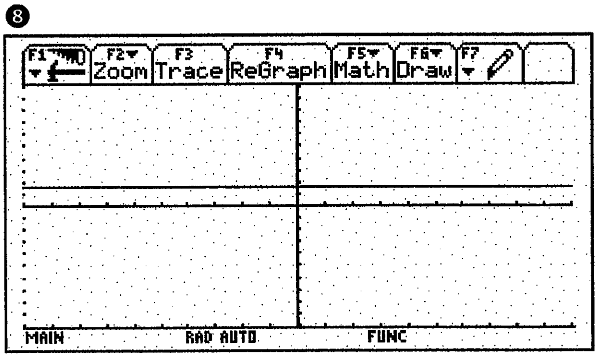
❻


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

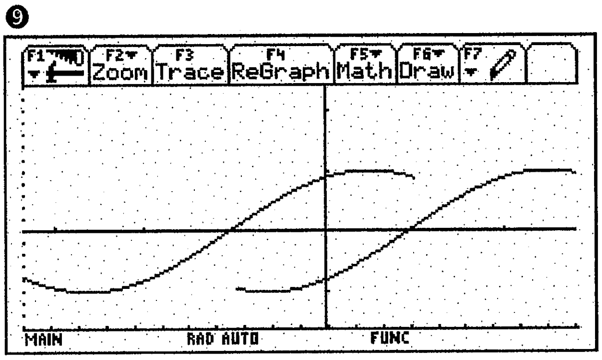
❼


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

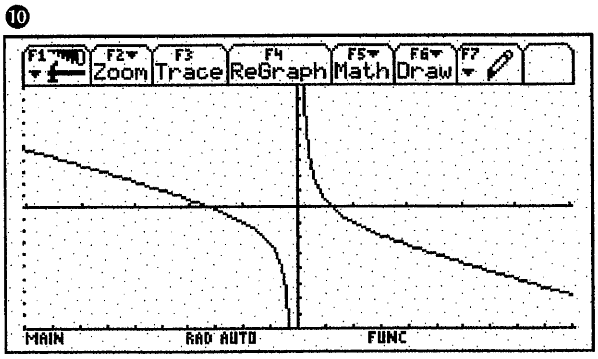
❽


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

❾


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

❿


F1 F2 Zoom F3 Trace F4 ReGraph F5 Math F6 Draw F7
MAIN RAD AUTO FUNC

Images	Prototypes	Fonction	Continue	Présence de points anguleux	Présence de demi-tangentes	L'écran correspond à *ZoomStd*
1	Sinusoïde	Oui	Non	Non		Non
2	Parabole	Oui	Oui	Non	Non	Non
3	Parabole	Oui	Oui	Oui	Oui	Non
4	Cercle	Non				Oui
5	Sinusoïde	Oui	Oui	Non	Non	Oui
6	Droite	Non				Oui
7	Valeur Absolue	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
8	Droite	Oui	Oui	Non	Non	Oui
9	Sinusoïde	Non				Non
10	Hyperbole	Oui	Oui	Non	Non	Non

Notre choix de ne pas toujours garder la fenêtre correspondant à *ZoomStd* devrait entraîner les élèves à être prudents quand ils voudront repérer les coordonnées d'un point donné. Par ailleurs, nous avons tenu à proposer une droite verticale pour voir si cela ne va pas créer des perturbations vu que les élèves ont généralement tendance à assimiler systématiquement une droite à une représentation graphique de fonction.

Revenons maintenant sur le choix des deux sous-tâches de "tracé" et d'étude des variations que nous traiterons dans la partie B :

Partie B :

1. Faire tracer la courbe représentative de f et s'arrêter quand cela semble satisfaisant

Le choix de cette sous-tâche se base essentiellement sur son caractère ouvert. De plus, comme pour l'année précédente, cette sous-tâche spécifique à l'environnement machine n'est toujours pas prise en charge institutionnellement. Ceci suppose donc que l'élève a dû construire en privé des techniques instrumentées. A la fin de la première année d'expérimentation, nous avions remarqué la diversité des techniques mises en jeu par les élèves mais n'avions pas prévu dans notre dispositif de repérer les raisons sous-jacentes à ces pratiques instrumentées. Il nous semble effectivement intéressant d'aller plus loin dans l'analyse des techniques de cadrage que les élèves mobilisent pour résoudre cette sous-tâche, et ce afin d'accéder non seulement à la composante privée de leurs pratiques mais également à l'effet du rapport institutionnel sur ces pratiques.

Du point de vue mathématique, une question nous semble essentielle à étudier :

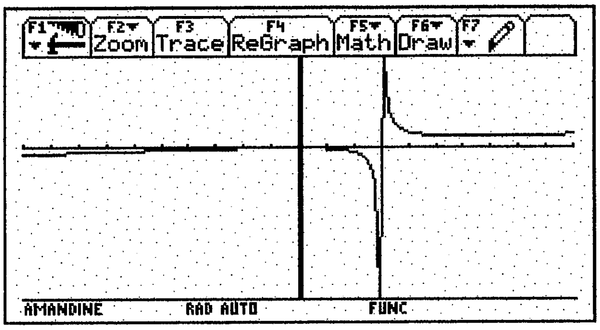
"Que signifie un tracé satisfaisant pour les élèves ?"

Nous pouvons prévoir, sur la base des résultats de l'année précédente, que les élèves vont essayer de "remplir" l'écran de la machine. Il est alors tentant de se demander si ce "remplissage" n'obéit pas à un projet, qui serait peut-être de se rapprocher de formes de tracés rencontrées antérieurement.

2. Etudier les variations de la fonction f

Pour choisir la fonction à étudier, nous avons repris certains critères utilisés l'année précédente tout en en rajoutant d'autres. Ainsi :

- La fonction comporte une singularité mais cette fois-ci en 3
- La fenêtre de tracé initiale, correspondant à *ZoomStd,* soit à la fenêtre [-10,10]X[-10,10] fournit un tracé incomplet où l'on ne voit pas de représentation graphique pour les x supérieurs à 3
- Tenant compte du fait que les élèves doivent être beaucoup plus familiers avec la TI92 que ceux de l'année précédente à la même époque (vu les choix effectués conjointement aux ingénieries mise en place - Cf *Dimension Institutionnelle*), et étant donné le temps plus long réservé aux entretiens, nous avons décidé de complexifier cette tâche. Ainsi:
  - Les zéros de la dérivée sont irrationnels ce qui rend caduque toute lecture sur le graphe ou sur la table de valeurs qui, par essence, ne fournissent que des valeurs approchées. Ceci devrait pousser l'élève à une résolution dans l'application HOME ou en p/c
  - La commande *Factor* n'a donc aucun effet sur l'expression de la dérivée et il faut recourir à *Factor(.,x)*
  - Même dans la fenêtre obtenue après un *ZoomFit* sur [-10,10], les variations ne se laissent pas facilement voir à l'œil nu, précisément entre –2 et 1. Par ailleurs, la fonction semble constante entre 4.5 et 9.5

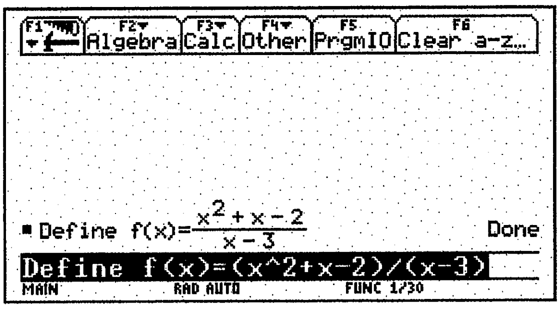


Tenant compte de la gestion de la machine en classe et du niveau moyen des élèves suivis, nous proposons ci-dessous des stratégies qui nous semblent envisageables a priori :

Type de stratégies a priori :

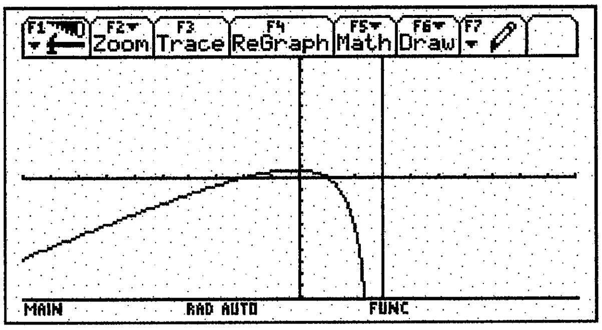
1. Faire tracer la courbe représentative de f et s'arrêter quand cela semble satisfaisant

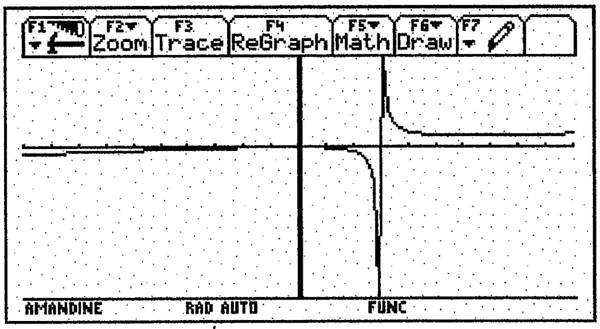
- Définition dans l'application HOME : menu F4-1 (*Define*), ENTER, taper f(x) = (x^2+x-2)/(x-3) puis ENTER



- Les élèves étant familiarisés avec l'utilisation de l'ostensif *ZoomStd* (Cf. *Dimension Institutionnelle*), nous prévoyons une utilisation systématique de cette commande avant celle de l'ostensif *ZoomFit* sur [-10,10].

Application GRAPH ou WINDOW : *F2-A-ZoomStd* puis *ZoomFit*. Les tracés successivement obtenus sont alors les suivants :



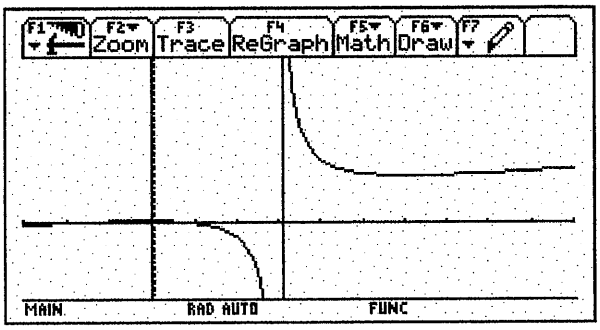


2. Etudier les variations de la fonction f

Afin de dépasser la seule lecture à l'œil nu, lors de la phase de conjecture, l'élève peut rester dans l'application graphique ou recourir à l'application TABLE :

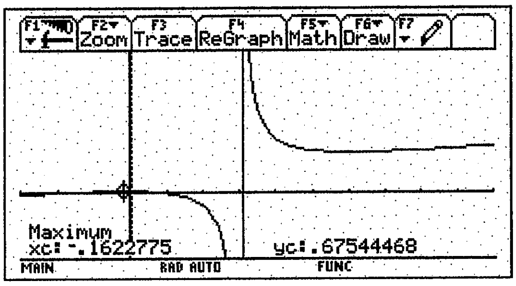
- Dans l'application GRAPH :

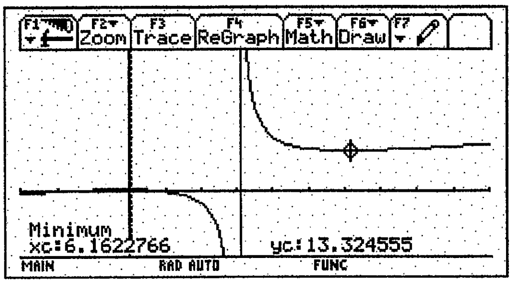
Nous supposons que l'élève va dégager certaines informations des représentations graphiques ci-dessus. Ainsi, il apparaît sans difficulté, à l'œil nu, sur le tracé en *ZoomStd* que la fonction est croissante de -10 jusqu'au voisinage de 0, puis décroissante jusqu'au voisinage de 3. Sur le tracé en *ZoomFit*, la fonction semble décroissante de 3 jusqu'au voisinage de 5 puis constante jusqu'au voisinage de 10. Nous pensons que cette "constance", étant donné son caractère inhabituel par rapport aux fonctions rencontrées en classe (hormis les fonctions constantes, mais celles-ci le sont sur IR entièrement), va pousser les élèves à améliorer le cadrage en optant par exemple pour un *ZoomBox* autour de l'intervalle [-3;10], ce qui donnerait le graphe suivant :



Ceci permet de conjecturer que la fonction change de variation sur l'intervalle [3;10].

Ensuite, pour la recherche de valeurs approchées des extrema, l'élève pourrait recourir aux ostensifs graphiques *F5-Minimum* et *F5-Maximum*, ce qui donnerait :

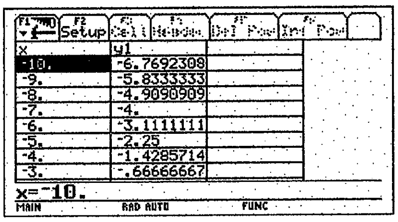


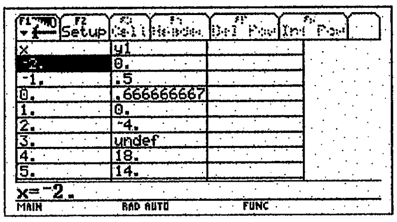


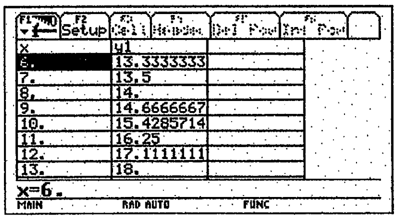
L'élève déduirait alors que la fonction est croissante de -10 à -0.16 (à peu près) puis décroissante jusqu'à 3, valeur où elle n'est pas définie. Ensuite, f serait décroissante jusqu'à 6.16 (à peu près) puis croissante.

❑ Une autre possibilité d'utiliser la machine pour conjecturer les variations de f est celle du recours à l'application TABLE. Bien que ce recours nous semble peu probable, vu ce que nous avons observé en classe où cette application est très peu utilisée (Cf.. *Dimension Institutionnelle*), voici une utilisation possible du tableau de valeurs :

Le pas étant fixé à 1 par défaut, le tableau afficherait alors à partir de x=-10 par exemple :







Mais observons ce qui se passe dans cette table. A première vue, l'élève pourrait conjecturer comme suit : les valeurs de f étant croissantes de x=-10 jusqu'à x=0 puis décroissantes ensuite jusqu'à x=2, un maximum relatif serait atteint entre x=0 et x=1. Par le même raisonnement, "l'élève conjecturerait l'existence d'un minimum entre x=6 et x=7. Nous verrons ci-après que le maximum est atteint pour un x négatif. Ainsi, l'utilisation de l'application TABLE est loin d'être efficace pour conjecturer les variations de la fonction et les extrema.

Il est vrai qu'en prenant un pas de 0.1, l'élève verrait certainement que le maximum est négatif. Cependant, étant donné que ledit maximum semble se situer au voisinage de l'origine sur le tracé, l'élève n'a pas de raison de changer de pas puisque l'encadrement trouvé ci-dessus (entre x=0 et x=1) confirmerait la lecture à l'œil nu : le maximum existe au voisinage de 0. Ceci dit, remarquons que même un pas de 0.5 pourrait amener, par le même raisonnement, à situer le maximum dans l'intervalle [0 ; 0.5].

En fait, ce que nous avons essayé de montrer ci-dessus c'est que l'utilisation de l'application TABLE dans certains cas tel que celui-ci peut induire, non seulement des encadrements qui ne soient pas très fins, mais bel et bien de faux encadrements.

Lors de la phase de preuve des conjectures, nous prévoyons une étude de variation commençant par le calcul de la dérivée dans l'application HOME et après lui avoir affecté un nom, une recherche de ses zéros à l'aide d'une des deux commandes *Zeros* ou *Solve*. Il est également possible que les élèves utilisent *Factor(.,x)* pour obtenir une expression factorisée de la dérivée.

En ce qui concerne le signe de la dérivée, l'élève pourrait le donner directement (sans passer par la factorisation) vu que le numérateur est un trinôme du 2[nd] degré, soit en se basant sur le signe du coefficient du monôme de plus haut degré, soit en calculant la valeur de ce trinôme dans un des intervalles dont les racines forment les bornes, et ceci dans l'application HOME ou même mentalement en choisissant des nombres assez simples. Rappelons que cette possibilité a déjà été observée l'année précédente et semble constituer une technique (Cf. *Année 1-Entretien 1 - Georges*).

Le tableau de variation serait alors :

x		**x_1**		**3**		**x_2**	
x^2-6x-1	+		–		–		+
f ' (x)	+		–		–		+
f(x)	↗		↘		↘		↗

Résultats et analyse :

Partie A :

Dans cette partie, nous allons traiter séparément les deux phases correspondant respectivement à la reconnaissance de graphes de fonctions et à celle de graphes de fonctions dérivables.

1 - Reconnaissance des graphes de fonctions :

Comme l'on pouvait s'y attendre et comme l'ont montré d'ailleurs plusieurs recherches (cf. [Grouws, 1992] par exemple), ce n'est pas la définition de la notion de fonction qui va être mobilisée, d'autant plus qu'elle est peu présente dans l'enseignement secondaire en France. Ce qui va sous-tendre le travail des élèves c'est plutôt la ressemblance graphique avec des objets connus. Ceci est attesté par plusieurs phénomènes :

- Les références explicites des élèves aux formes de tracés rencontrés en classe, telles que les droites, les paraboles, les sinusoïdes ou encore les hyperboles. Voici d'ailleurs quelques extraits de leurs discours pendant la recherche :

Interviewer (à propos du tracé 3)*: Donc là tu me dis « peut-être » parce que ça ressemble à des . . .*
Vincent *: Paraboles.*

Arnaud (à propos du tracé 5) : *Bein si c'est possible, c'est une équation un petit peu sinusoïdale.*

Fabien (à propos du tracé 10) : *"C'est une fonction inverse . . . oui, je pense que c'est bon"*

Les élèves s'expriment même de manière plus globale à propos de leurs références :
Vincent (à propos du tracé 5) : *"Ouais, peut-être . . . je sais pas, ça ressemble un peu plus aux fonctions qu'on a d'habitude."*
Amandine (à propos du tracé 7) : *"parce que d'habitude c'est bien rond"*.

- La confusion entre fonction et fonction dérivable : que l'on pourrait déduire de la phrase ci-dessus d'Amandine. Cette dernière, ainsi que Vincent et Arnaud ont été par ailleurs très explicites en disant (dans la seconde phase de cette partie A) que toutes les fonctions qu'ils ont vues étaient dérivables. Ceci explique leurs réponses erronées ou hésitantes concernant les tracés 3 et 7, où sont représentés des points anguleux.

- La gêne occasionnée par le cas de discontinuité correspondant à l'image 1 : la moitié des élèves (Amandine, Arnaud et Fabien) pensent qu'il manque un *segment vertical* pour relier la courbe au niveau du point en question. Cette gêne pourrait s'expliquer tout d'abord par le fait que les élèves ne rencontrent généralement que peu de fonctions discontinues du type du tracé 1. Par ailleurs, le cas le plus fréquent de discontinuité concerne les fonctions homographiques, pour lesquelles il existe une asymptote verticale.

- La difficulté à comprendre la question : le fait de ne rencontrer le plus souvent que des courbes de fonctions dérivables est tellement prégnant que la distinction même entre *graphe* et *graphe de fonction* ne semble pas avoir de sens pour certains, comme le prouve le morceau de dialogue suivant entre Amandine et l'interviewer :

Interviewer : *Quelles sont les courbes qui ne sont pas des graphes de fonctions ?*
Amandine : *Des graphes de fonctions? . . . ça veut dire quoi ?*
Interviewer : *A ton avis ? . . . est-ce que toutes les courbes sont des courbes de fonctions ?*
Amandine : *Bah oui! . . . de toute façon, on est obligé de la dessiner avec une fonction, non ?*

D'ailleurs, nous pouvons penser, en lisant la dernière phrase ci-dessus, qu'Amandine veut parler d'expression formelle quand elle parle de *dessiner avec une fonction.* Ceci nous permet de passer à un des trois pôles prévus dans l'analyse a priori et qui est le lien entre fonction et expression formelle.

En effet, l'influence de ce lien fonction - expression a été très visible chez la moitié des élèves lors du traitement du tracé 4 correspondant à un cercle. Ainsi, Vincent, Arnaud (voir ci-après) doutent et ne semblent pas avoir de moyen, autre que celui de pouvoir ou non entrer une expression, pour savoir si le cercle peut être une courbe représentative de fonction :

Vincent : *"Pour le cercle . . . on a bien vu l'équation d'un cercle . . . je sais pas si c'est . . . je sais pas comment faire pour le tracer, à la calculatrice en tout cas . . . c'est peut-être une fonction mais je ne sais pas comment faire pour la tracer."*

Interviewer : *La courbe 4 est un cercle. Est-ce qu'un cercle est la courbe représentative d'une fonction?*
Arnaud : *Mmh, non j'crois pas.*
Interviewer : *Pourquoi ?*
Arnaud : *On peut pas . . . J'sais pas, c'est peut-être une équation cartésienne . . . On ne peut pas la rentrer dans la machine, non ?*

Contrairement aux élèves cités ci-dessus, Emmanuel, Fabien et Marie-Anne ont eu un moyen fiable pour savoir si une courbe est un graphe de fonction : c'est ce qui correspond au troisième pôle prévu dans l'analyse a priori, à savoir la définition d'une fonction. Pour ces trois élèves, ce critère a permis de dire avec certitude que les tracés 4 et 9 ne représentaient pas des courbes de fonctions. Par contre, ledit critère n'a pas résisté au cas du tracé 6 qui représente une droite verticale. Ainsi, Marie-Anne a un doute qui pourrait être dû, comme nous l'avons dit dans l'analyse a priori, à l'association systématique droite - fonction. Emmanuel n'est pas très sûr de lui en disant : *"la 6, euh ! c'est une droite du type x = une valeur, donc c'est pas vraiment une fonction"*. Il utilise visiblement un résultat du cours sans connexion avec la définition de la fonction qu'il avait proposée auparavant. Fabien, quant à lui, ne fait pas non plus le lien avec la définition lorsqu'il dit qu'il faudrait un trait vertical pour compléter le tracé 1, ou encore quand il remarque dans le tracé 6 que *"pour x = 3/2, il y a une infinité de y"*.

Par ailleurs, signalons la prise en compte par Amandine d'un critère que nous n'avons pas prévu dans notre analyse a priori, et qui est le critère de symétrie. Ainsi cette élève dit :
"ça, je pense que ça va parce que c'est symétrique" à propos du tracé 5
"ça c'est bizarre . . . je doute . . . parce que d'habitude c'est bien rond, et puis en plus il y a pas de symétrie ni rien" à propos du tracé 7.

Voici un tableau récapitulatif des réponses des élèves à la question : *"Est-ce que ce tracé correspond à une courbe représentative d'une fonction ?"*. Les réponses affirmatives sont désignées par le chiffre 1, les réponses négatives par le chiffre 0 tandis que 01 désigne l'hésitation de l'élève à répondre. Les réponses correctes sont inscrites dans la deuxième colonne, alors que les cases en gris correspondent aux réponses erronées ou hésitantes.

Tracés		**Amandine**	**Arnaud**	**Emmanuel**	**Fabien**	**Marie-Anne**	**Vincent**
1	1	01	0	1	01	1	0
2	1	1	1	1	1	1	1
3	1	01	01	1	1	1	0
4	0	1	01	0	0	0	01
5	1	1	1	1	1	1	01
6	0	1	1	01	1	01	0
7	1	01	0	1	1	1	0
8	1	1	1	1	1	1	1
9	0	01	01	0	0	0	0
10	1	1	1	1	1	1	1

2 - Reconnaissance des graphes de fonctions dérivables :

Concernant la reconnaissance graphique de la dérivabilité, comme nous l'avons prévu, l'effet des fonctions rencontrées en classe a été très fort. Certains élèves, nous l'avons vu lors de l'analyse de la première phase ci-dessus, ont exprimé explicitement le fait que pour eux, toutes les fonctions sont dérivables. Ceci a entraîné une difficulté à comprendre la question relative à cette phase, ce que l'on peut voir dans le morceau dialogue suivant entre Marie-Anne et l'interviewer :

Marie-Anne : *Là, ça m'embête beaucoup, beaucoup, beaucoup. Pour moi, toute fonction est dérivable.*

Interviewer : *Pour toi, toute fonction est dérivable.*

Marie-Anne : *Bon là, je comprends pas bien la question.*

Interviewer : *Donc, à ton avis quand tu as une fonction, elle est forcément dérivable ?*

Marie-Anne : *Ben, si elle est définie par une formule f(x) = tant, pour moi, je dois arriver à calculer la dérivée.*

Nous voyons à travers la phrase ci-dessus, la présence d'un point de vue opératoire sur la dérivée. Ce point de vue tend à s'installer usuellement quand le concept de dérivée est abordé en classe dans sa dimension outil, via la notion de fonction dérivée. Chez Marie-Anne, qui est une bonne élève, ce point de vue semble dominant dans son rapport à la dérivée, et le caractère de non-dérivabilité que peuvent avoir certaines fonctions ne semble pas avoir un sens, bien qu'en classe des fonctions non dérivables aient été traitées (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 5*). Ce type de rapport se manifeste également chez Arnaud :

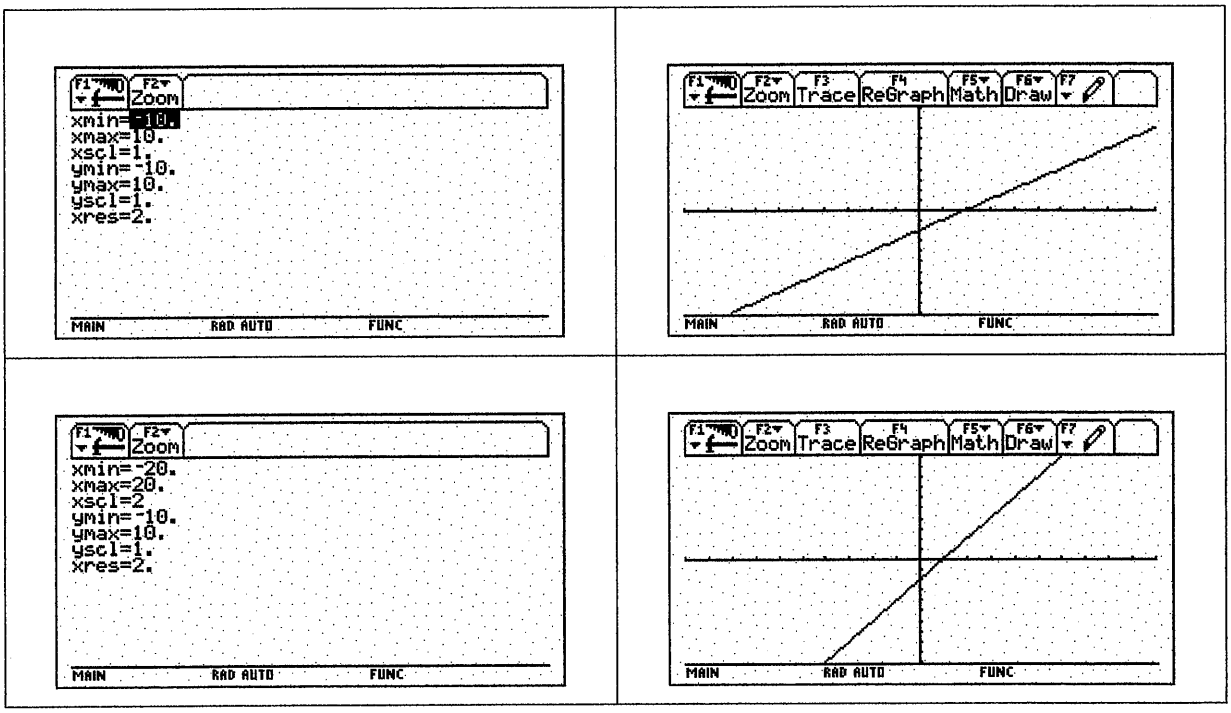
Interviewer : *Est-ce que tu peux dire si une fonction est dérivable ou pas à partir de la forme de la courbe ?*

Arnaud : *Je sais pas . . . je fonctionne avec toutes les équations . . . parce qu'on n'a pas vu d'équation où elle n'est pas dérivable, sauf les équation irrégulières . . . les fonctions irrégulières comme sinx/x.*

Par ailleurs, ce n'est pas le seul type de rapport à la dérivée que nous ayons repéré. Chez Amandine prévaut le point de vue également opératoire mais qui consiste en le calcul d'une *limite* et qui donne le nombre dérivé en un point donné.

En fait, si l'on excepte Emmanuel, aucun élève ne semble disposer de technique individuelle de visualisation de la non-dérivabilité, ce qui nous semble s'expliquer vraisemblablement par les raisons évoquées dans notre analyse a priori. Pour ce qui est d'Emmanuel, il a repéré l'existence de demi-dérivées à droite et à gauche pour les tracés 3 et 7, mais pas pour le tracé 1, sans doute à cause de la discontinuité qui représente un cas inhabituel pour les élèves. Par ailleurs, questionné sur la dérivabilité aux points anguleux, il n'a pas su faire le lien entre l'existence de demi-dérivées et celle du nombre dérivé. Nous pouvons penser que sa technique de reconnaissance repose plutôt sur une analogie avec les cas de demi-tangentes rencontrés.

Concernant les connaissances-machine, nous pouvons déduire des réponses des élèves que certains automatismes ont dû s'installer concernant la lecture graphique. En effet, Arnaud, Fabien et Marie-Anne considèrent que la droite correspondant au tracé 6 a pour équation x=1.5. Remarquons que cela n'a rien d'évident, puisque la lecture dépend des informations contenues dans WINDOW. Ainsi, en prenant une unité de graduation sur l'axe des abscisses xscl égale à 2 par exemple et un intervalle [xmin ; xmax] = [-20 ; 20], l'on obtient le même écran. Pour illustrer ceci, voici la représentation graphique de la fonction $x \to x-2$ lorsque l'unité de graduation xscl vaut respectivement 1 et 2, et l'intervalle [xmin ; xmax] correspond respectivement à [-10;10] et à [-20;20]

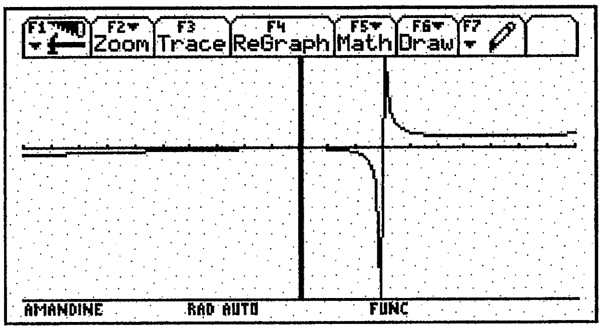


Nous pouvons penser que l'absence de prise en compte des informations contenues dans WINDOW a été favorisée par une utilisation presque systématique de l'ostensif *ZoomStd* qui donne un écran visiblement identique à celui du tracé 6. Cependant, nous retrouvons cette négligence de l'importance de WINDOW, et donc de connaissances-machine de niveau 2, de manière plus flagrante chez Marie-Anne et Emmanuel par exemple qui considèrent que le tracé 1 est coupé en x = 1, sans mentionner le fait que cette valeur dépende de WINDOW.

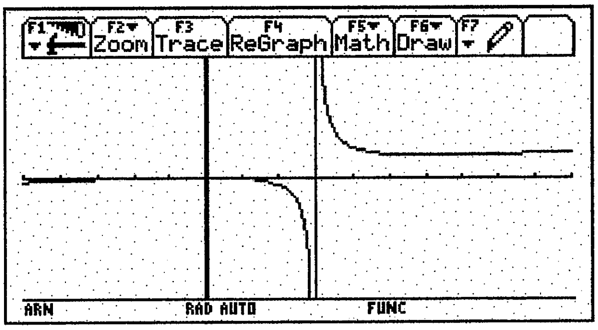
Partie B :

1.Tracer la courbe représentative de f

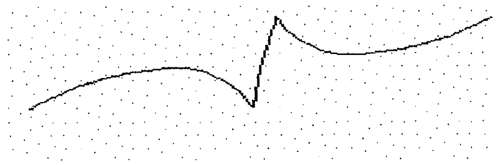
- Amandine effectue tout d'abord un *ZoomStd.* N'ayant pas d'idée a priori sur le comportement de la courbe, elle utilise la commande *ZoomFit* comme une sorte de *baguette magique* qui lui permettrait de débloquer la situation. En effet, après avoir fait le tracé en *ZoomStd,* elle répond à l'interviewer qui lui demande si elle est satisfaite du graphe: *"Non, c'est pas . . . on peut le mettre* (parlant du tracé) *plus bas peut-être pour voir comment ça fait . . . non, mais enfin ça fait pas grand chose . . . j'sais pas . . . ZoomFit . . . enfin je tâtonne".*



- Arnaud effectue tout d'abord un *ZoomStd* après avoir défini la fonction directement dans Y=. Pour avoir une idée un peu plus globale sur la courbe, il agrandit manuellement dans WINDOW les intervalles [xmin,xmax] et [ymin,ymax]. En fait, il met en œuvre la technique de cadrage manuel qui a la même fonction qu'un *ZoomOut* mais avec un rapport plus petit (cette technique a déjà été observée l'année précédente dans *Genèses Instrumentales*). En observant le tracé obtenu, il déduit apparemment que s'il existe un autre "morceau de courbe", il faudrait le chercher vers le haut ou vers le bas et non à gauche ou à droite, ce qui explique qu'il réduise l'intervalle [xmin,xmax] et agrandisse [ymin,ymax]. Il essaie également de centrer le tracé aux environs du point (3,0). Il obtient alors le tracé suivant :

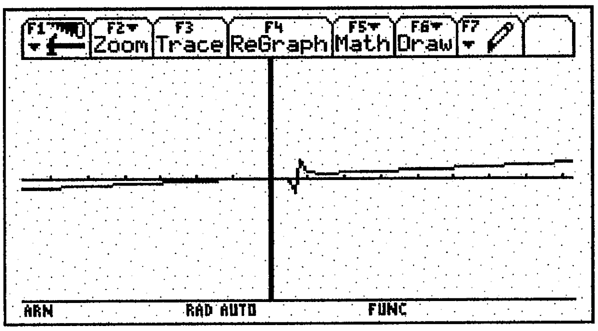


Le tracé obtenu le pousse à conjecturer avec plus de précision le comportement de la courbe, il pense alors que celle-ci aurait la forme suivante :

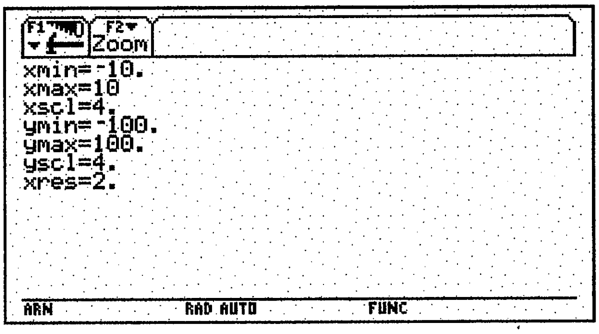


Ainsi, la courbe aurait deux "sommets" au niveau de x=3 et passerait de l'un à l'autre en croissant.

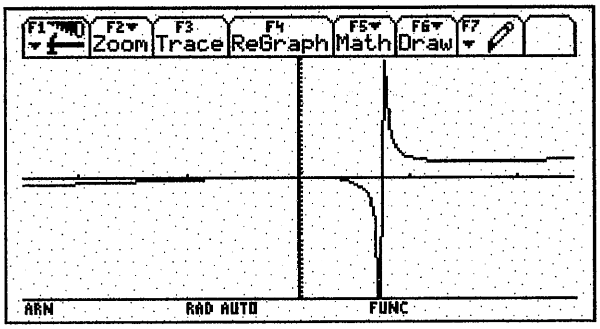
Pour vérifier cette hypothèse, il effectue un *ZoomOut* sans changer le centre (qui est (2.5,0)) et la machine affiche :



Convaincu de la validité de sa conjecture, compte tenu du tracé obtenu, il essaie d'affiner le tracé en réduisant le cadre dans WINDOW de la manière suivante :

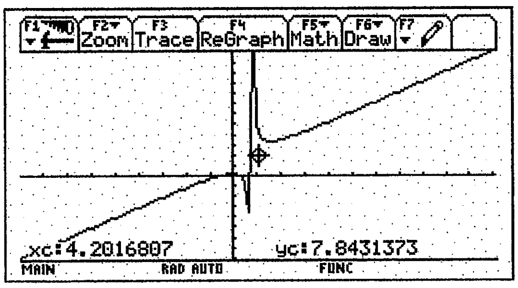


Ce qui lui donne la représentation suivante sur laquelle il s'arrête satisfait :



En fait, les changements effectués dans WINDOW relèvent du niveau 2 des connaissances-machine (correspondant aux contraintes d'usage); et sont sous-tendus uniquement par la volonté de retrouver la forme de la courbe représentative de la fonction $x \to \frac{1}{x}$, sans connexion aucune avec l'expression algébrique de la fonction.

- Emmanuel fait tout d'abord un tracé en *ZoomStd.* Soupçonnant apparemment l'existence d'un autre morceau de la courbe vers le haut et vers la droite , il décide d'effectuer un *ZoomOut* en choisissant comme nouveau centre un point proche de (4.2,7.8) et obtient :



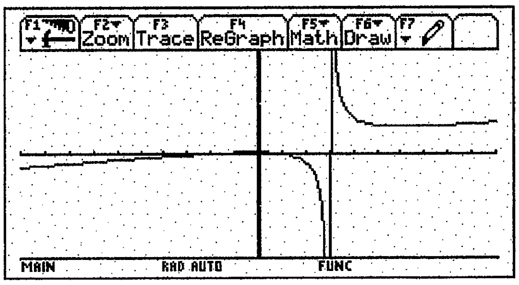
Il est alors satisfait de son tracé.

Là aussi, c'est dans le but de récupérer une partie de la courbe qu'Emmanuel a effectué des manipulations qui correspondent au niveau 2 des connaissances-machine (par le changement du centre pour *ZoomOut*). Son hypothèse sur la forme de la courbe qui a sous-tendu le choix du centre de *ZoomOut* nous semble due probablement à la forme des fonctions rationnelles rencontrées en classe (telles que $x \to \frac{1}{x}$ par exemple)

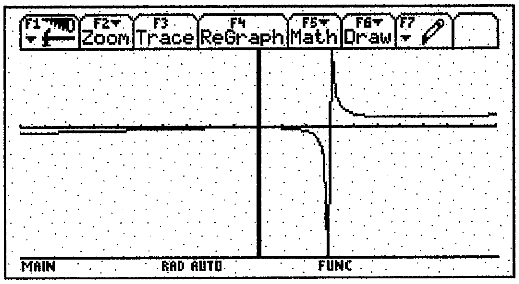
Interviewer : . . . et tu as essayé de mettre un centre

Emmanuel : Ben, j'ai mis à peu près, sur l'asymptote, un peu plus haut que là où ça commençait à descendre

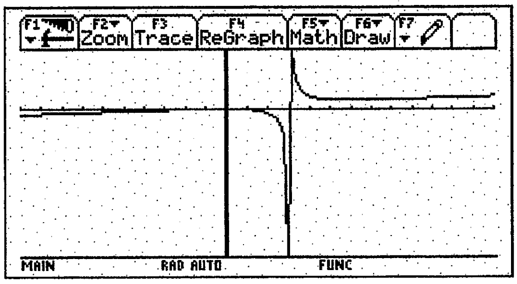
- Commençant par rentrer l'expression de la fonction directement dans Y=, Fabien fait le tracé tout d'abord en *ZoomStd.* Pensant trouver un autre bout de courbe vers le haut ou vers le bas, il agrandit l'intervalle [ymin,ymax] qui devient [-50,50]. Le tracé obtenu est le suivant :



Il pense alors à faire un *ZoomFit* :



Le tracé obtenu semblant confirmer le précédent, il cherche à voir ce qui se passe plus à droite de x=10. Il change ensuite xmax en 13 et effectue à nouveau un *ZoomFit* :

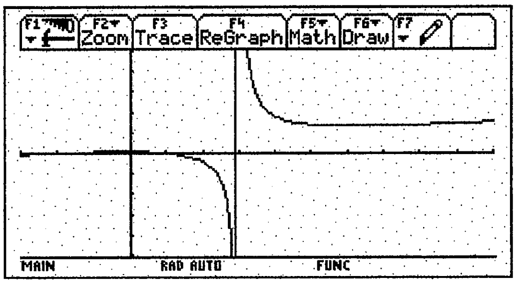


Il est alors satisfait (*"ça, ça devrait être la bonne (courbe)"* dit-il).

Nous pouvons remarquer que l'emploi de *ZoomFit* n'a pas été systématique, d'autant plus qu'il englobe la précédente manipulation. En effet, cette dernière avait pour objectif de voir ce qui se passe pour les x compris entre –10 et 10, au-delà de [-10,10] sur l'axe des y, alors que *ZoomFit* appliqué sur les mêmes x calculait, par définition, automatiquement ce qui se passait pour les y correspondants. Par conséquent, le cadrage manuel effectué au début était inutile.

Soulignons ici la mobilisation du niveau 2 correspondant aux contraintes d'usage, à travers les changements effectués dans WINDOW, que ce soit pour le cadrage manuel ou pour le choix des x sur lesquels doit s'effectuer le *ZoomFit.* Nous pouvons penser que ce choix fut motivé dans un premier temps par la volonté de voir ce qui se passe à droite de x=10, la courbe ayant l'air de changer de variation au voisinage proche de cette valeur. Nous pouvons également penser que ce choix fut piloté par l'apparente symétrie de la courbe par rapport au point (3,0), vu que Fabien a agrandi l'intervalle initial de 3 unités. Dans les deux cas, la mise en œuvre du deuxième niveau de connaissances-machine est sous-tendue par des critères perceptifs.

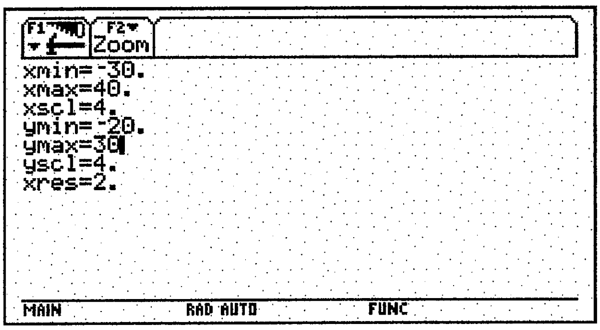
- Marie-Anne fait tout d'abord un *ZoomStd.* Elle effectue ensuite un *ZoomFit* qui semble avoir ici la fonction de *ZoomOut* (*"J'ai fait ZoomFit pour voir la tête qu'elle (la courbe) avait de loin"* dit-elle). Elle recadre ensuite en réduisant les intervalles [ymin,ymax] et [xmin,xmax] et en prenant yscl=10 afin de mieux percevoir les graduations sur l'axe des y (niveau 2 des connaissances-machine).

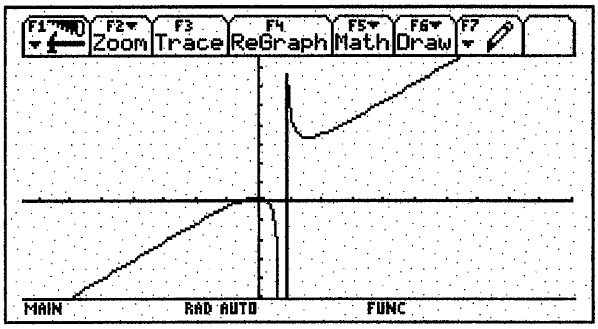


Le choix des intervalles pour les x et les y semble piloté par l'impression que le tracé est symétrique par rapport au point (3,0).

Signalons qu'avant de rentrer la fonction dans Y= à l'emplacement de y2, Marie-Anne a déselectionné une fonction qui se trouvait antérieurement définie dans y1, ce qui illustre la mobilisation du niveau 2 des connaissances-machine. Une autre illustration, assez inhabituelle en classe et même dans le travail individuel - observé - des élèves en est celle du changement de yscl que Marie-Anne a effectué dans WINDOW (voir ci-dessus).

- Vincent commence par tracer sa courbe en *ZoomStd.* Il dit alors qu'il devrait y avoir un autre bout vers le haut. Pour le chercher, il effectue un *ZoomOut* en choisissant un nouveau centre au voisinage du point (3,0). Il obtient alors le bout de courbe recherché, et décide de *"grossir un peu"* son tracé en réduisant [xmin,xmax] et [ymin,ymax] tout en prenant des valeurs entières.





Vincent a effectué des manipulations machine de niveau 2 : tout d'abord, par le changement du centre de *ZoomOut* où il semblait prévoir que ce point pouvait être au centre du tracé global. Ensuite, par les changements effectués dans WINDOW mais cette fois-ci dans le but de mieux visualiser le tracé obtenu (*"grossir un peu le tracé"*).

Observons maintenant ce qui s'est passé juste après :

Interviewer : Là, il y a un petit bout (en désignant sur le tracé le voisinage de x=3), c'est en x égal à combien à peu près?
Vincent : Euh, je sais pas, c'est... un peu moins de 1
Il va alors dans WINDOW...
V: Non c'est un peu moins de 4
I: Alors est-ce que ce bout appartient à la courbe?
V: La droite? (en désignant le bout)
I: Oui
V: Non, non ça fait pas partie. C'est simplement pour montrer qu'il y a pas de valeur.. c'est impossible à ce moment là, c'est pas défini.
I: Est-ce qu'on peut faire disparaître ce bout qui n'appartient pas à la courbe?
V: Je crois qu'en lui (en parlant de la machine) faisant tracer point par point, il...
I: D'accord, et tu te rappelles de la commande... ?
V. n'a pas de mal à trouver la commande F6-Dot dans Y=.

Nous remarquons tout d'abord la présence du niveau 2 à deux reprises : au début, où l'on voit le danger potentiel de ne pas prendre en compte ce niveau (ici à travers la considération de xscl) dans la lecture graphique par exemple, à la fin, où Vincent en adéquation avec son profil, montre sa maîtrise de la machine quand il indique rapidement la commande permettant de contrôler le "style de tracé".
Par ailleurs, pour justifier que le "bout" n'appartient pas à la courbe de la fonction, Vincent tient au début un discours que l'on peut qualifier d'anthropomorphique ("... *c'est simplement pour montrer qu'il y a pas de valeur*") où il semble situer la justification au niveau des contraintes internes (niveaux 3 et/ou 4), sur lesquels il n'a a priori pas d'emprise. C'est là que l'interviewer tente de le ramener au niveau 2 en lui demandant s'il n'existe pas de technique qui permette d'agir sur le style de tracé.

Voici une synthèse par élève, des manipulations graphiques liées à cette tâche :

Amandine	*ZoomStd - ZoomFit*
Arnaud	*ZoomStd - W ✦ - ZoomOut - W ✦*

Emmanuel	*ZoomStd - ZoomOut*
Fabien	*ZoomStd - W ▴▾- ZoomFit - W ▸- ZoomFit*
Marie-Anne	*ZoomStd - ZoomFit - W ✦*
Vincent	*ZoomStd - ZoomOut - W ✦*

Successions d'ostensifs graphiques mis en œuvre pour le tracé de la fonction

Légende	
W◂	Changement manuel de xmin dans WINDOW
W▸	Changement manuel de xmax dans WINDOW
W▾	Changement manuel de xmax dans WINDOW
W▴	Changement manuel de xmax dans WINDOW
W✦	Changement manuel de xmin, xmax, ymin et ymax dans WINDOW

Analyse :

Tous les élèves commencent par faire un tracé en *ZoomStd*, ce qui est prévisible compte tenu du rapport institutionnel au tracé-TI92 (cf. *Dimension Institutionnelle - Conclusion*).

Par ailleurs, nous pouvons classer les techniques et stratégies en deux catégories :

- Les élèves qui ont utilisé l'ostensif *ZoomFit* : Amandine, Fabien et Marie-Anne ont réagi conformément à nos prévisions, sauf qu'ils ne partageaient pas les mêmes motivations. En effet, Amandine a utilisé cette commande systématiquement mais sans objectif préalable. Ainsi, semble-t-elle agir parce qu'elle pense qu'il faut utiliser une des commandes familières, à défaut d'avoir une idée sur le choix de la fenêtre. En fait, son utilisation illustre un des phénomènes que nous avions repérés l'année précédente : le *zapping*.

Quant à Fabien, son recours non systématique à *ZoomFit* semble dû au fait qu'il n'est pas très habitué à utiliser cette commande dans son travail privé. Par ailleurs, Marie-Anne instrumente ladite commande comme un *ZoomOut*, ce qui correspond à l'utilisation en classe.

- Les élèves qui ont utilisé *ZoomOut* : ceux-là (Arnaud, Emmanuel et Vincent) n'ont donc pas agi comme nous l'avions prévu dans notre analyse a priori.

Cependant, de manière globale, tous les élèves, sauf Amandine (et peut-être Fabien), ont opté pour une technique qui consiste à agrandir la fenêtre de tracé à la manière d'un *ZoomOut* dans un premier temps, quitte à réduire un peu la fenêtre après (rappelons que nous avons déjà mis en évidence cette technique chez certains élèves l'année précédente (Cf *Genèses*

Instrumentales - Année 1)). Ces manipulations semblent sous-tendues par les mêmes processus : *dès que l'on repère un embryon de courbe qui rappelle, ne serait - ce que partiellement, certaines des courbes rencontrées antérieurement, on essaie de récupérer d'autres morceaux en cherchant par exemple du côté où l'écran semble "vide"*. Nous retrouvons donc, comme nous l'avons mis en évidence dans la partie A de cet entretien, cette recherche d'analogie avec une forme connue, ce qui nous semble définir un "tracé satisfaisant". Tout ceci nous explique cette tendance, contrairement aux prévisions de l'analyse a priori et aux résultats de l'année précédente, à utiliser *ZoomOut* aux dépens de *ZoomFit*. En effet, le fonctionnement de ce dernier ostensif n'étant pas vraiment contrôlable (ce qui est dû à un manque de connaissances-machine de niveau 2 et 3 liées à l'utilisation de cet ostensif), les élèves préfèrent opter pour un ostensif dont ils maîtrisent mieux l'effet pour qu'ils puissent se rapprocher le plus possible du prototype de courbe visé. En d'autres termes, les élèves ont un projet de courbe et vu que *ZoomFit* risque de les en éloigner, ils optent pour *ZoomOut* ou même des changements manuels dans WINDOW pour pouvoir contrôler tout le processus qui les rapprochera de la forme souhaitée. D'ailleurs, presque tous les élèves (Arnaud, Emmanuel, Fabien et Marie-Anne) semblent vouloir obtenir une courbe symétrique et centrée au milieu de la fenêtre comme celle par exemple de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui a déjà été traitée en classe, tandis que Vincent semble prendre comme référence les courbes de fonctions homographiques déjà vues en classe, autres que $x \mapsto 1/x$. Amandine, quant à elle, semble utiliser *ZoomFit* sans avoir d'idée a priori sur le comportement de la courbe, ni même se référer à des critères perceptifs. Ceci dit, aucun élève ne semble tenir compte de l'expression algébrique de la fonction.

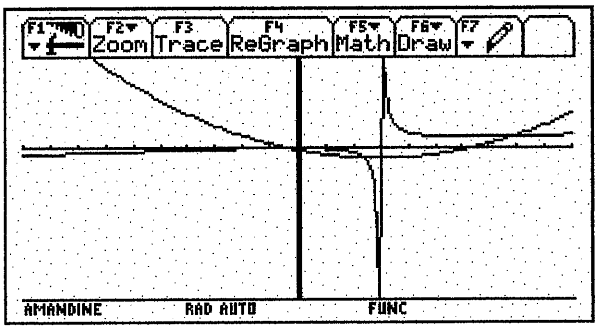
Soulignons enfin que Fabien et Arnaud ont défini la fonction directement dans l'application Y= sans passer par HOME, alors que, comme nous l'avons vu dans *Dimension Institutionnelle*, tout travail en classe avec les graphiques commençait par la définition de la fonction dans HOME. C'est sans doute parce qu'ils doivent considérer que cette tâche de "tracé" ne nécessitait pas le passage par HOME, ce qui est a priori raisonnable.

2. Etudier les variations de la fonction f

Amandine

- Amandine commence par calculer la dérivée dans HOME avant de chercher ses zéros avec

Solve. Ensuite elle étudie son signe en p/c (à l'aide d'un tableau de signes) après avoir déterminé celui du trinôme du 2^{nd} degré qu'est le numérateur (elle met directement le signe du trinôme dans le tableau). Avant de déduire les variations de la fonction et ayant remarqué que le signe de la dérivée correspondait à celui du numérateur, elle fait tracer à la TI92 la courbe de la fonction correspondant audit numérateur, à savoir $x \mapsto x^2-6x-1$ sur le même écran où la courbe de f est tracée. Elle obtient alors ceci :



Auparavant, elle a calculé dans HOME des valeurs approchées des zéros de la dérivée en utilisant ♦ENTER. Elle trace ensuite un tableau de variation où elle prend en compte la singularité en x=3. Elle met tout d'abord le signe de f'(x) suivant les intervalles et en déduit les variations de f tout en contrôlant à l'aide du tracé ci-dessus.

- Amandine a mis en œuvre une stratégie que l'on pourrait classer dans le $3^{ème}$ pôle (Cf *$1^{ère}$ année – résultats*). En effet, toute la résolution a lieu dans l'application HOME ou en p/c et l'application graphique n'a qu'un rôle de contrôle. Le recours au p/c pour l'étude du signe de la dérivée semble dû davantage à des raisons d'économie (Amandine a immédiatement déterminé le signe du trinôme du 2^{nd} degré sans doute en se basant sur celui du coefficient du monôme de plus haut degré) qu'à l'effet du rapport institutionnel à l'objet "trinôme du 2^{nd} degré", tel que ce fut le cas pour beaucoup d'élèves au deuxième entretien de l'année précédente. Ainsi, Amandine a opté pour une des stratégies prévues par l'analyse a priori. Quant à l'application GRAPH, son statut semble clair : c'est un outil de contrôle.

Arnaud

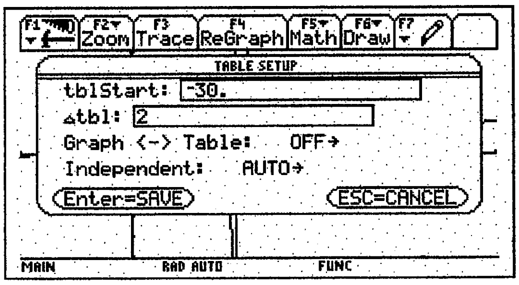
- Arnaud commence par définir la fonction dans l'application HOME avant de la dériver. Il opte alors pour une utilisation de TABLE pensant que la résolution sera ainsi plus économique.

Arnaud : Il suffit de faire la table, quoi.

Interviewer : Ah si tu préfères . . . et le calcul de dérivée?

Arnaud : Bah non, en fait c'est pas utile pour vérifier sur la calculatrice.

Il va alors dans TblSet et fait les changements suivants :



Il parcourt ensuite TABLE de -30 vers 0 tout en faisant le commentaire suivant :

Arnaud : Donc là, la courbe est décroissante de - ∞ jusqu'à . . .

Et hésitant, il enchaîne :

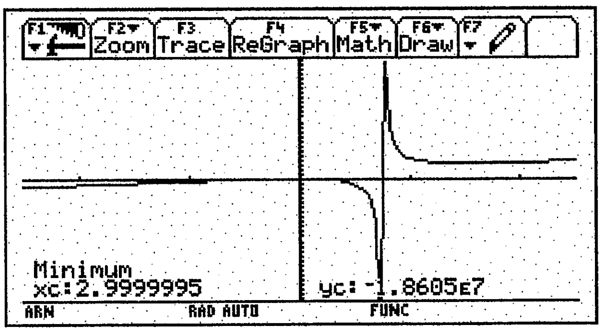
A : jusqu'à 0? . . . jusqu'à - 4?

Avant de conclure, visiblement désarmé :

A: On voit pas assez!

Nous voyons ici que malgré une mobilisation d'une connaissance-machine de niveau 2 à travers le choix de TblStart et du pas, celle-ci ne peut vraiment être efficace que si elle est sous-tendue par des connaissances mathématiques, ce qui ne semble pas être le cas ici notamment dans le choix du pas.

Arnaud se propose alors de procéder graphiquement. Il cherche par l'ostensif *F5-Minimum* "le" minimum qui serait pour lui en bas du segment vertical lequel, rappelons-le fait partie de la courbe selon lui. La machine lui affiche alors le résultat suivant :



Il en déduit alors ceci : "Donc le minimum fait deux virgule . . . trois, quoi! Donc elle est décroissante jusqu'à 3 . . . non compris, elle est pas définie sur 3 et . . . de 3 à + ∞ elle est croiss . . . décroissante."
Ayant repéré la singularité sur l'expression de f(x), il en déduit que la fonction croît de - ∞ jusqu'à 2.9999995, n'est pas définie en 3 puis saute au maximum d'où elle décroît.

Il agrandit ensuite l'intervalle [xmin, xmax] et découvre que son tableau de variation est incorrect. Il conclut alors :

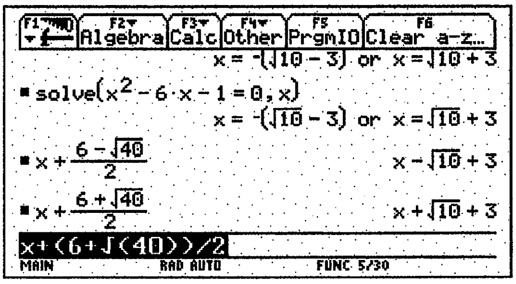
Arnaud : Il valait mieux calculer la dérivée !
Interviewer : Tu as calculé la dérivée, mais qu'est-ce qui te reste à faire ?
A : Trouver les solutions pour f'(x)=0 et puis quand f'(x) est à 0, f'(x) change de signe.

Il calcule alors les zéros de f'(x) à l'aide de la commande *Zeros*, puis utilise successivement les commandes *Factor* et *Factor(. ,x)*.
Il établit ensuite un tableau de signes en p/c où la singularité est correctement intégrée et d'où il déduit les variations de la fonction. Signalons que pour chercher les signes de chacun des facteurs polynomiaux du premier degré, il a calculé dans l'application HOME la valeur approchée en un point de chaque intervalle.

- Nous pouvons penser que la stratégie pré-analyse choisie par Arnaud au début de son travail a dû être efficace dans les cas de fonctions traités antérieurement. Par la suite, sa gestion correcte de la résolution dans le registre formel montre que son choix stratégique (travail dans TABLE ou GRAPH) était motivé par des raisons d'économie, d'autant plus que le contrat ici permet l'utilisation exclusive de la machine.

Emmanuel

- Emmanuel commence par calculer la dérivée à l'aide de la commande ad hoc. Ensuite il utilise la commande *Factor* mais la machine lui renvoie la même expression. Et au lieu d'utiliser la commande *Factor(.,x)* – comme il était prévu dans l'analyse a priori -, il opte pour une recherche p/c des zéros du numérateur par la méthode du discriminant et trouve les valeurs $\frac{6-\sqrt{40}}{2}$ et $\frac{6+\sqrt{40}}{2}$. Il factorise ensuite en p/c mais se trompe sans s'en rendre compte: il écrit (x+$\dfrac{6-\sqrt{40}}{2}$)(x+$\dfrac{6+\sqrt{40}}{2}$). Pour contrôler ces résultats, il reprend la machine en utilisant la commande *Solve,* mais les résultats affichés ne ressemblent pas à ceux qu'il a trouvés en p/c (Cf ci-dessous). Après un moment d'hésitation, il rentre dans HOME successivement les deux facteurs trouvés en p/c et la machine les transforme (après activation de ENTER) en faisant apparaître $\sqrt{10}$ comme suit :



Il substitue alors dans sa factorisation en p/c les expressions données par la machine aux anciennes et entame un tableau de signes sans tenir compte de la singularité en x=3. Il place les facteurs simples du numérateur mais, pour en extraire les zéros respectifs, il commet une fois de plus une erreur de signe qui, par un effet de double-erreur, lui permet d'avoir les zéros corrects de la dérivée. Il déduit alors du tableau de signes les variations de f.

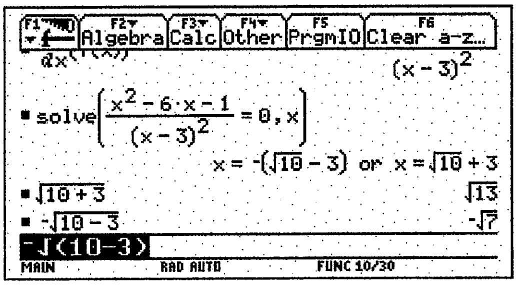
x	-∞		-($\sqrt{10}$ -3)		$\sqrt{10}$ +3		+∞
(x-3)²		+		+		+	
x-$\sqrt{10}$ +3		–		–		+	
x+$\sqrt{10}$ +3		–		+		+	
f'(x)		–		+		+	
f(x)		↘		↗		↗	

Ayant obtenu son tableau de variation, il le compare au tracé précédemment obtenu et devant l'incohérence entre les deux, il intègre correctement la valeur x=3 à son tableau.

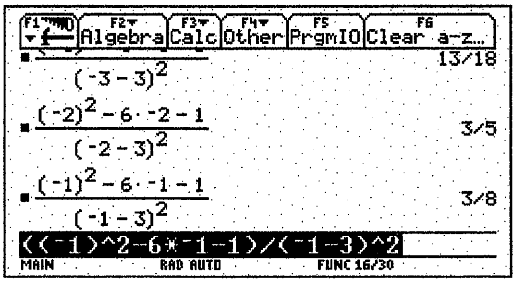
- Globalement, la stratégie d'Emmanuel se situe du côté du 3ème pôle où toute la résolution se passe entre l'application HOME et l'environnement p/c et où le contrôle des variations se fait par le graphe. Cependant sa stratégie aurait pu être beaucoup plus économique si certaines connaissances étaient disponibles. D'un côté c'est une connaissance-machine, en l'occurrence le recours à la commande *Factor(.,x)*. C'est la non-disponibilité de cette dernière qui l'a conduit à travailler en p/c. D'un autre côté, c'est l'erreur qu'il a commise et qui est de nature mathématique (ce qui peut s'expliquer par son profil mathématique, Emmanuel étant un élève moyen) qui l'a perturbé en compromettant par moments son étude de variation. Signalons au passage, sa réaction efficace face à la différence des formes entre ses résultats-p/c et ceux de la machine et son utilisation de ENTER comme manipulation permettant de transformer des expressions, tout ceci semble être la conséquence des choix de l'enseignante de travailler les expressions algébriques (Cf *Dimension Institutionnelle-Observation* 1).

Fabien

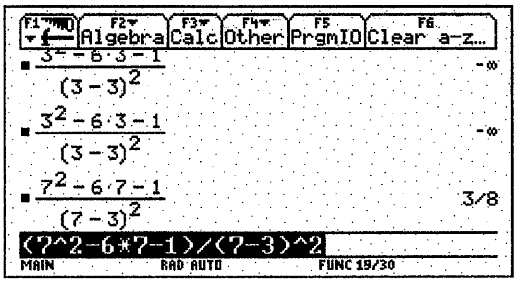
- Fabien ne définit pas la fonction dans HOME. Pour calculer la dérivée à la TI92, il tape toute l'expression en oubliant de préciser la variable, ce qui entraîne l'affichage d'un message d'erreur. Il rectifie puis cherche les zéros à l'aide de *Solve.* Il écrit ensuite en p/c : *"la dérivée s'annule et change de signe"*. Pour étudier le signe dans chaque intervalle, il semble utiliser le théorème-en-acte suivant : "*Dans chacun des intervalles, le signe de la dérivée est constant*". Ceci le conduit à prendre une valeur dans chacun des intervalles (sans tenir compte de la singularité en 3) et à calculer la dérivée en ce point. Pour cela, il essaie tout d'abord d'avoir des valeurs approchées des zéros trouvés auparavant, mais commet des erreurs en les recopiant :



En fonction des valeurs trouvées, il se propose de calculer la dérivée en -3, en -2 et en -1 en substituant chaque fois dans l'expression littérale de la fonction dérivée :



Fabien rectifie ensuite ses erreurs grâce à l'intervention de l'interviewer et, en reprenant la même démarche, choisit comme nouvelles valeurs 3 et 7. Il obtient alors :



A peine étonné par la valeur obtenue pour x=3, il conclut ainsi :
"Ouh! la . . . c'est négatif, on va dire que c'est négatif". En fait, il a commencé par chercher la valeur de la dérivée en 3 et la machine a répondu : -∞. Il a alors utilisé ♦ENTER pour la même expression et la réponse de la machine a été cette fois-ci : *undef.* Il semble avoir opté pour le signe négatif à cause de la présence de -∞.

Il détermine enfin le signe de la dérivée comme suit :
sur]-∞; -($\sqrt{10}$ - 3)[f'(x)>0 f(x)↗
sur]-($\sqrt{10}$ - 3); $\sqrt{10}$+3[f'(x)<0 f(x)↘
sur] $\sqrt{10}$+3;+∞[, f'(x)>0 f(x)↗

Devant l'incohérence entre son tracé et son étude de variation, il propose l'explication suivante : *"Eh ben j'ai l'impression qu'il me manque des racines à la dérivée. J'aurais dû trouver 4 solutions, je pense."*
A la suite de l'intervention de l'interviewer, il y a eu ce dialogue :

Fabien : non, il peut avoir (le trinôme au numérateur) que deux racines.
Interviewer : Et le dénominateur, qu'est-ce qu'il lui arrive au dénominateur?

F : Pour x=3, f'(x)=0 car le dénominateur est égal à 0 et quand le dénominateur est égal à 0, c'est une fonction nulle.

I : Une fonction dont le dénominateur est égal à 0 . . . ?

F : C'est une fonction nulle

I : Tu en es sûr de ça? Est-ce que tu peux regarder sur la machine? Quand tu demandes la valeur de la fonction pour 3, qu'est-ce qui se passe?

F : pour 3 ?

I : oui

F : ce que j'aurais pu faire aussi, c'est rentrer la fonction f(x) avec Define et puis après remplacer.

I : Oui

Fabien définit alors la fonction puis dit,

F : Après je sais plus trop comment on fait, là.

I : Qu'est-ce que tu ne sais pas trop?

F : remplacer x par une fonction, il faut mettre if . . .

I : pourquoi tu veux faire if ?

F : pour remplacer x par 3

Et là au lieu de faire simplement f(3), il essaie Solve f(3).

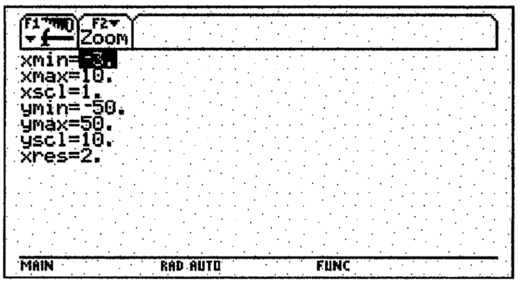
- Nous voyons donc là que des connaissances mathématiques élémentaires dans le domaine fonctionnel ne semblent pas disponibles chez Fabien, ce qui a engendré non seulement une perte de temps - voir les substitutions numériques - mais également un faux diagnostic. En effet, pour interpréter l'incohérence entre son étude de variation et son tracé, il a mis en doute sa recherche des racines de la dérivée - qui était correcte – faute d'avoir repéré la singularité en x=3. Ceci nous donne une idée sur le statut fort que peut avoir l'application GRAPH dans la prise de décision.

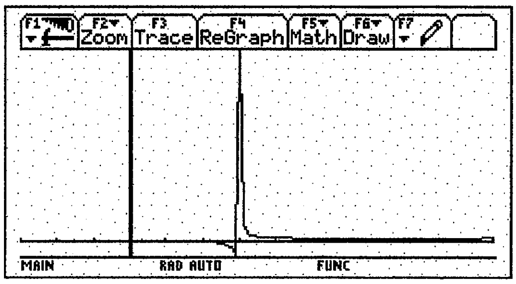
Par ailleurs, il nous est difficile de classer la stratégie de Fabien par rapport aux principaux pôles stratégiques décrits l'année précédente, dans la mesure où : d'une part, en prenant en considération le fait que la résolution s'est effectuée dans l'application HOME et en p/c avec un contrôle dans GRAPH, nous aurions tendance à le placer du côté du 3ème pôle. D'autre part, compte tenu du fait qu'il n'a pas défini la fonction dans HOME et qu'il a effectué les coûteuses substitutions pour chercher l'image en des points (d'ailleurs, ce travail formel révèle la faible maîtrise du fonctionnel chez Fabien). Cependant, nous penchons plutôt vers l'hypothèse que son instrumentation se situe du côté du pôle 3, mais qu'elle est alourdie et perturbée par une

non-disponibilité de connaissances mathématiques et machine. Nous voyons ainsi l'importance du profil mathématique dans l'utilisation de la machine.
Signalons enfin que Fabien est le seul à avoir fait une erreur de syntaxe (ce qui concerne le niveau 1 des connaissances-machine) lors de cet entretien et ce, en oubliant d'indiquer la variable lorsqu'il a voulu dériver l'expression de la fonction.

Marie-Anne

- Marie-Anne utilise la machine pour calculer la dérivée et pour factoriser à l'aide de l'ostensif *Factor* qui lui retourne la même expression. Ne pensant pas à utiliser *Factor(.,x)*, elle décide de chercher les zéros du numérateur via l'ostensif *Zeros*. Ensuite, elle factorise en p/c l'expression de la dérivée en notant que la fonction n'est pas définie en x=3. Doutant de sa factorisation, elle pense à utiliser *Factor(. , x)* pour en vérifier la validité. Elle retourne alors en p/c pour étudier le signe de la dérivée en utilisant un tableau de signes où n'apparaît pas la valeur x=3. Elle obtient alors un tableau de variation qui ne correspond pas à son tracé. Après quelques hésitations, elle intègre correctement la valeur x=3 à son tableau et dit :" *Donc tout à l'heure je n'avais pas pris la bonne fenêtre* ". Elle entreprend alors d'améliorer son tracé. Elle change tout d'abord [xmin, xmax] en fonction du tableau de variation avant d'effectuer un *ZoomFit*.





- Comme Emmanuel, Marie-Anne met en œuvre une stratégie qui se situe autour du pôle 3.

En effet, toute la résolution a lieu dans l'application HOME ou en p/c. Marie-Anne n'a pas mobilisé l'ostensif *Factor(.,x)* dans un premier temps, mais au lieu d'utiliser la méthode du discriminant (comme Emmanuel) elle a opté pour la mobilisation de l'ostensif *Zeros*. Contrairement à Emmanuel, sa méthode est plus économique, ce qui nous semble dû à son niveau mathématique plus élevé. C'est d'ailleurs ce qui lui a permis de déceler rapidement l'oubli de l'intégration de la singularité (qu'elle avait remarquée au début de son étude) au

tableau de variation. Par ailleurs, son utilisation de l'application graphique pour le contrôle du tableau met en jeu le niveau 2 des connaissances-machine (changement de [xmin,xmax] avant d'effectuer un *ZoomFit*). La mobilisation de ce niveau 2, à travers le choix de xmin et xmax, est sous-tendue par des connaissances mathématiques, en l'occurrence les informations contenues dans le tableau de variations, ce qui laisse penser que le fonctionnement de l'ostensif *ZoomFit* est bien intégrée.
Revenons enfin sur l'utilisation de l'ostensif *Factor(.,x)*. Le fait que Marie-Anne n'ait pas pensé à l'utiliser systématiquement après l'échec de la mobilisation de *Factor*, nous semble indiquer le manque de familiarité avec *Factor(.,x)* à cette époque de l'année, qui semble dû à son statut mathématique, lequel est loin d'être clair.

Vincent

Vincent commence par calculer la dérivée à la TI92. Il fait ensuite l'étude entièrement dans l'environnement p/c en utilisant la méthode du discriminant. Il établit un tableau de variation correct en tenant compte de la singularité en x=3.

Nous allons maintenant synthétiser dans un tableau l'ensemble des ostensifs mis en œuvre par chaque élève pour l'étude des variation, et ce dans chaque application. Nous mentionnerons également les informations liées au recours à l'environnement p/c.

Légende :

(n) Utilisation n fois
Cal Calcul numérique avec les opérations de base
SD Sélection ou Désélection dans Y=
W ◂ Changement manuel de xmin dans WINDOW
W ▸ Changement manuel de xmax dans WINDOW
Cal. Calcul numérique

	P/C	HOME	GRAPH	TABLE
Amandine	Tableau de signes	*d(* *Solve (2)* *♦ENTER*	*SD*	
Arnaud	Tableau de signes	*Define* *d(* *Zeros*	*F5-Minimum* *W ▸* *W ◂*	Changements dans TblSet

		Factor *Factor(.,x)* *♦ENTER (3)*		
Emmanuel	Recherche des zéros (méthode du discriminant) Factorisation Tableau de signes	*d(.* *Factor* *Solve*	*Trace*	
Fabien		*d(.* *Solve* *♦ENTER (2)* *Cal.*		
Marie-Anne	Factorisation Tableau de signes	*d(.* *Factor* *Zeros* *Factor(.,x)*	*W* ◀ ▶ *ZoomFit*	
Vincent	Recherche des zéros (méthode du discriminant) Tableau de signes	*d(.*		

Applications et ostensifs utilisés

Conclusion :

Globalement, les stratégies des élèves se situent du côté du 3ème pôle stratégique. En effet, tous les élèves sauf Arnaud ont mis en jeu une stratégie de résolution ne faisant intervenir que l'application HOME et l'environnement p/c ; mais les raisons qui ont sous-tendu l'articulation des deux environnements n'ont pas été les mêmes pour tous. Ainsi, pour Fabien, le recours au p/c a été uniquement pour noter les variations de la fonction. Quant à Marie-Anne et Amandine, elles n'ont utilisé le p/c que pour étudier le signe de la dérivée et en déduire les variations de f. Pour Emmanuel et Vincent, ce fut pour chercher les zéros de la dérivée par la méthode du discriminant avant de déterminer le signe de f' puis les variations de f.

Enfin, contrairement à la première année (pour le même type de tâche et presque à la même époque de l'année) où la *phase d'éclatement* se caractérisait entre autres par la mobilisation plus ou moins intense des applications TABLE et GRAPH, nous sommes en présence de techniques qui ne mettent en jeu que rarement ces deux applications (Arnaud étant le seul à avoir utilisé TABLE) et la phase d'exploration graphique reste assez limitée par rapport aux prévisions de l'analyse a priori. Parallèlement à cela, tous les élèves sauf Arnaud, semblent prendre en considération l'importance de l'application HOME, son statut proche de l'environnement p/c et la privilégier par rapport aux applications GRAPH et TABLE. La raison essentielle à cette instrumentalisation-instrumentation nous semble être le travail en classe et les choix didactiques suivis (cf. *Dimension Institutionnelle*) où nous retrouvons pratiquement la même répartition dans l'utilisation des applications que celle des élèves dans cet entretien. Par contre, tandis que certains ostensifs tels que *Zeros, Solve* ou *d(.,x)* semblent familiers pour les élèves, d'autres tels que *Factor, Factor(.,x)* ou encore *ZoomFit* ne semblent pas encore avoir un statut bien déterminé, sans doute en raison du manque de tâches en classe où ces ostensifs peuvent intervenir et où leur statut mathématique apparaîtrait plus clairement. Ainsi la distinction entre *Factor* et *Factor(.,x)* n'est pas bien perçue sachant que dans les cas usuels le premier ostensif suffit à donner le résultat recherché. De même, l'utilisation de *ZoomFit* est assimilée à celle d'une variante de *ZoomOut* d'autant plus que généralement ce dernier ostensif permet à lui seul de visualiser les variations d'une fonction. De plus, comme nous l'avons vu dans les analyses de cet entretien, l'effet de *ZoomFit* semble moins contrôlable que celui de *ZoomOut*, ce qui entraîne les élèves à opter plutôt pour ce dernier ostensif ou même pour des changements manuels dans WINDOW. Le contrôle des tracés intermédiaires est en effet, d'autant plus important pour les élèves qu'ils ont un projet de courbe qu'ils essaient d'approcher. D'ailleurs, ce projet repose le plus souvent sur les formes de courbes rencontrées sans qu'il y ait nécessairement de connexion avec l'expression formelle de la fonction étudiée.

Par ailleurs, les ostensifs *Zeros* et *Solve* semblent avoir, cette deuxième année, un statut mathématique bien clair en plus de leur statut en tant qu'objets techniques. En effet, à l'inverse de ce qui s'est passé l'année précédente lors du deuxième entretien (qui s'était déroulé presque à la même époque), la présence d'un trinôme du second degré n'a pas induit (sauf pour Vincent) une recherche systématique des racines en p/c par la méthode du discriminant aux dépens d'une mise en œuvre de l'un des ostensifs *Zeros* ou *Solve*.

Concernant le travail sur la dérivée, nous pouvons remarquer que cela s'effectue pour presque tous les élèves (Amandine a été la seule à recourir au tracé de la fonction correspondant au numérateur de la dérivée) dans le registre formel. Si l'on tient compte des réponses des élèves, nous pouvons dire que c'est le point de vue algébrique qui prévaut largement, bien que les autres points de vue aient été soigneusement problématisés dans le cours (Cf *Dimension Institutionnelle*). Nous pouvons penser que les réponses des élèves, qui rejoignent d'ailleurs -sur ce point- les comportements d'élèves d'une classe de première habituels, sont dus essentiellement à la nature de la tâche : il y a une étude de fonction, donc c'est la dimension outil du concept de dérivée qui intervient, à travers la notion de fonction dérivée. Par conséquent, c'est le caractère opérationnel qu'il faut mettre en œuvre, où un travail exclusivement formel peut suffire. En d'autres termes, nous pouvons penser que les autres points de vue sont peut-être disponibles mais qu'ils n'interviennent pas ici vu la nature de la tâche. Cependant, leurs réponses dans la partie A de cet entretien nous poussent à penser que le caractère local de la dérivée est loin d'être maîtrisé, étant donné l'absence remarquée de moyens (dans le registre graphique) pour le contrôle et la visualisation. Tout ceci semble conforter l'idée que les techniques graphiques liées à cette dimension locale de la notion de dérivée doivent être prises en charge et institutionnalisées par le professeur, puisque manifestement les élèves n'ont pas vraiment construit de techniques individuellement.

Entretien 2 :

Scénario de l'entretien et critères de choix :

Cet entretien qui a eu lieu le 30 Mai 1997 et qui, comme le premier entretien a duré une heure pour chaque élève, se composait de trois exercices (cf. *Annexe 11*). Un exercice sur le statut de la tangente et sur la différence entre son équation usuelle p/c et celle qui est donnée par l'ostensif *Tangent* dans l'application GRAPH. Un deuxième exercice qui concerne l'étude des variations d'une fonction. Enfin, un troisième exercice sur l'étude des branches infinies d'une fonction rationnelle dont l'expression est donnée sous forme développée. Nous n'allons pas traiter ce dernier exercice, tous les élèves n'ayant pas pu l'entamer faute de temps.

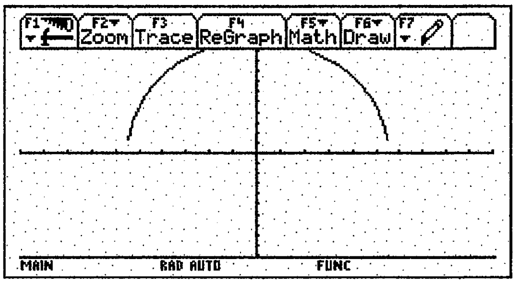
Nous avons vu que l'année précédente, le troisième entretien avait considérablement perturbé les élèves. Une des raisons en était la nature de la fonction choisie : c'était la composée d'une fonction trigonométrique et de la fonction racine carrée.

Cette fois-ci, nous avons décidé de réduire ces difficultés tout en gardant certains phénomènes graphiques. Ainsi, nous avons choisi la composée d'un trinôme du 2nd degré et de la fonction racine carrée. Par ailleurs, nous avons gardé le caractère ouvert des tâches à résoudre.

La fonction à étudier est : $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 121}$

Nous avons choisi cette fonction parce qu'elle présente les caractéristiques suivantes :

- C'est une fonction peu habituelle pour les élèves, au sens où elle n'est définie que sur un intervalle fermé.



- Elle est paire, ce qui nous permet de voir si cette sous-tâche reste aussi problématique que lors de l'entretien 3 de l'année précédente, où les élèves avaient eu des difficultés à prouver algébriquement la parité.
- Le tracé en *ZoomStd* ne se prolonge pas jusqu'aux bornes de l'intervalle de définition qui est pourtant fermé. Nous retrouvons alors le phénomène qui est apparu l'année précédente (cf. *Année 1 - Dimension Individuelle - Entretien 3*).
- Ce phénomène graphique, combiné à d'autres caractéristiques liées à la machine rend inefficace toute prise d'informations visant à deviner des valeurs exactes (notamment pour les bornes de l'ensemble de définition de la fonction) et mettant en œuvre une lecture graphique, qu'elle soit à l'œil nu ou qu'elle mobilise des ostensifs tels que *F5-Minimum* ou *Trace*. Ceci est censé rendre nécessaire un travail de preuve algébrique (en p/c ou dans l'application HOME).

Type de stratégies a priori :

Comme au troisième entretien de l'année précédente, l'étude de la fonction est répartie en trois parties : une première partie qui concerne le tracé de la fonction et inclut la mise en œuvre de techniques de cadrage. Ensuite, une deuxième partie où les élèves doivent conjecturer les propriétés et variations de la fonction à partir du tracé. Enfin, une troisième partie où les élèves ont à justifier les conjectures faites lors de la deuxième partie.

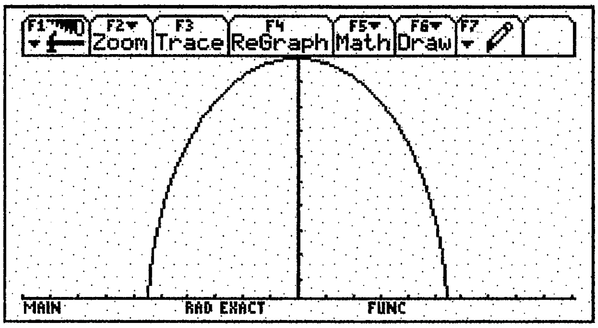
1.Tracer la courbe représentative de f

En nous basant sur les observations de classe (cf. *Dimension Institutionnelle*) et sur les résultats de l'entretien précédent, nous prévoyons ce qui suit :

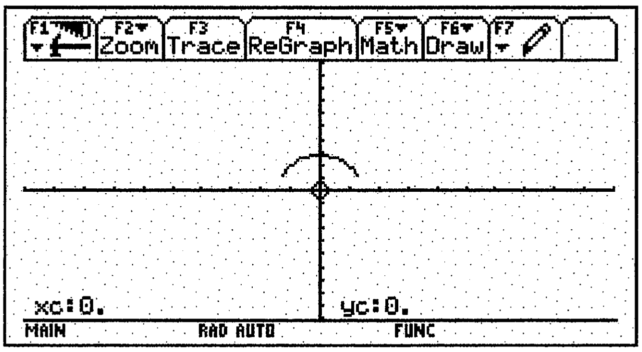
- Définition de la fonction dans l'application HOME à l'aide de *Define*
- Définition dans Y= puis tracé en *ZoomStd*

La courbe ressemblant à une parabole ou à un demi-cercle, nous pensons que l'élève ne cherchera pas d'autres morceaux de la courbe en dehors de [xmin;xmax] = [-10;10] (ce qui correspond à la fenêtre standard). Ceci laisse deux possibilités assez économiques :

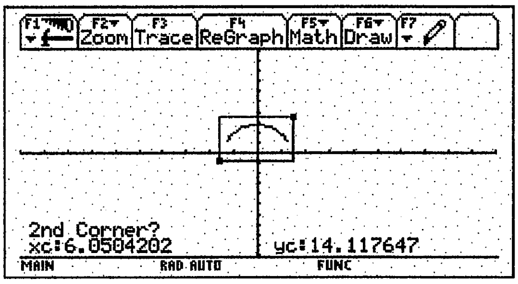
- Agrandir ymax dans WINDOW pour obtenir le "bout de courbe" qui semble manquer en haut de l'écran, le choix de ymax dépendant de la lecture à l'œil nu
- Effectuer un *ZoomFit* sur [-10,10], ce qui est encore plus efficace puisque l'on peut récupérer automatiquement ce qui semble manquer

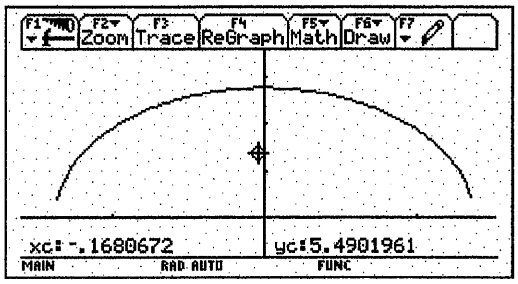


Bien entendu, l'élève pourrait également penser à effectuer un *ZoomOut* sans changement de centre, ce qui donnerait :



Cependant et pour améliorer l'affichage, il peut essayer de réduire la fenêtre, probablement avec un *ZoomBox* :





Par ailleurs, nous pensons que la technique du *ZoomOut* est envisageable compte tenu des techniques repérées l'année précédente (cf. *Genèses Instrumentales - Année 1*) et surtout de celles mises en évidence lors de l'entretien 1 (cf. *Année 2 - Dimension Individuelle - Entretien1*)

2. Conjectures

f serait définie approximativement sur] –5,5 ; 5,5 [. en tenant compte pour la lecture à l'œil nu des graduations de la valeur de *xscl** (*unité des graduations sur l'axe des abscisses) dans la fenêtre WINDOW.

Ceci dit et compte tenu du phénomène qui apparaît aux points d'arrêt (où la courbe n'atteint pas l'axe des x), nous prévoyons une perturbation chez l'élève au niveau de la détermination des bornes. En effet :

➢ En *ZoomStd*, la courbe est interrompue avant |x|=5.5, ce qui pourrait être interprété de deux manières possibles :

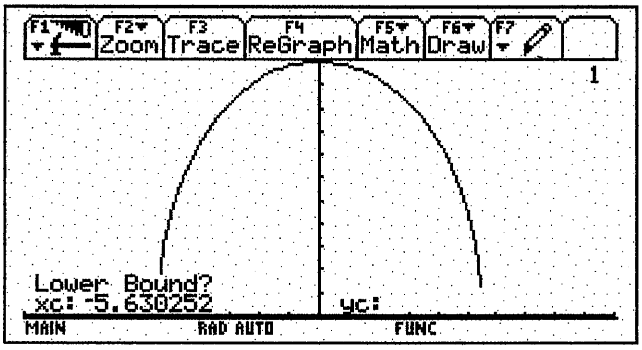
- f n'est pas définie en |x|=5.5
- f est définie et l'élève serait capable d'expliquer ledit phénomène comme une conséquence des caractéristiques inscrites dans WINDOW et de la disposition des pixels sur l'écran.

➢ Si l'élève effectue un *ZoomFit* sur [-10,10], il va obtenir une courbe qui semble toucher cette fois-ci l'axe des x. Or, s'il consulte les informations contenues dans WINDOW (niveau 2 des connaissances-machine), il va s'apercevoir que ymin ≃ 1.29 Il pourrait alors vouloir changer la valeur de ymin par 0 (ou même un nombre négatif) afin de voir si la courbe touche l'axe des x, mais le phénomène observé en *ZoomStd* va subsister.

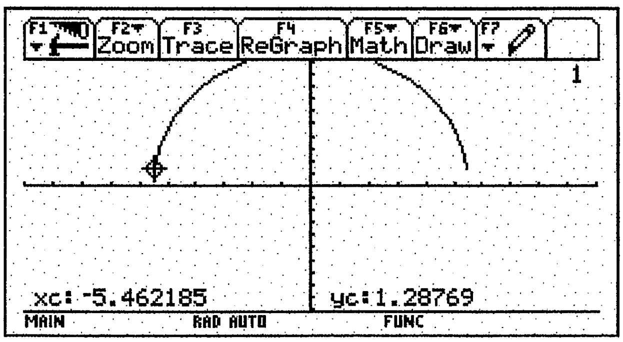
Soulignons ici l'importance de prendre en compte le niveau 2 des connaissances-machine, dans la prise de décision.

f serait paire parce que la courbe est visiblement symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Les minimums seraient atteints aux bornes de cet intervalle. Précisons que l'ostensif *GRAPH-F5-Minimum* est inefficace dans ce cas. En effet : l'instrumentation de cette commande nécessite la donnée d'un intervalle ; or la borne inférieure de celui-ci est forcément supérieure strictement à -5 puisque le "premier" (en partant de la gauche) pixel allumé du tracé se trouve "après" (-5 ; 0)



Ici, dans la fenêtre correspondant au tracé en *ZoomStd,* la plus petite borne inférieure "tolérée" est –5.462185, ce qui dépend des caractéristiques de WINDOW (notamment de *xres*, de *xmin* et *xmax*), du nombre de décimales qu'on peut modifier dans MODE, et de la structure de l'écran. Tout ceci illustre une fois de plus l'importance du niveau 2 des connaissances-machine (à travers la prise en compte de l'influence de WINDOW et de MODE), et du niveau 3 (à travers la prise en compte de la structure de l'écran et de la disposition des pixels).
Une autre manière d'approcher les minimums est d'utiliser l'ostensif *Trace* qui dépend également des mêmes caractéristiques. Les abscisses des minima seraient alors proches de –5.462185 et 5.4621849 pour une ordonnée de 1.28769 (en *ZoomStd* et en mode FLOAT).



Enfin, en se basant sur cette lecture graphique l'élève aurait tendance à conjecturer que la valeur du minimum serait proche de 1.

Le maximum serait atteint en x=0 : La courbe étant symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, le maximum semble atteint en x=0 et semble valoir 11. Il est également possible que l'élève utilise l'ostensif graphique *F5-Maximum* ou simplement substitue 0 dans l'expression de f.

f serait positive car le graphe est au-dessus de l'axe des abscisses

f serait croissante de –5.5 à 0 puis décroissante de 0 à 5.5

3. Justifications

f est définie sur [-5.5;5.5] : il faut résoudre l'inéquation : $-4x^2+121 \geqslant 0$, tâche qui n'est pas prise en charge directement par la TI92.

Pour cela, nous prévoyons quatre entrées principales qui vont donner lieu aux techniques suivantes :

- La technique **T0** qui s'appuierait sur des connaissances liées à l'objet "racine carrée" et à la manipulation des inégalités. Cette technique se traduirait par :

$-4x^2+121 \geqslant 0 \Rightarrow x^2 \leqslant \frac{121}{4} \Rightarrow -\sqrt{\frac{121}{4}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{121}{4}}$ ou encore $-\frac{11}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11}{2}$ (les calculs numériques pouvant être faits mentalement ou dans l'application HOME)

- La technique **T1** qui s'appuierait sur le repérage d'une *identité remarquable* et qui commencerait par la résolution de l'équation $-4x^2+121 = 0$

Ainsi $-4x^2+121 = 0$ devient $(11-2x)(11+2x) = 0$. L'élève devrait alors facilement déduire les racines $\frac{11}{2}$ et $-\frac{11}{2}$ sans utiliser la machine, avant de déterminer le signe du produit de facteurs à l'aide d'un tableau de signes.

Cette technique mobilise donc des connaissances mathématiques exclusivement, que ce soit par le repérage et l'exploitation de l'identité remarquable ou par l'utilisation du tableau de signes.

- La technique **T2** qui commencerait par la résolution de l'équation $-4x^2+121 = 0$ à l'aide de l'ostensif *Solve*. La machine donnerait les racines $\frac{11}{2}$ et $-\frac{11}{2}$. Ensuite, il y aurait deux suites économiques possibles pour l'étude du signe :

  - L'utilisation d'un tableau de signes pour l'étude du produit de facteurs $-4(x-\frac{11}{2})(x+\frac{11}{2})$. Nous désignerons cette technique par **T2a**
  - La détermination du signe du trinôme $-4x^2+121$ en se basant directement sur celui du coefficient du monôme de plus haut degré. Nous désignerons cette technique par **T2b**

Ces deux techniques combinent donc des connaissances-machine, via l'utilisation de l'ostensif *Solve*, et des connaissances mathématiques, via l'étude du signe du produit de facteurs ou du trinôme.

- La technique **T3** qui commencerait par une factorisation du trinôme en question à l'aide de l'ostensif *Factor*. La machine afficherait alors l'expression : $-(2x-11)(2x+11)$. L'élève devrait ensuite (comme pour la technique **T1** ci-dessus) en déduire les racines puis en étudier le signe à l'aide d'un tableau de signes.

  Cette technique combine des connaissances-machine, via la mise en œuvre de l'ostensif *Factor*, et des connaissances mathématiques liées à l'étude du signe de l'expression factorisée obtenue.

Par ailleurs, nous prévoyons ici une perturbation due à la confusion entre la nécessité de chercher les x pour lesquels $\alpha(x) \geqslant 0$ (où α est une fonction) et le fait que $\sqrt{\alpha(x)}$ est par définition positif, ce qui a été observé, rappelons-le, l'année précédente lors du troisième entretien.

f est paire : Pour prouver la parité, nous pouvons prévoir quatre possibilités :

- Tout d'abord une étude en p/c qui nous paraît simple et rapide, puisqu'il suffit de remplacer x par -x ou se baser sur le fait que la fonction de référence $x \rightarrow x^2$ est paire :

$$f(-x) = \sqrt{-4(-x)^2+121} = \sqrt{-4x^2+121} = f(x)$$

- Une autre possibilité est d'entrer *f(-x)* dans la machine (après avoir entré l'expression de la fonction à l'aide de l'ostensif *Define*). Le résultat affiché sera alors : $\sqrt{-(4x^2-121)}$. Afin de comparer cette expression à celle de la fonction, il faudrait que l'élève remarque que $-(4x^2-121)$ est égal à $-4x^2+121$.

- Une troisième possibilité consiste à tester l'égalité *f(-x) = f(x)* en l'entrant dans la machine, laquelle afficherait alors : $-(4x^2-121)= -(4x^2-121)$, égalité qu'il faut ensuite interpréter.

- Une dernière possibilité est de résoudre l'équation f(-x) = f(x) en utilisant l'ostensif *Solve* en entrant : *Solve (f(-x) = f(x) , x)*. La machine afficherait alors le message *true*, ce qui pose alors le problème de l'interprétation d'un tel message. Sachant que la réponse devrait correspondre en théorie à l'ensemble des nombres réels de l'intervalle [-5.5 ; 5.5], nous pouvons penser que le message *true* devrait être interprété comme *"l'équation est satisfaite sur le domaine de définition"*, ce qui n'apparaît nulle part dans le manuel accompagnant la machine, et qui n'a pas été vu en classe non plus. En fait, la connaissance-machine (ou les connaissances-machine) sous-jacente à l'interprétation de *true* se situerait aux niveaux 3 ou 4 correspondant aux *contraintes internes* (cf. *Typologie des contraintes*), et ne nous paraît pas disponible chez les élèves.

<u>*f est positive*</u> : puisque $\sqrt{\lambda} \geq 0 \quad \forall \lambda \geq 0$

<u>*Variations de f*</u> : Après le calcul de la dérivée dans HOME à l'aide de la commande *F3-1*, qui donne : $\dfrac{-4x}{\sqrt{-(4x^2-121)}}$, nous pouvons déduire le tableau de variations suivant:

x	**-5.5**		**0**		**5.5**
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

Ceci dit, l'étude du signe de la fonction dérivée est sous-tendue par plusieurs connaissances mathématiques telles que :

- Le fait (déjà cité plus haut) de reconnaître que : $-(4x^2-121) = -4x^2+121$, et donc que le dénominateur de la quantité obtenue ci-dessus correspond à l'expression de la fonction.
- Le fait (également souligné plus haut) de savoir que : $\sqrt{\lambda} \geq 0 \quad \forall\lambda \geq 0$
- Le fait de savoir que : $B \succ 0 \Rightarrow sign(\frac{A}{B}) = sign(A)$
- Ou encore le fait fondamental de savoir que : $B = 0 \Rightarrow \frac{A}{B}$ *non défini*

Par ailleurs, le minimum est égal à f(5.5) = f(-5.5) = 0 et le maximum à f(0) = 11 (les calculs pouvant être faits dans l'application HOME, ou bien sûr, mentalement). Ainsi, cette valeur du minimum trouvée devrait pousser l'élève à remettre en question la lecture graphique (à l'œil nu ou à l'aide de *Trace*) qui donnait 1 comme valeur approchée. Il est prévu que l'interviewer demande alors une explication du phénomène graphique observé.

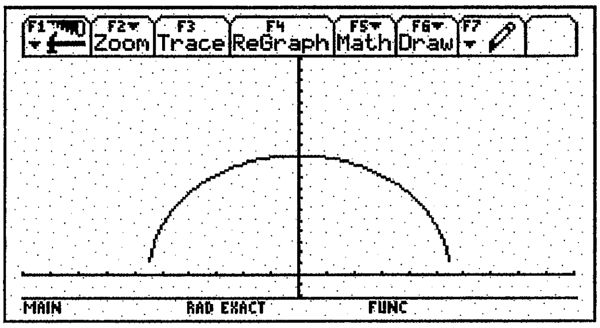
Cet exercice paraît simple de prime abord tant les variations de la fonction semblent évidentes sur le tracé même. Cependant, les difficultés qui sous-tendent la tâche en question (qui consiste essentiellement en la conjecture des propriétés de la fonction à partir du graphe puis en la justification de ces propriétés) sont assez complexes, dans la mesure où elles sont sous-tendues par un jeu de cadres qui n'est pas forcément facile pour les élèves. En effet, le choix de la fonction a été effectué de telle façon que le recours au cadre algébrique apparaisse comme une nécessité. C'est ainsi que le phénomène graphique (qui se traduit par le fait que la courbe représentative ne touche pas l'axe des x, alors qu'elle le devrait en théorie) a pour première fonction, de rendre inefficace toute tentative de conjecture des valeurs exactes des minima, eut-elle mis en œuvre les plus puissants des ostensifs graphiques présents sur la TI92 et connus des élèves. Parallèlement à cela, ledit phénomène a pour autre fonction d'interroger les conceptions des élèves à propos de ce type de machine, quand ils auront à expliquer l'incohérence entre leur étude algébrique et ce qui se passe aux extrémités du graphe.

Par ailleurs, nous pensons que l'expression de la fonction peut également intervenir dans la phase de conjecture graphique, comme moyen de contrôle préalable à la phase de justification formelle.

Résultats et analyse :

1.Tracer la courbe représentative de f

- Amandine définit la fonction dans HOME puis dans Y= avant de la faire tracer dans la fenêtre initiale (correspondant à *ZoomStd*). Ensuite, elle va dans WINDOW et change ymin en -2 et ymax en 20 puis fait tracer le graphe correspondant :



- Arnaud définit la fonction directement dans Y= avant de la faire tracer en *ZoomStd.* Il effectue ensuite un *ZoomFit.*

Entre Arnaud et l'interviewer se déroule alors le dialogue suivant :

I : Est-ce que tu es satisfait de ta courbe?

A : Oui, on la voit bien

I : Est-ce que tu peux me dire s'il y a d'autres bouts de la courbe ou pas?

A : Non, je crois qu'il y a tout

I : Comment tu peux en être sûr?

A : Bein, elle dépasse pas . . . elle est jamais négative (en se référant à l'expression)

I : Et ça prouve quoi?

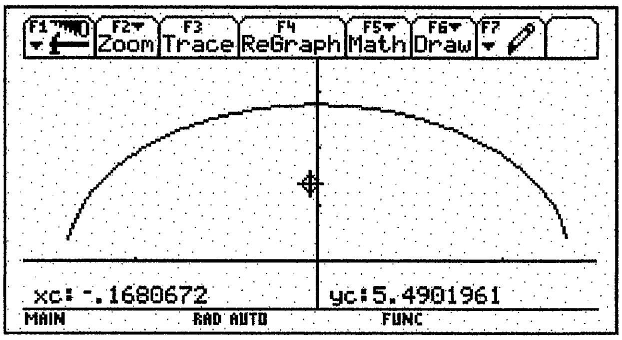
A : Bein, qu'il y a rien en bas, quoi . . . Et puis, puisque c'est ZoomFit, donc il va tout mettre

I : Et c'est quoi un ZoomFit ?

A : Bein, normalement il prend l'axe des abscisses et il règle l'axe des ordonnées pour avoir tout.

Nous voyons donc que, contrairement à l'entretien 1, Arnaud tient compte cette fois-ci de l'expression de la fonction pour recadrer le tracé. Une autre nouveauté consiste en l'apparition de l'ostensif *ZoomFit.*

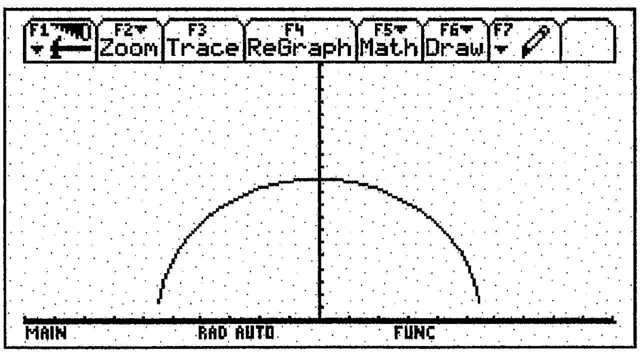
- Emmanuel définit la fonction dans HOME puis dans Y= avant de la faire tracer en *ZoomStd.* Il effectue ensuite un *ZoomOut*, puis, pour améliorer l'affichage, recadre à l'aide de *ZoomBox*.



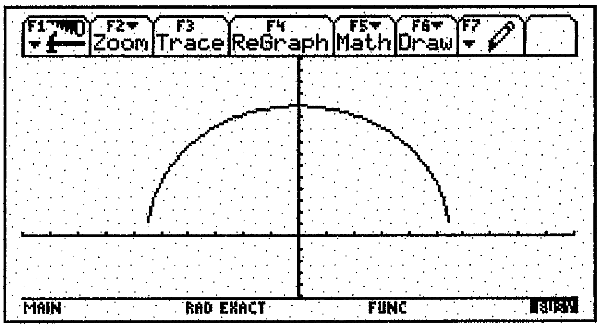
Emmanuel semble avoir gardé la même technique de cadrage qu'à l'entretien précédent avec une adjonction de l'ostensif *ZoomBox*.

- Fabien définit la fonction directement dans Y= avant de la faire tracer en *ZoomStd.* Il agrandit alors les x et les y dans WINDOW à la manière d'un *ZoomOut* puis recadre à l'aide de *ZoomBox* pour améliorer l'affichage.

- Marie-Anne définit la fonction dans HOME puis dans Y= avant de la faire tracer en *ZoomStd.* Elle va ensuite dans WINDOW, change ymin en 0 (sans doute en se basant sur l'expression de la fonction et le fait qu'elle soit positive) et ymax en 50. Ensuite, elle réduit ymax pour améliorer la visibilité du tracé:



- Vincent définit la fonction dans HOME puis dans Y= avant de la faire tracer en *ZoomStd.* Il va ensuite dans WINDOW, prend ymin = -5 et ymax = 15 :



Amandine	*ZoomStd - W* ▲▼
Arnaud	*ZoomStd - ZoomFit*
Emmanuel	*ZoomStd - ZoomOut - ZoomBox*
Fabien	*ZoomStd - W* ✦ *- ZoomBox*
Marie-Anne	*ZoomStd - W* ▲▼ *- W* ▲
Vincent	*ZoomStd - W* ▲▼

Successions d'ostensifs graphiques mis en œuvre pour le tracé de la fonction

Légende

W ◀	Changement manuel de xmin dans WINDOW
W ▶	Changement manuel de xmax dans WINDOW
W ▼	Changement manuel de xmax dans WINDOW
W ▲	Changement manuel de xmax dans WINDOW
W ✦	Changement manuel de xmin, xmax, ymin et ymax dans WINDOW

Analyse :

Globalement, les élèves ont opté pour les trois techniques prévues dans l'analyse a priori. Nous pouvons les classer en deux catégories :

➢ Les élèves qui ont tenu compte de l'expression de la fonction : ainsi Amandine, Marie-Anne et Vincent ont pris en compte le fait que la fonction était positive pour effectuer des changements manuels dans WINDOW, et cela en rapprochant ymin de 0 et en agrandissant ymax. Ceci dit, le fait que ces élèves n'aient pas cherché d'autres morceaux de la courbe pour des x en dehors de [-10 ; 10] ne nous semble pas signifier qu'ils ont pris en considération l'ensemble de définition de la fonction. Nous pensons plutôt (comme nous l'avions indiqué dans l'analyse a priori) que ce sont des critères perceptifs qui ont sous-tendu cette "non considération" des x qui se trouvent au-delà de [-10 ; 10]

- Les élèves qui n'ont pas tenu compte de l'expression de la fonction : Emmanuel et Fabien ont en effet, mis en œuvre une des techniques prévues dans l'analyse a priori, qui est celle du type "*ZoomOut*".

Arnaud quant à lui, a utilisé l'ostensif *ZoomFit* (autre technique prévue dans l'analyse a priori). Il pourrait ainsi faire partie de la deuxième catégorie d'élèves dans la mesure où il a mis en œuvre une technique systématique, sans tenir compte de la nature de la fonction qui est en jeu. Mais étant donné qu'il avait remarqué que la fonction était positive (Cf ci-dessus), il pourrait également faire partie de la première catégorie. Par ailleurs, Arnaud est le seul élève à mettre en œuvre l'ostensif *ZoomFit*, les autres n'estimant sans doute pas nécessaire l'utilisation d'un outil aussi puissant, d'autant plus que, comme nous l'avons remarqué au premier entretien, ils ne le maîtrisent pas vraiment. Ils semblent ainsi préférer dans leur majorité des manipulations dont ils peuvent contrôler davantage le résultat, d'où le choix de changements manuels dans WINDOW ou encore de l'ostensif *ZoomBox*.

2. Conjectures

Amandine :

- Elle commence par dire que "*f(x)=0 ça n'existe pas, (qu')on n'a pas d'abscisse*". Elle cherche alors "*si ça a des limites . . . la limite en 1 peut-être*". En fait, pensant que les points où la courbe semble s'arrêter correspondent à une ordonnée égale à 1, elle en déduit tout d'abord que la fonction tend vers 1 aux bornes. Ensuite elle change d'avis : "*Oh non, peut-être pas . . . les limites c'est quand elle s'en approche et qu'elle n'atteint jamais . . .*",
- Elle conjecture que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées
- Elle dit que f est positive
- Après une lecture à l'œil nu, elle pense que le maximum est environ 11. Cependant, elle ne tient pas compte dans cette lecture, des informations contenues dans WINDOW et relatives à l'unité de graduation *yscl* (ce qui correspond aux contraintes d'usage, et donc au niveau 2 des connaissances-machine). Elle ne tient pas compte non plus de l'expression de la fonction.

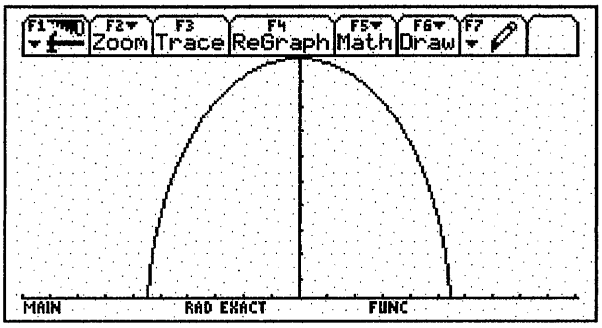
- En ce qui concerne le minimum, elle utilise une fois de plus le terme "*limite*" pour désigner ce qui se passe aux extrémités de la courbe. Elle conjecture que la valeur est à peu près égale à 1, et que ce minimum serait atteint "*en 5.5 et –5.5 environ pour x*". Une fois de plus, elle n'a pas tenu compte des *contraintes d'usage,* en l'occurrence la valeur de *xscl* dans WINDOW, dans la lecture graphique.
- La fonction est croissante entre –5.5 et 0, puis décroissante entre 0 et 5.5
- Elle pense que le domaine de définition est]-5.5 ; 5.5[

Considérons maintenant la partie suivante du dialogue qui s'est déroulé entre Amandine et l'interviewer:

I : Est-ce que tu es sûre d'avoir tous les bouts de la courbe?

A: Ah, ah!

Amandine effectue alors un ZoomFit et obtient le tracé suivant :



A: Bein, je sais pas, elle ne me donne que ça mais je sais pas . . . pour avoir tout

I : Est-ce que tu as tout?

A : Bein, je sais pas, je pense oui, parce que ZoomFit c'est la même fenêtre pour voir toute la courbe . . . le mieux possible

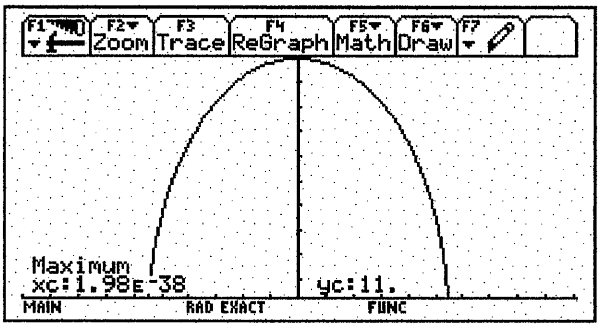
I : Et donc?

A : Il n'y a que ça

Nous remarquons ainsi une utilisation de *ZoomFit* comme une sorte de baguette magique, sans tenir compte de l'ensemble de départ [xmin,xmax] sur lequel doit s'effectuer ce zoom. Ceci confirme notre hypothèse, énoncée lors de l'analyse de l'Entretien 1 sur le statut de cet ostensif chez Amandine.

Arnaud :

- f est croissante de -5.5 environ à 0 et décroissante de 0 à 5.5: Auparavant, Arnaud a consulté WINDOW pour connaître l'unité de graduation *xscl,* avant de faire sa lecture à l'œil nu
- f est positive
- La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées : f est paire
- f est définie sur]-5.5;5.5[: La fonction n'est pas définie en -5.5 et en 5.5 parce que la courbe ne touche pas l'axe des abscisses
- Le maximum est atteint en 0 et vaut 11 : Arnaud utilise l'ostensif *F5-Maximum* de l'application GRAPH



- Le minimum vaut 0 : Arnaud s'est basée sur le tracé en *ZoomFit* sans tenir compte des informations contenues dans WINDOW (Cf analyse a priori). Ainsi a-t-il dû penser que l'axe horizontal qui s'est affiché (d'équation y=1) correspondait à l'axe des abscisses, et que, par conséquent, celui-ci touche la courbe représentative.

Dans les réponses de Arnaud, nous pouvons constater tout d'abord une incohérence entre sa conjecture sur le domaine de définition et celle sur le minimum. En effet, d'un côté il dit que la courbe ne touche pas l'axe des abscisses, et d'un autre côté il dit que le minimum vaut 0, en interprétant (de manière erronée, d'ailleurs) le tracé en *ZoomFit.* Par ailleurs, cette utilisation de *ZoomFit* (sans tenir compte de [xmin ; xmax] dans l'interprétation du tracé obtenu) montre que la fonction de cet ostensif n'est toujours pas vraiment acquise par les élèves (Cf Amandine ci-dessus). Soulignons enfin que Arnaud est le seul à avoir utilisé l'ostensif graphique *F5-Maximum.*

Emmanuel :

- f est définie entre environ -5.4 et 5.4 . Emmanuel utilise *Trace* pour évaluer les bornes de l'intervalle de définition, ce qui explique les valeurs conjecturées (Cf analyse a priori)
- f est positive
- *"L'équation f(x)=0 n'a pas de solution"* en se référant au fait que la courbe ne semble pas toucher l'axes des abscisses
- La courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy
- f est croissante de -5.4 à 0 puis décroissante de 0 à 5.4

Emmanuel est le seul à utiliser *Trace* pour avoir des valeurs approchées des bornes de l'ensemble de définition. C'est ce qui explique les valeurs conjecturées :-5.4 et 5.4. Sachant que l'abscisse la plus petite obtenue par *Trace* et correspondant aux points de la courbe représentative est -5.462185, nous voyons que Emmanuel aurait pu prendre comme valeur approchée -5.5 plutôt que -5.4, ce qui serait une meilleure approximation à 0.1 près.
Soulignons enfin qu'il n'a pas traduit la symétrie du graphe par rapport à l'axe des ordonnées en termes de "parité".

Fabien :

- f est définie approximativement sur [-4.5;4.5] : lecture à l'œil nu (confusion entre 4.5 et 5.5)
- f est croissante sur [-4.5;0] et décroissante sur [0;4.5]
- *"Le minimum est égal à 1 à peu près . . . la courbe s'arrête brutalement à chaque extrémité . . . Il doit y avoir une limite"*
- Le maximum est approximativement 11
- La courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy

Fabien n'exprime pas la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées en termes de "parité". Et comme Amandine, il interprète ce qui se passe aux extrémités de la courbe représentative en termes de limite.

Marie-Anne :

- f est définie à peu près entre –5.5 et 5.5 . . . mais non définie en –5.5 et 5.5
- Les valeurs sont comprises à peu près entre 1 et 11. La courbe a la forme d'une parabole.
- La courbe est symétrique par rapport à l'axe Oy. La fonction est paire

- La fonction est croissante puis décroissante

Marie-Anne compare la forme la forme du graphe à celle d'une parabole, ce qui rejoint notre analyse a priori (les élèves ne cherchent pas d'autres bouts de courbes que ce qui apparaît dans la fenêtre standard).

Vincent :

- En raisonnant sur l'expression de la fonction, Vincent énonce sa première conjecture : "*Si x^2 devient trop grand ou trop petit, $4x^2$devient supérieur à 121 et la fonction n'est plus définie*".
- Ensuite : *"la limite en 0 est $\sqrt{121}$... le maximum est atteint en 0"*
- Puis *"f est croissante quand x est négatif, décroissante quand x est positif"*
- *"f est toujours positif"*
- A la demande de l'interviewer, Vincent répond que la courbe est symétrique et que la fonction est paire
- En 0, la courbe a une tangente horizontale . . . de coefficient directeur nul

Vincent est le seul élève à avoir eu recours (et de manière efficace) au cadre algébrique en raisonnant sur l'expression de la fonction. Il est également le seul à avoir parlé de tangente en conjecturant qu'au point d'abscisse 0, la courbe a une tangente horizontale.

Analyse :

Tous les élèves, sauf Vincent, se sont restreints pour leurs conjectures au cadre graphique sans aucune référence à l'expression de la fonction. Certains ont eu recours à des ostensifs graphiques tels que *F5-Maximum, Trace* ou même *ZoomFit*, mais cette utilisation était très limitée et mal exploitée. En effet, les ostensifs ci-dessus étaient les seuls mis en œuvre par les élèves alors qu'ils en connaissent bien d'autres tels que *ZoomIn, F5-Minimum* ou encore *F5-Intersection.* Le phénomène graphique apparu aux extrémités du graphe ne leur semble pas poser problème, certains l'interprètent comme un phénomène lié aux limites (cf. Amandine et Fabien) alors que d'autres en déduisent tout simplement que la fonction ne doit pas être définie pour les x correspondants. Nous verrons dans la suite que les incohérences entre certaines de leurs conjectures et les résultats de leurs justifications vont les sensibiliser au phénomène graphique en question.

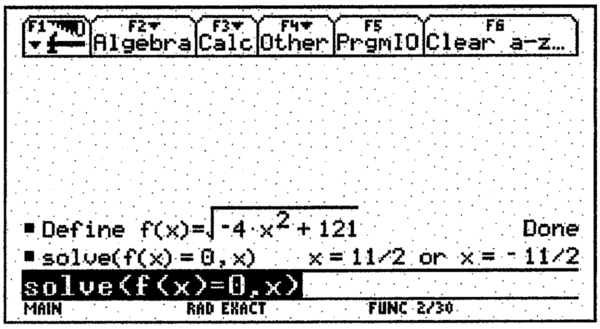
En somme, tout le travail de conjecture s'est déroulé exclusivement dans le cadre graphique (sauf pour Vincent), la lecture à l'œil nu étant essentiellement la principale technique de visualisation graphique. Nous pouvons nous interroger sur l'absence presque totale d'utilisation d'un ostensif aussi familier que *Trace* (Emmanuel est le seul à l'avoir utilisé) par exemple. Ceci nous semble être un effet du contrat, dans la mesure où les conjectures attendues pouvaient être approchées, et où une lecture à l'œil nu pouvait sembler suffisante, que ce soit pour la parité, les variations ou le maximum. Par ailleurs, nous pouvons nous demander quelles sont les raisons qui ont poussé les élèves à ne pas utiliser d'autres ostensifs tels que *F5-Minimum* pour la conjecture du minimum, ce qui est étonnant chez Arnaud qui a pourtant mobilisé l'ostensif *F5-Maximum.* Ceci pourrait s'expliquer par le fait que les élèves semblent assimiler les points d'arrêt plus à des limites (Amandine et Fabien l'ont d'ailleurs exprimé dans les entretiens) qu'à des minimums, dans la mesure où le cas habituel d'extremum est celui qui correspond à un "arrondi" au niveau du graphique.

<u>3. Justifications</u>

Amandine :

- *"f(x) = 0 n'a pas de solution"*

Amandine utilise la commande *Solve* dans l'application HOME comme prévu dans l'analyse a priori :



Etonnée du résultat, le dialogue suivant s'en est suivi :

A : Eh bien ! mais 11/2 c'est 5.5 et . . . –5.5 ! . . . mais elle les touchait pas, la courbe !! (ici, elle se base sur son tracé en ZoomStd)

I : Donc, il y a un petit problème entre ce que tu trouves et . . .

A : pour f(x)=0 ça veut dire que c'est quand elle (l'axe des x) coupe la courbe

I : Alors, qui a raison c'est HOME ou c'est le graphe ?

A : ça doit être plutôt HOME

I : Pourquoi?

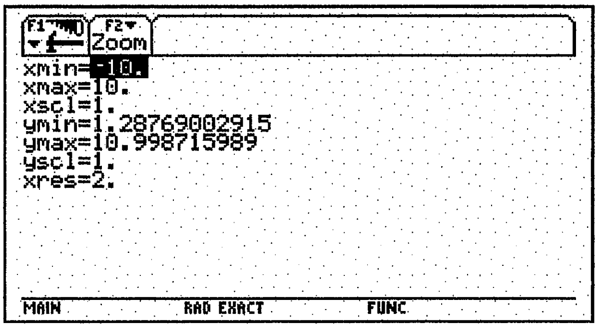
A : Parce que . . . c'est comme ça, c'est parce que l'autre c'est juste de vue et ça prouve rien

Nous voyons ici que pour Amandine le problème de l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses prend de l'importance, à partir du moment où elle a repéré l'incohérence entre sa conjecture et le résultat qu'elle vient de trouver en utilisant l'ostensif *Solve.* Nous voyons également que pour cette élève, l'application HOME est a priori plus fiable que l'application GRAPH dans cette phase de preuve (*"parce que l'autre (l'application GRAPH) . . . ça prouve rien"*).

Un peu plus tard, et toujours en ce qui concerne l'intersection de la courbe avec l'axe des x, Amandine s'est rappelée soudainement du tracé en *ZoomFit* qu'elle avait obtenue auparavant dans la phase de conjecture :

A : . . . tout à l'heure, ça touchait pour le ZoomFit

Et là, elle ré-affiche son tracé puis va dans WINDOW pour recueillir une information sur ymin :



A : c'est à 1.28 . . . 1.3 on va dire

I : 1.28 pour le minimum?

A : Ouais . . . apparemment ça touche pas puisque c'est (ymin) à 1.28 . . . ooh, ça m'énerve !

Cette dernière ligne peut s'interpréter de deux manières possibles :

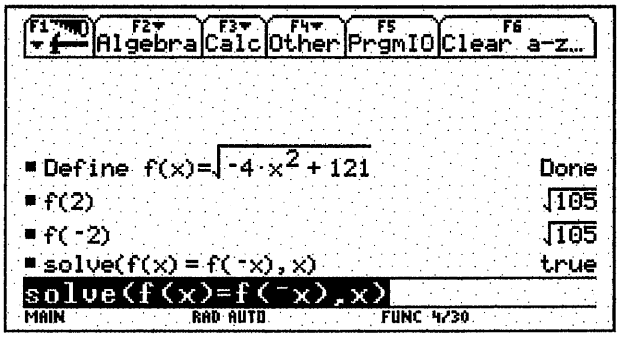
- Amandine remet en question sa recherche de zéros dans l'application HOME aux dépens du graphique, où elle découvre que même avec *ZoomFit* (commande "magique" pour elle, puisqu'elle permettrait d'afficher le tracé complet) le graphe ne touche pas l'axe des abscisses.
- Amandine ne remet pas en question son utilisation de HOME, et pense qu'il est possible (pour des raisons de contrat peut-être) de trouver une fenêtre dans

laquelle l'intersection entre le tracé et l'axe des x serait visible. Ceci pourrait expliquer son agacement puisque, pour elle, *ZoomFit* offre toujours un tracé complet.

Par ailleurs, nous voyons que pour interpréter le tracé obtenu, elle recueille des informations contenues dans WINDOW. Ce niveau d'utilisation est manifestement motivé par l'incohérence mentionnée ci-dessus (entre la recherche des zéros et le tracé en *ZoomStd*). Questionnée ensuite sur les raisons du phénomène graphique observé, Amandine dit qu'elle ne sait pas. Soulignons toutefois l'importance du niveau 2 des connaissances-machine dans le contrôle du travail chez l'élève. En effet, le recours à ce niveau à travers l'affichage de WINDOW a été nécessaire pour interpréter le tracé de la courbe (obtenu ici en *ZoomFit* sur [-10,10]) et vérifier si, à l'affichage celui-ci ne touche pas l'axe des x.

- *f est paire :*

Pour étudier la parité, Amandine commence par calculer, dans HOME, f(2) et f(-2). Ensuite, et après un moment d'hésitation, elle utilise la commande *Solve* comme suit :



Elle en déduit que la fonction est paire

Cette gestion élaborée de la parité, du point de vue de la machine, a été prévue dans l'analyse a priori. Comme nous l'avons vu, ceci requiert des connaissances-machine liées aux contraintes internes (niveaux 3 ou 4) qui ne nous semblent pas disponibles chez les élèves. Cependant, nous pensons que le fait de penser à utiliser l'ostensif *Solve* (au lieu d'entrer uniquement l'expression *f(-x)=f(x)* par exemple) mobilise des connaissances mathématiques assez élaborées. Cela suppose en effet, une extension de la notion d'équation (jusque là restreinte à des cas particuliers telles que les équations polynomiales) au cas assez général *f(-x)=f(x)*. Ceci dit, cette extension ne saurait être correcte sans une interprétation juste du message *true*.

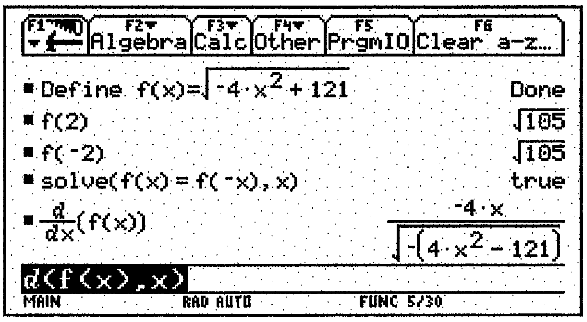
Nous voyons donc que la machine peut induire, ou faciliter l'expression d'autres points de vue sur un même objet. Ainsi, le traitement algébrique de la parité peut être considéré comme celui d'une équation dont l'ensemble des solutions doit correspondre à l'ensemble de définition (à la condition que ce dernier soit centré en 0). En même temps, la présence de la machine nous semble détourner du travail en p/c qui s'avère ici, dans le cas de la parité, particulièrement économique et efficace, bien que moins élaboré que l'utilisation de l'ostensif *Solve* (Cf analyse a priori).

- *f est définie et positive sur]-5.5,5.5[*

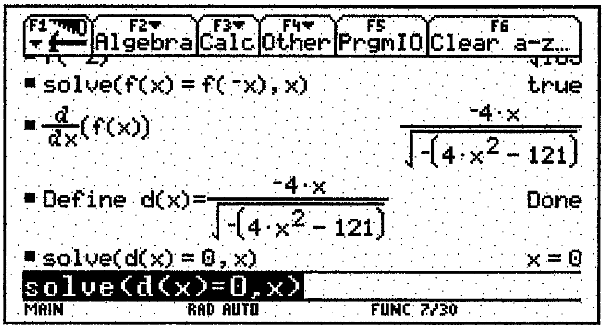
Amandine a été perturbée par le signe de f(x) : " . . . *mais la racine d'un nombre positif, ça peut être négatif, non?"*, ce qui était prévu dans l'analyse a priori, et qui concerne le rapport personnel à l'objet "racine carrée". Par ailleurs, pour résoudre l'inéquation $-4x^2+121 \geqslant 0$, elle a mis en œuvre la technique **T0** (cf. analyse a priori), mais partiellement. En effet, elle a omis les solutions $x \geqslant -\sqrt{\frac{121}{4}}$ dans un premier temps avant de trouver finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation non sans l'intervention de l'interviewer. Signalons enfin que, après avoir calculé une valeur approchée $\sqrt{\frac{121}{4}}$ dans HOME à l'aide de ♦*ENTER*, Amandine calcule f(-5.5) pour voir si -5.5 est contenu dans l'ensemble de définition au lieu de le déduire directement de sa résolution de l'inéquation en p/c. En somme, des connaissances mathématiques liées à la présence de la racine carrée ne semblent pas disponibles chez Amandine. Soulignons de plus, qu'elle n'a pas fait du tout le lien entre sa résolution de l'équation f(x)=0 et les bornes de l'ensemble de définition.

- *Le maximum est à peu près égal à 11*

Amandine calcule la dérivée dans l'application HOME à l'aide de l'ostensif *d()*:



Elle transforme le dénominateur de l'expression trouvée en enlevant les parenthèses mais se trompe dans les signes. Ainsi elle remplace $-(4x^2-121)$ par $4x^2+121$. L'interviewer rectifie. Amandine fait alors un tableau pour étudier le signe de la dérivée. Elle commence par chercher le zéro de la dérivée en appliquant l'ostensif *Solve* :



Pour connaître le signe du numérateur -4x, elle dit :

"ça je sais jamais, donc je trace toujours la courbe pour savoir". Mais à la demande et avec l'aide de l'interviewer, elle trouve le signe du monôme -4x directement.

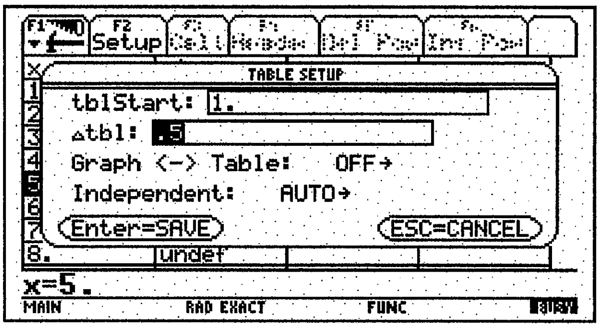
Par la suite, Amandine déduit les variations de la fonction et détermine les valeurs des extrema en calculant dans l'application HOME f(-11/2), f(11/2) et f(0), sans faire le lien dans un premier temps avec le travail effectué précédemment. D'ailleurs, en traçant le tableau de variation sur sa feuille, elle tient compte des intervalles correspondant aux $x<-11/2$ et aux $x>11/2$ avant de les effacer à la fin de son étude, ce qui semble dû au fait qu'elle n'a pas remarqué que le dénominateur dans l'expression de la fonction dérivée correspondait à la l'expression de la fonction f.

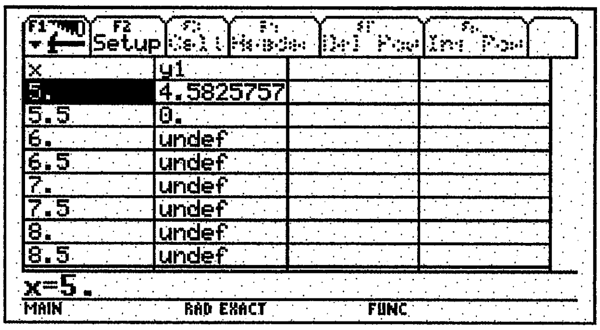
Nous remarquons encore une fois qu'Amandine a du mal à articuler les différentes étapes de sa phase de résolution. Par ailleurs, son travail s'est situé presque entièrement dans le cadre algébrique que ce soit dans l'environnement p/c ou dans l'application HOME. Le seul recours au graphique a été via WINDOW et ce dans le but de recueillir des informations liées au phénomène graphique en question (voir ci-dessus).

Par ailleurs, la présence de la machine et la disponibilité d'ostensifs (étant donné le type de contrat ici) tels que *Solve* semble encourager Amandine à ne pas prendre le temps d'analyser l'expression de la fonction dérivée. Certes, on pourrait penser que la machine a évité à cette élève un blocage éventuel, dans la mesure où elle a des difficultés à manipuler les radicaux. Mais, comme le dénominateur correspond à une expression qu'elle a déjà manipulée (c'est celle de la fonction f), la confrontation à l'expression de la fonction dérivée aurait peut-être favorisé une meilleure articulation entre les différentes phases de son travail.

Arnaud :

- *f est définie sur]-5.5;5.5[:* Il utilise TABLE, mais auparavant il change le pas en 0.5 dans TblSet :





A. remarque que la fonction vaut 0 en 5.5 , ce qui semble le surprendre :

I : Comment peux-tu prouver que f n'est pas définie par exemple pour 6, 7 , 7.5 . . .?

A : Parce que l'équation -4x²+121=0 quand x = -5.5 et x = 5.5 . Donc $\sqrt{0}$ = ?

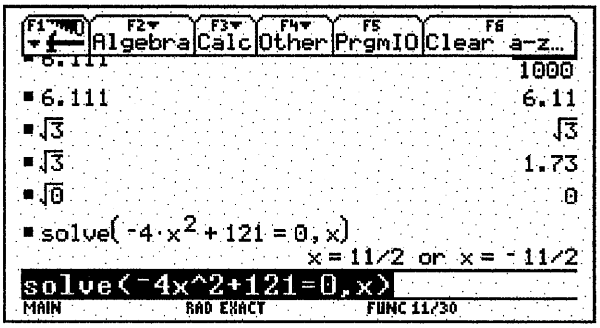
I : Egal à quoi?

A : J'sais pas

A. calcule alors $\sqrt{0}$ dans HOME et donne le résultat

I : Mais est-ce que 5.5 et -5.5 sont les seules valeurs qui annulent l'expression ?

A. utilise alors l'ostensif Solve dans HOME :



I: Alors en -5.5 et en 5.5 elle vaut bien ?

A : 0

I : Donc la courbe . . .

A : Touche l'axe

I : Donc il y a un problème où?

A : au graphique. En fait, quand on voit qu'elle touche pas, il faut aller voir de plus près.

I : Mais pourquoi est-ce qu'elle touche pas à ton avis?

A : ?

Soulignons tout d'abord le fait que Arnaud fasse appel à la machine pour le calcul de $\sqrt{0}$. Par ailleurs, il semble utiliser l'application TABLE pour résoudre la sous-tâche en question (ce qui était le cas à l'entretien précèdent). Plus précisément, il semble confronter les valeurs trouvées dans l'application TABLE à celles obtenues à l'œil nu dans l'application GRAPH lors de la phase de conjecture, et en déduire les valeurs recherchées. Ainsi, cette confrontation a valeur de justification, puisque son recours à l'ostensif *Solve* était une réponse à la question de l'interviewer : "*Mais est-ce que 5.5 et -5.5 sont les seules valeurs qui annulent l'expression ?*". D'ailleurs, Arnaud aurait pu répondre qu'il est en présence d'un trinôme, lequel ne peut avoir plus de deux racines. Vu son profil (Arnaud est un assez bon élève), cette connaissance devrait être disponible chez lui, mais il nous semble que la présence et l'accessibilité assez simple de l'ostensif *Solve* (les contraintes syntaxiques étant facilement dépassées) favorise cette absence de recours à des connaissances liées à l'objet spécifique qu'est ici le trinôme du second degré.

Par ailleurs, sa réponse *"quand on voit qu'elle touche pas, il faut aller voir de plus près"* indique, nous semble-t-il, que d'après lui, il y aurait possibilité de visualiser l'intersection du graphe et de l'axe des abscisses en faisant un *ZoomIn* adéquat par exemple.

- *Etude des variations :*

Arnaud calcule la dérivée dans HOME et son zéro à l'aide de l'ostensif *Solve* (sans utiliser jusque là la commande *Define*) et trace ensuite le tableau de variation de f. Auparavant, pour avoir le signe de la dérivée, il calcule la valeur de la dérivée en -2 et en 2 en utilisant la touche (|).

I: Pourquoi est-ce que la fonction ne serait pas définie en dehors de [-5.5,5.5]?

A : Parce que l'intérieur de la racine serait négatif et la racine ne serait pas définie.

Remarquons d'abord la persistance d'Arnaud à ne pas utiliser l'ostensif *Define* bien qu'il travaille dans l'application HOME, et ce quitte à utiliser des ostensifs peu familiers tels que (|). Cette tendance a déjà été observée chez lui lors de l'entretien précèdent, de même que sa technique pour la détermination du signe de la dérivée, où il calcule la valeur en un point de chaque intervalle, et qui se base sur le théorème-en-acte : "*le signe de la dérivée est constant dans chacun des intervalles délimités par les zéros*".

Par ailleurs, son utilisation de *Solve* rappelle le travail d'Amandine qui, au lieu de déterminer directement le signe de la fonction dérivée à partir du signe du numérateur *-4x*, utilise l'ostensif *Solve*. Cependant, contrairement à Amandine, Arnaud ne semble pas avoir beaucoup de difficultés pour déterminer le signe d'un radical (voir ci-dessous), ce qui conforte notre analyse de son utilisation du même ostensif *Solve* lors de la recherche du domaine de définition.

- *f est positive* :

Arnaud dit que la fonction f est positive car "*une racine n'est jamais négative*"

- *f est paire* :

"*il faut tout d'abord calculer f(-x)* . . ." et là, Arnaud entre dans HOME l'expression de la fonction par *Define* puis fait calculer f(-x). Obtenant la même expression que celle de f(x), il en déduit que la fonction est paire. Nous retrouvons ici une des possibilités prévues décrites dans l'analyse a priori.

Arnaud décide enfin d'utiliser l'ostensif *Define*, sans doute parce que les calculs sont moins coûteux ainsi. Son étude de la parité repose sur la transformation (qu'il a effectuée mentalement) de l'expression donnée par la machine en celle par laquelle la fonction est définie (cf. analyse a priori)

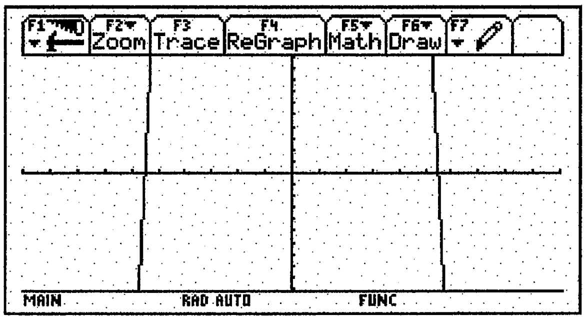
- *Le maximum vaut 11 en 0 :* "f'(x)=0 quand x=0, donc il y a un extremum. Et comme d'un côté c'est positif et de l'autre c'est négatif, donc c'est le sommet, c'est le maximum, c'est f(0)". Il calcule alors f(0) dans HOME et trouve 11.

Comme au premier entretien, Arnaud persiste à éviter l'ostensif *Define* qui représente pourtant le point de départ de tout travail dans l'application HOME, si l'on se réfère à la gestion institutionnelle de l'instrumentation (cf. *Dimension Institutionnelle*). Cependant, son travail s'est déroulé presque entièrement dans le cadre algébrique, mettant en jeu soit l'application HOME, soit l'environnement p/c. Rappelons qu'à l'entretien précèdent (au début, plus précisément), Arnaud avait tendance à privilégier une résolution dans les applications

GRAPH et TABLE, convaincu que cela pourrait être aussi efficace que dans le cadre algébrique. Dans cet entretien, nous pouvons remarquer que le statut de l'application HOME a évolué aux dépens de l'application graphique.

Emmanuel :

- *Ensemble de définition :* Emmanuel commence par définir dans HOME la fonction $g(x) = -4x^2 + 121$ avant de chercher ses zéros à l'aide de la commande *Solve*. Il commet d'abord une erreur de syntaxe (due à une confusion entre la syntaxe de cette commande et celle de *Zeros* - Niveau 1 des connaissances-machine) qu'il corrige aussitôt puis obtient les racines du trinôme en question. Il fait tracer ensuite la représentation de g en *ZoomStd*, afin de conjecturer son signe :



Sans modifier le tracé qui ne semble pas exploitable, il finit par dresser un tableau de signe (signe du trinôme) en p/c. Il en déduit que la fonction est définie sur [-5.5;5.5].

Ceci correspond donc à la technique **T2b** qui repose sur la connaissance du signe d'un trinôme en fonction du coefficient de son monôme de plus haut degré. Soulignons cependant l'utilisation du tracé de la fonction g qui paraît fonctionner comme moyen de conjecture du signe du trinôme, mais qui pourrait être (si Emmanuel avait utilisé par exemple *ZoomFit* sur [-10;10]) un moyen de remédier à la non disponibilité de la connaissance citée ci-dessus. Remarquons que la mobilisation de cette connaissance ne demande pratiquement qu'un effort de mémoire, alors que l'utilisation du tracé se base sur des critères graphiques liés à l'intersection de la courbe représentative et de l'axe des abscisses. Nous pouvons nous interroger ici sur la méthode la plus productive - et même la plus fiable - du point de vue mathématique.

- *Etude des variations de f :* Emmanuel commence par étudier les variations de g sur $[-\frac{11}{2};\frac{11}{2}]$ en p/c. Il en déduit les variations de la fonction f sur le même intervalle en se basant sur le résultat suivant : *"La fonction racine ne change pas le sens de variations d'une fonction polynôme car elle est croissante".*

Emmanuel a entrepris donc une étude des variations de la fonction g en p/c, sans l'aide de la machine, sans doute à cause du fait que le type de la fonction g est familier et que le calcul de dérivée ne pose pas de problème.

- *L'équation f(x)=0 n'a pas de solution.* Emmanuel calcule dans HOME f(-11/2) et trouve 0. Il semble très étonné. Il va alors dans Y= pour sélectionner la fonction f (cette sélection se fait par dé-sélection de la fonction g) puis dans l'application GRAPH, il se déplace avec *Trace* arrivant jusqu'à la valeur extrême x=-5.46216 et s'arrête. Il va ensuite dans TABLE après avoir changé le pas dans TblSet et contrôle le fait que f(-11/2)=0. Il revient au tableau de signes de g sur sa feuille et dit :"*c'est normal.* $\sqrt{0}$ *ça fait 0".* Mais il est quand même gêné et l'interviewer de demander :

I : Et alors, qu'est-ce qui se passe sur le graphique? Qu'est-ce que tu as comme valeurs?

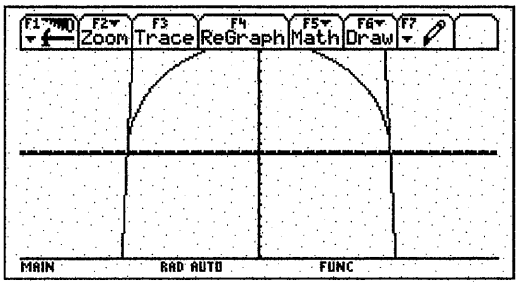
E : . . . apparemment, sur le graphique, la valeur minimale de y est 1.3

I : Et ça correspond à x ?

E : à un x d'environ -5.46

I : Oui

E change l'échelle sur x, passant en 0.1 et en résolution 1 (niveau 2 des connaissances-machine). Le tracé s'effectue.



E : c'est plus long à tracer mais c'est toujours la même chose

I : Est-ce que tu as une idée de ce que fait la machine pour tracer?

E : Peut-être qu'elle prend toutes les valeurs pour que $-4x^2+121$ soit strictement supérieur à 0 . . . . non, car si on avait ça, on se rapprocherait quand même plus de 0

I : Tu crois qu'elle prend toutes les valeurs la machine? Comment elle fonctionne?

E : Elle prend plusieurs points

I : Oui, et comment elle décide?

E : Elle prend des x différents puis elle calcule

I : Et qu'est-ce qui détermine les x qu'elle va prendre ?

E : Euh! Elle prend dans la fenêtre qu'on a défini

I : Et dans cette fenêtre, elle prend tous les x?

E : elle prend selon l'échelle, *xres*

I : selon l'échelle et la résolution, alors si xres est 1, elle calcule . . .

E : elle calcule tous les 1

I : pour -10 , -9 , . . . elle calcule pas pour d'autres points?

E : en plus?

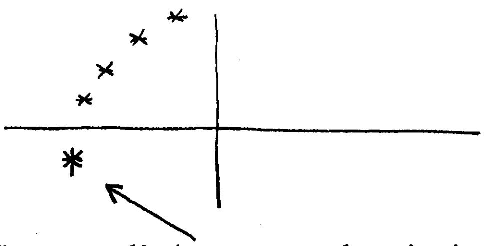
I : Tu sais pas trop comment elle fait

E : Non, je me suis jamais posé la question

I : Tu ne t'es jamais posé la question?

E : En fait, si peut-être . . .

Il dessine alors :



et dit : si le point d'avant est là (en montrant le point * ci-dessus), elle va pas le prendre, donc elle va pas tracer entre les deux et s'arrêtera au-dessus.

I. lui explique alors comment ça fonctionne.

Nous voyons donc que malgré une étude correcte de l'ensemble de définition, Emmanuel a été fortement perturbé par le phénomène graphique (la courbe ne touche pas l'axe des abscisses). Ainsi, bien que l'application HOME semble intégrée au travail mathématique, le statut de l'application graphique demeure assez fort pour remettre en question le travail algébrique effectué auparavant. L'application TABLE est également intervenue dans les manipulations d'Emmanuel qui, de ce fait, a fonctionné par comparaison de plusieurs sources : numérique, graphique et symbolique. Par ailleurs, nous retrouvons chez Emmanuel la volonté, déjà repérée chez Arnaud, de chercher une fenêtre dans laquelle l'intersection du graphe avec l'axe des abscisses serait visible. C'est ce qui explique ses changements d'échelle et de résolution dans WINDOW.

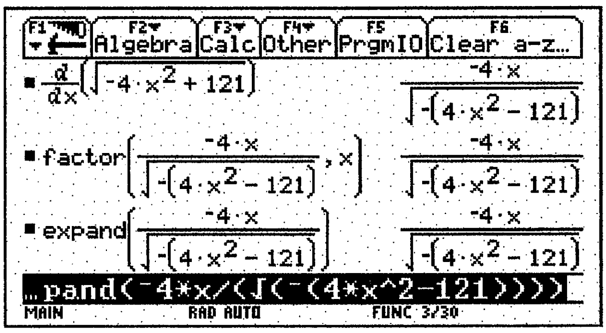
Soulignons la stratégie peu commune suivie par Emmanuel, qui consiste à étudier la fonction g pour en déduire les variations de f, ainsi que le recours à l'application TABLE où il mobilise le niveau 2 des connaissances-machine (à travers les changements effectués dans TblSet).

Soulignons également la perturbation provoquée dans un premier temps par la non disponibilité du fait que $\sqrt{0} = 0$ (déjà observée chez Arnaud) et qui a été manifestement à l'origine du manque d'articulation entre l'étude du domaine de définition et la résolution de l'équation f(x) = 0. En fait, Emmanuel ne semblait pas faire le lien entre f(x)=0 et g(x)=0. Nous pouvons penser que le résultat énoncé ci-dessus *"La fonction racine ne change pas le sens de variations d'une fonction polynôme car elle est croissante"* est appréhendé par Emmanuel dans son cadre le plus général et qu'il l'a appliqué au cas de la fonction racine, sans avoir de connaissances particulières sur cette fonction. Finalement, il nous semble fort possible que l'utilisation du résultat énoncé ci-dessus ait été pour Emmanuel une manière d'éviter les difficultés qu'il pouvait avoir à manipuler des radicaux.

Fabien :

- *Etude des variations :*

Fabien calcule la dérivée dans HOME en entrant l'expression de la fonction et sans passer par l'ostensif *Define* (ce qui était le cas au premier entretien). Il cherche ensuite une factorisation de l'expression trouvée à l'aide de la commande *Factor(.,x)*. Ayant obtenu la même expression, il utilise *Expand* mais sans résultat.



Il finit par raisonner en p/c sur l'expression de la dérivée et déduit le signe correctement avant de chercher l'ensemble de définition f.

En fait, impressionné par l'expression de la fonction dérivée qu'il n'a pas vraiment pris le temps d'observer, il a voulu transformer l'expression trouvée en une forme plus familière. Nous retrouvons ici ce qui s'est passé pour Amandine et Arnaud quand ils ont utilisé l'ostensif *Solve* alors que le zéro de la fonction dérivée était évident. Contrairement à ces deux élèves, Fabien a été bloqué à la suite de l'utilisation de la machine, ce qui l'a poussé à observer "plus longtemps" l'expression de la fonction dérivée. Finalement, les connaissances nécessaires à la recherche des zéros étaient disponibles et il les a même mises en œuvre oralement.

- *Ensemble de définition :* Fabien rectifie sa conjecture : il prend comme bornes -5.5 et 5.5

Il calcule dans HOME $\sqrt{121}$ et obtient 11, puis 121/4 (à l'aide de ♦*ENTER*) et obtient 30.25
Ensuite, il calcule la valeur de la fonction en 5.5 en retapant $\sqrt{-4(5.5)^2-121}$ et obtient 0. Il en déduit que la dérivée n'est pas définie en ce point. L'interviewer le ramène alors à la fonction en lui demandant la valeur de f en ce point 5.5. Il se décide alors à définir la fonction dans HOME par *Define*, puis calcule f(5.5) et trouve 0.
Confondant à plusieurs reprises l'ensemble de définition de f et de celui de f', il finit par s'arrêter. L'interviewer intervient alors pour débloquer la situation et s'en suit le dialogue suivant :

I : Si on te demandait dans un devoir : trouver l'ensemble de définition ? Quand sais-tu faire le calcul ? Quand ne peux-tu pas le faire ?
Silence.
I : tu avais une idée tout à l'heure
F : Ben, j'ai montré qu'elle était croissante jusqu'à x=0, donc qu'elle a un extremum en x=0 sur l'axe des ordonnées et puis
I : qu'elle vaut 0 en 5.5
F : et la dérivée s'annule, non
I : la dérivée n'est pas définie parce que son dénominateur s'annule, oui et puis, que la racine est toujours positive
F : Oui
I : Oui, mais pour pouvoir calculer la racine qu'est-ce qu'il faut. . .pour l'expression sous la racine?
F : connaître x
I : oui, mais peux-tu la calculer cette racine pour n'importe quel x ? par exemple pour x=10

F : oui

I : Et bien dis-moi ce que ça donne

Il tape $\sqrt{-4*10^2+121}$ au lieu de calculer simplement f(10), et obtient le message "*non real result*"

F : pas de résultat réel. Ah! Oui, ça doit être négatif. La racine là va être négative donc impossible à partir d'une certaine valeur de x

I : qu'est-ce qui est négatif à partir d'une certaine valeur de x?

F : Bein, toute la racine

I : ce qui est sous la racine

F : et la racine d'un nombre négatif c'est impossible, oui; donc il faut voir à partir de quelle valeur de x.

I : il faut trouver la valeur de x à partir de . . .

F : tout à l'heure, on a trouvé que pour 5.5 c'est nul, donc à partir de 5.5, il n'y a pas de résultat réel.

I : tu en es sûr?

F : Ben, je sais pas, je peux essayer par exemple 6.

Il le fait en retapant tout. Il essaie également 4, -10 puis -5.5

F : donc c'est entre -5.5 et 5.5, entre les racines c'est défini et en dehors des racines c'est pas défini.

Fabien n'arrive pas à avoir une approche formelle pour l'étude du signe de $-4x^2+121$, sans doute à cause de son profil mathématique (Fabien est un élève très moyen) et à la non disponibilité de connaissances liées à l'objet "racine carrée". En fait, il semble assimiler de manière erronée la fonction f à la fonction racine carrée dans la mesure où cette dernière est définie pour les x "à partir de" 0, ce qui explique sa tendance à chercher une valeur à partir de la quelle la fonction f serait définie.

Par ailleurs, Fabien ne semble toujours pas (depuis le premier entretien) donner sens à l'écriture fonctionnelle f(x).

- *Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :*

Il énonce la propriété de la parité de la manière suivante : "il faudrait montrer que si on prend une valeur pour l'ordonnée, par exemple y=3, il va y avoir deux x, du côté positif et du côté négatif . . . par exemple avec y=3, ça va être x=4 et x=-4 et il faudra montrer que sur toute la courbe comme ça c'est l'opposé des abscisses". Cependant, il n'arrive pas à l'exprimer de manière formelle.

- *Minimum* : Fabien dit que le minimum ne peut être égal à 1 puisque la fonction vaut 0 en -5.5

Marie-Anne :

- *f est paire* :

Marie-Anne démontre que f est paire en p/c.

- *f est définie sur [-5.5;5.5]* :

En p/c, Marie-Anne commence par écrire $-4x^2+121 \geqslant 0$ avant de factoriser et de chercher les zéros. Ensuite, elle entreprend d'étudier le signe à l'aide d'un tableau. En somme, cela correspond à la technique **T1** décrite dans l'analyse a priori.

- *Etude des variations :* Marie-Anne calcule la dérivée dans l'application HOME, puis détermine son signe en raisonnant sur le signe du monôme, et en déduit les variations de f à l'aide d'un tableau. Elle calcule ensuite les valeurs des extrema f(-11/2), f(11/2) et f(0) dans HOME.

Nous voyons donc que Marie-Anne a effectué presque tout son travail dans l'environnement p/c, sans doute à cause de la présence du polynôme $-4x^2+121$ qui est a priori facile à factoriser, dès que l'on repère que $121=11^2$ (identité remarquable). Par ailleurs, le bon profil mathématique de Marie-Anne (Cf *Profils des élèves choisis*) lui permet d'effectuer une résolution économique et efficace où l'utilisation de la machine est réduite au calcul de la dérivée et de valeurs de la fonction en des points remarquables.

Vincent :

- *f n'est pas définie pour les x tels que $4x^2>121$*

En raisonnant oralement, Vincent déduit que : $x > \sqrt{\frac{121}{4}}$ ou $x < -\sqrt{\frac{121}{4}}$. Il calcule ensuite dans l'application HOME $\sqrt{\frac{121}{4}}$ et en déduit que f est définie sur [-11/2;11/2]

En fait, la technique de Vincent représente une variante de la technique **T0** décrite dans l'analyse a priori.

- $\lim_{x \to 0} f(x) = \sqrt{121}$

Parce que *"quand x devient très petit, $-4x^2$ tend vers 0"*

- *Variations de f*

Pour étudier les variations de f, Vincent commence par calculer la dérivée dans l'application HOME. Puis, en raisonnant oralement sur l'expression trouvée, il dit : *"Le dénominateur est toujours positif parce que c'est une racine, donc la dérivée a le signe de –4x, et –4x est positif quand x st négatif et négatif quand x est positif. Donc la fonction est bien croissante quand x est négatif et décroissante quand x est positif"*

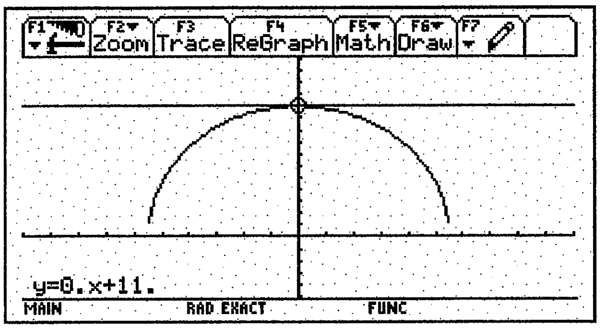
- L'interviewer lui demande alors de préciser ce qui se passe aux bornes, et Vincent répond : *"Les bornes . . . je sais pas justement . . . parce qu'elle n'est pas tout à fait jusque l'axe (des abscisses) . . . les bornes normalement tendent vers 0"*

L'interviewer lui demande alors : "Qu'est-ce qui tend vers 0?"

Et Vincent abandonne le graphique pour raisonner sur l'expression algébrique de la fonction : *"Quand x=11/2 ou –11/2, f(x) est égal à 0".* A titre de contrôle, il va dans TABLE après avoir adapté le pas dans TblSet (contraintes d'usage – ici, la mobilisation du niveau 2 des connaissances-machine met en jeu des connaissances mathématiques. En effet, voulant vérifier que f(-5.5) est égal à 0, Vincent a changé le pas de 1 à 0.5 afin d'atteindre la valeur –5.5) et retrouve bien ses résultats. Il précise enfin qu'il aurait pu également calculer f(-11/2) et f(11/2) dans l'application HOME.

Par ailleurs, il n'arrive pas à interpréter le phénomène graphique.

- Pour justifier que la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est horizontale, Vincent utilise la commande *F5-A-Tangent* dans l'application GRAPH et obtient :



Et l'interviewer : Est-ce que c'est suffisant pour justifier?

Vincent : Non, parce que c'est encore une valeur approchée, parce qu'il y a le point après 0 et le point après 11 (en se référant à l'équation affichée par la machine). Donc on pourrait calculer la valeur exacte.

Et il va dans HOME, et calcule la valeur de la dérivée en 0 avant d'écrire en p/c l'équation formelle de la tangente en question.

Ainsi, d'une part, Vincent semble conscient du fait qu'il faille faire des calculs exacts pour justifier. D'autre part, nous pouvons voir dans le recours à l'application GRAPH, alors même que l'équation formelle de la tangente semble disponible, le signe que le statut de cette application, à travers les outils-TI92 puissants contenus dans le menu *F5* notamment (tels que *F5-A-Tangent*), est assez fort, malgré le très bon niveau mathématique et le rapport positif aux technologies informatiques de Vincent. Rappelons que de plus, le caractère approché de GRAPH (connaissance-machine de niveau 3) a été maintes fois précisé par l'enseignante en classe (cf. *Dimension Institutionnelle*). Remarquons également le rapport personnel de Vincent à la distinction Exact/Approché, à travers les critères erronés sur lesquels il semble baser sa reconnaissance de cette distinction. Ainsi, pour cette commande, il se fie uniquement à l'affichage, par "la présence ou non de point après un nombre", pour distinguer une valeur exacte d'une valeur approchée, alors que, précisons-le, la commande en question affiche systématiquement des "points" que le résultat soit exact ou approché.
Signalons enfin que l'interviewer a oublié de demander la justification de la parité, sachant que Vincent a conjecturé que la fonction était paire.

En ce qui concerne le domaine de définition, nous retrouvons tout d'abord, comme pour Amandine et Fabien, l'interprétation aux points d'arrêt en terme de limites. Soulignons ensuite la perturbation visible due au phénomène graphique. Nous remarquons que malgré son profil, Vincent a eu un moment d'hésitation et n'a pas su faire le lien entre sa recherche du domaine de définition et l'interprétation de ce qui se passe graphiquement aux bords.

Légende :

(n)	Utilisation n fois
Cal	Calcul numérique avec les opérations de base
SD	Sélection ou Désélection dans Y=
Cal.	Calcul numérique
¤	L'élève consulte l'application

Conjectures et Justifications des élèves

	Conjectures	Justifications			
		P/C	**HOME**	**GRAPH**	**TABLE**
Amandine	• f(x)=0 n'a pas de solution • la courbe Cf est symétrique / Oy • f positive • Minimum atteint ≈ en -5.5 et en 5.5 et valant ≈ 1 • Maximum valant ≈ 11 • Fonction croissante entre –5.5 et 0, puis décroissante entre 0 et 5.5 • D*f* ≈]-5.5 ; 5.5[(domaine de définition)	Résolution d'inéquation Tableau de signes	*Solve (2)* *♦ENTER* *f(.) (3)* *d(.*	WINDOW ¤	
Arnaud	• f positive • Cf symétrique / Oy - f paire • D*f* =]-5.5 ; 5.5[• Maximum atteint en 0 et valant 11 • Minimum valant 0 • Fonction croissante entre –5.5 et 0, puis décroissante entre 0 et 5.5	Zéro de la dérivée	*Cal.* *Solve (2)* *d(.* *utilisation de* | *Define* *f(-x)* *f(0)*		TblSet : changement du pas
Emmanuel	• D*f* ≈]-5.4 ; 5.4[• Cf symétrique / Oy • f positive • f(x)=0 n'a pas de solution • Fonction croissante entre –5.4 et 0, puis décroissante entre 0 et 5.4	Signe d'un trinôme	*Define* *Solve* *f(.)* *♦ENTER*	*ZoomStd* *SD* *Trace*	TblSet : Changement du pas
Fabien	• D*f* ≈ [-4.5 ; 4.5] • Fonction croissante entre –4.5 et 0, puis décroissante entre 0 et 4.5 • La valeur du minimum est supérieure à 1 • Maximum valant ≈ 11 • Cf symétrique / Oy	Zéro et signe de *f'*	*d(.* *Factor(.,x)* *Expand* *f(.)* *Cal* *♦ENTER* *Define*		
Marie-Anne	• Df=]-5.5 ; 5.5[• C*f* symétrique / Oy - f paire • Fonction croissante entre –5.5 et 0, puis décroissante entre 0 et 5.5	Parité Factorisation Tableau de signes Signe de *f'*	*d(.* *f(.)* *♦ENTER*		
Vincent	• Df=[-5.5 ; 5.5] • Fonction croissante entre –5.5 et 0, puis décroissante entre 0 et 5.5 • f positive • C*f* symétrique / Oy - f paire • Maximum atteint en 0	Résolution d'inéquation Signe de *f'*	*Limit* *d(.* *f(.)* *f'(.)*	*F5-A-Tangent*	TblSet : changement du pas

Conclusion :

Globalement, les stratégies des élèves se situent au niveau du troisième pôle (Cf *Année 1 - Conclusion*) dans la mesure où ils utilisent essentiellement les environnements p/c et HOME pour justifier leurs conjectures. Cependant, Arnaud et Fabien résistent encore (comme au premier entretien) à l'utilisation systématique de l'application HOME dans la résolution. En effet, ils semblent éviter autant que possible d'utiliser l'ostensif *Define* et préfèrent manipuler vaille que vaille l'expression algébrique des fonctions en jeu, aussi lourdes soient-elles.
Par ailleurs, nous retrouvons quelques résultats de l'entretien précédent : ainsi, l'application HOME semble sans conteste être l'application principale dans le travail de justification, avec notamment des articulations avec l'environnement p/c. Les ostensifs *Zeros, Solve* ou *d(.,x)* sont toujours aussi familiers et leur statut mathématique bien intégré. En ce qui concerne l'application GRAPH, son utilisation reste très limitée dans cette phase de justification et les ostensifs puissants tels que *F5-Minimum* ou *F5-Maximum* sont peu ou pas mis en œuvre (Vincent est le seul à les utiliser) contrairement à ce qui a été prévu dans l'analyse a priori. Pour ce qui est de l'application TABLE, elle a été sollicitée par Arnaud, Emmanuel et Vincent lorsque ceux-ci étaient fortement perturbés par le phénomène graphique (le fait que la courbe de la fonction ne touche pas l'axe des abscisses sur la TI92). Cette utilisation a été marquée cependant par la mise en jeu du niveau 2 des connaissances-machine, où les changements effectués dans TblSet étaient loin d'être arbitraires et tenaient compte de manière efficace des valeurs trouvées pour les bornes de l'ensemble de définition.
Cependant, la nature de la fonction étudiée et notamment la présence d'une racine carrée a induit des perturbations dues essentiellement à non disponibilité de connaissances mathématiques, et que l'utilisation de la TI92 n'a pas pu empêcher (comme par exemple, le fait de savoir qu'"*une racine est toujours positive*", ce qui est fondamental dans la recherche du domaine de définition). Notons également l'apparition de la notion de limite sous sa forme la plus intuitive pour l'interprétation du phénomène graphique, qui montre la fragilité à cette époque de l'année du rapport de certains élèves à l'objet "*limite*" pourtant pris en charge institutionnellement (cf. *Dimension Institutionnelle - Observation 4)*.

CONCLUSION GENERALE

Conclusion Générale

Notre travail de thèse porte globalement sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement des mathématiques au lycée et, plus spécifiquement, sur la façon dont se construit et évolue le rapport des élèves à cet objet complexe, sur le rôle que jouent les mathématiques dans la construction et l'évolution de ce rapport. Au début de ce travail, nous avons surtout pris en compte la dimension individuelle du travail avec machine en nous basant sur les approches développées en ergonomie cognitive et notamment sur les travaux de Rabardel. Ainsi, avons-nous retenu et essayé d'adapter à notre étude certains concepts centraux dans ces approches tels que ceux d'*instrument* et de *genèse instrumentale.* L'instrument y est perçu comme une entité mixte qui se constitue à partir d'un *artefact* (objet matériel ou symbolique) et de l'utilisation que fait le sujet - psychologique et social - de cet artefact ; un instrument est le produit d'un processus qui se déroule dans le temps : la genèse instrumentale. Cette dernière notion nous a paru très intéressante et fructueuse dans la mesure où elle tient compte non seulement de la dimension développementale des pratiques instrumentées, mais également de l'imbrication de deux composantes : d'une part, l'*instrumentation* qui, tournée vers le sujet, concerne les modes opératoires et la manière dont ledit sujet utilise l'artefact pour résoudre une tâche donnée, d'autre part, l'*instrumentalisation* qui, tournée vers l'artefact, concerne la manière dont ce dernier est transformé ainsi que son statut dans l'activité du sujet.

Dans un deuxième temps, nous avons estimé que, dans la genèse instrumentale d'un artefact aussi complexe que celui qui nous intéresse, la TI92, celui-ci n'offre pas seulement une multitude de possibilités qu'il faudra savoir exploiter et gérer, mais également un ensemble de contraintes qu'il faudra savoir repérer, prendre en compte et éventuellement dépasser. Dans cette perspective, nous avons analysé quelques typologies de contraintes proposées par différents chercheurs (notamment Balacheff, Rabardel et Trouche) et avons essayé de montrer le besoin d'une nouvelle typologie qui tienne compte de manière plus structurée de la nature double des objets manipulés, lesquels sont autant des objets techniques que des objets "à mathématiques". Nous avons ainsi proposé l'idée d'*acte d'usage* (en référence à la notion d'*acte instrumental* de Vygotsky 1985), ce qui nous a permis de distinguer trois types de contraintes qui se répartissent sur quatre niveaux de connaissances-machine : des *contraintes* *syntaxiques* (niveau 1), des *contraintes d'usage* (niveau 2) et des *contraintes internes* (niveaux 3 et 4).

Par ailleurs, conformément aux choix qui ont initié cette thèse, et qui s'inscrivent dans le cadre des approches anthropologiques, nous ne pouvions considérer la seule dimension individuelle de la genèse instrumentale, dans la mesure où l'élève est un *sujet de l'institution didactique* à part entière. Il nous a donc paru nécessaire de prendre en compte la dimension institutionnelle dans notre étude des processus sous-tendant l'évolution de l'instrumentation (et de l'instrumentalisation) de l'artefact TI92. Nous nous sommes appuyés pour ce faire sur l'approche anthropologique du didactique développée par Chevallard ainsi que sur la thèse de Bosch concernant la dimension sémiotique de l'activité mathématique, non sans adapter certains des concepts de cette approche au contexte de notre recherche. En effet, la diversité et la puissance des ostensifs accessibles sur le type de machine étudié ainsi que le statut institutionnel de ces objets nous ont poussé à faire la distinction entre plusieurs types de praxéologies :

- des *praxéologies institutionnelles*, qui ne se réduisent pas uniquement à celles qui sont *officielles* et déterminées par les environnements usuels de l'enseignement. Nous avons aussi à prendre en compte des praxéologies associées à l'environnement instrumental considéré dans cette recherche, le changement d'environnement modifiant l'ensemble des tâches mais aussi, pour des tâches usuelles, l'éventail des techniques et les besoins technologiques et théoriques. Nous avons dénommé *praxéologies locales* ces nouvelles praxéologies, le terme « local » renvoyant ici à la particularité de la situation expérimentale et à la légitimité toute locale encore des praxéologies institutionnelles qui pouvaient y être observées ;
- des *praxéologies individuelles* qui concernent la dimension personnelle de cette utilisation, dans la mesure où les pratiques individuelles ne se réduisent pas forcément rapidement à quelques pratiques institutionnelles, vu la diversité des ostensifs et des techniques possibles pour un même type de tâche, dans ce nouvel environnement, vu aussi les caractéristiques des rapports institutionnels aux techniques instrumentées.

En nous appuyant sur ce cadre théorique, nous avons étudié dans la suite de notre travail la genèse instrumentale liée à l'utilisation de la machine dans ses deux dimensions, institutionnelle et individuelle. Nous avons par là même étudié, dans l'environnement-machine, d'une part les *praxéologies institutionnelles*, dans leur composante localement officielle, à travers des observations de séances de classe où la machine a été mise en jeu, d'autre part les *praxéologies individuelles*, par le suivi de quelques élèves, essentiellement à travers des entretiens mais également via des questionnaires et des productions écrites. Le projet global de recherche couvrait l'ensemble de l'enseignement en première S mais, pour notre contribution à cette étude, nous nous sommes centré sur un domaine mathématique précis : celui de la variation des fonctions et c'est la genèse instrumentale associée que nous avons analysée dans ses dimensions institutionnelles et individuelles ainsi que dans leurs interactions.

Lors de la première année d'expérimentation, nous avons identifié par rapport à ce domaine une genèse qui mettait en jeu trois types de rapport successifs à la variation :

- un premier rapport que nous avons qualifié de rapport « pré-analytique », s'inscrivant dans la continuité des praxéologies associées à l'étude de la variation en classe de seconde, marqué sur le plan instrumental par une utilisation dominante dans la résolution de l'application graphique et dans une moindre mesure de l'application Table. L'application de calcul formel y joue un rôle marginal ;
- un deuxième rapport que nous avons qualifié d'intermédiaire, où la variation commence à intégrer les nouveaux outils de l'analyse, sans qu'au niveau instrumental on note un réel changement, même si l'application de calcul formel est plus sollicitée et commence à s'articuler avec les applications dominantes ;
- un troisième rapport que nous avons qualifié « d'analytique », où, au niveau instrumental, s'opère un basculement dans le statut des applications, l'application de calcul formel devenant (conjointement avec le travail papier / crayon) l'application dominante dans la résolution, les autres applications se reconstruisant comme applications dédiées principalement à l'anticipation, l'exploration et le contrôle.

L'évolution a été diverse suivant les élèves mais nous avons été frappé par la résistance du rapport « pré-analytique », particulièrement visible dans les entretiens où la pression du contrat didactique se faisait moins forte, et par le recours que ce rapport constituait pour un certain nombre d'élèves, même en fin d'année, lorsqu'ils étaient confrontés, comme dans l'entretien 3 à une complexité ou une tâche inattendue.

Cette première année a montré également que la genèse instrumentale semblait obéir à des cycles de deux phases :

- une *phase d'éclatement*, où les pratiques instrumentées des élèves se caractérisent par certains phénomènes tels que le *zapping*, l'*oscillation* ou la *sur-vérification* (cf. *Année 1 - Dimension Individuelle*) ;

- une *phase d'épuration* caractérisée par une stabilisation des stratégies et techniques instrumentées, et qui s'accompagne souvent d'une centration sur quelques commandes, les choix effectués restant cependant différents d'un élève à l'autre.

Nous avons également observé que la durée et l'évolution de ces rapports et phases, et donc de la genèse instrumentale, dépendait du rapport personnel de l'élève aux mathématiques et aux technologies informatiques, ce qui rejoint des résultats obtenus par Trouche dans sa thèse. Plusieurs hypothèses explicatives pouvaient être avancées : l'influence du rapport ancien aux calculatrices graphiques dans l'étude des situations fonctionnelles qui s'était stabilisé pendant l'année de seconde et avait été renforcé pendant tout le premier trimestre de 1ère S, compte-tenu de l'arrivée tardive des TI92 en classe, contribuait sans doute à la résistance de la phase dite « pré-analytique ». La diversité des actions instrumentées possibles pour une même tâche élémentaire contribuait sans doute à la force des phénomènes d'éclatement. Cependant, l'analyse de la genèse instrumentale "institutionnelle" nous a poussé à considérer un autre facteur qui pouvait avoir joué un rôle déterminant : les difficultés de gestion institutionnelle des techniques instrumentées. Dans l'analyse des situations de classe, ces difficultés sont apparues la première année de façon récurrente. Elles semblaient liées :

- d'une part, à la nécessité de gérer et d'articuler les deux types de praxéologies nécessairement en présence, à savoir les *praxéologies officielles,* correspondant à l'évolution "habituelle" du savoir, et les *praxéologies institutionnelles locales,* au sens défini plus haut, émergeant de l'introduction de la machine ;
- d'autre part, au fait que les besoins technologiques (au sens défini pour ce terme par Chevallard) sont différents des besoins technologiques standard pour ces praxéologies institutionnelles locales mais que, lors de cette première expérimentation, l'analyse de ces besoins restait largement ouvertes, et plus encore la question des moyens de satisfaire ces besoins de façon cohérente et compatible avec les contraintes du système. L'enseignant n'était pas outillé face aux choix et décisions qu'il avait à effectuer dans ce domaine.

En fait, dans cette première année d'expérimentation, la gestion des techniques instrumentées et des technologies correspondantes, passées les premières séances d'introduction de la machine, s'est déroulée de manière irrégulière et souvent spontanée, en fonction des besoins ressenties. L'introduction d'explications, de justifications relatives aux techniques instrumentées était le plus souvent motivée par des erreurs, des difficultés rencontrées par les élèves. Mais l'enseignante, malgré son expertise, ne pouvait anticiper toutes ces erreurs et difficultés observées en classe, parfois il lui était même difficile de les interpréter et résoudre, en temps réel. Il faut souligner que la calculatrice n'était arrivée sur le marché que trois mois avant le début de l'expérimentation. La gestion des *praxéologies localement officielles*, celle de leur articulation avec celles *officielles* s'est donc avérée difficile.

A la fin de la première année, l'analyse des données recueillies a permis un travail didactique qui a orienté les choix faits à ce niveau dans la préparation de la deuxième année d'expérimentation, dans le cadre du projet global dans lequel s'inscrivait notre recherche

Lors de la deuxième année d'expérimentation, les choix de gestion institutionnelle se sont centrés autour de certains pôles clefs :

- Nous avons essayé de mieux prendre en compte le fait que les élèves arrivent en $1^{ère}$ S avec une culture instrumentale de type calculatrice graphique et qu'il faut installer un nouveau rapport au travail algébrique instrumenté. Ceci s'est traduit, par exemple, par une attention forte dès le début de l'année à la mise en place de rapports efficaces avec l'application HOME de calcul symbolique et des rapports entre cette application et les autres applications dans le travail mathématique.
- La mise en place de techniques instrumentées efficaces dans le domaine algébrique nécessite des connaissances spécifiques, permettant de gérer l'absence de forme normale pour ces expressions, l'explosion des formes rencontrées et les décalages fréquents avec les formes institutionnelles du travail en environnement papier / crayon, la difficulté à comprendre ce qui produit telle transformation plutôt que telle autre, pour contrôler la validité des évaluations automatiques. Pour ce faire, nous avons mis en place, assez tôt dans l'année, des tâches de travail sur l'équivalence et la transformation d'expressions, et développé des techniques spécifiques pour les traiter.
- En analyse, nouveau domaine pour les élèves, nous avons voulu limiter les risques d'aplatissement de notions comme celle de limite et de dérivée sur les ostensifs TI92 correspondants en retardant volontairement l'introduction de ces derniers. Ainsi, l'ostensif *limit* n'est apparu officiellement qu'au bout de cinq séances sur la notion de limite.
- Pour limiter les risques d'éclatement et favoriser la gestion des praxéologies locales, il a été décidé de n'introduire, dans une séance donnée, que très peu d'ostensifs-TI92 nouveaux, passé les toutes premières séances. Ceci s'est accompagné de choix au niveau des commandes officiellement introduites, ces choix visant à privilégier un nombre réduit de pratiques instrumentées liées à ces ostensifs et à permettre d'engager sur ces dernières un réel travail de routinisation. Les choix ont été guidés par des raisons d'économie mais aussi des raisons mathématiques. Ainsi en est-il du choix fait

d'introduire officiellement les objets fonctionnels par l'ostensif *Define* (cf. *Année 2 - Dimension Institutionnelle - Conclusion*) et de ne pas utiliser à ce propos l'onstensif STO, pour bien souligner le statut fonctionnel des objets manipulés, à un moment de la scolarité où l'objet fonctionnel est encore en gestation.

- Il nous a paru aussi important de prêter une attention particulière au développement d'un discours technologique spécifique aux techniques instrumentées qui ne se limite pas, au niveau 1 des connaissances machines et n'hésite pas, pour certains points clefs de l'instrumentation (structure des expressions, phénomènes de discrétisation) jusqu'aux niveaux 3 et 4, et ce même si ceci conduit à dépasser les besoins mathématiques ordinaires, tels que pensés dans l'environnement usuel.

Lors de l'analyse des genèses individuelles des élèves suivis la seconde année, les effets de ces choix institutionnel ont été certains. Ainsi, par exemple :

- A la différence de la première année d'expérimentation, on ne note plus la forte domination de la culture calculatrice graphique, dès le premier entretien. Il y a eu un meilleur équilibre (par rapport aux choix institutionnels) entre les trois applications et les élèves se situent beaucoup plus rapidement, pour des tâches analogues, dans le pôle analytique. Ceci ne signifie pour autant que les tâches correspondantes sont complètement maîtrisées et l'on voit bien l'effet, dans une pratique de type « analytique », des insuffisances d'ordre mathématique.
- On note un moindre éclatement des techniques associé à une utilisation plus réduite d'ostensifs, sans qu'il y ait pour autant à ce niveau une uniformisation des pratiques individuelles sur les techniques institutionnelles locales. Ceci, encore une fois, est particulièrement visible dans les entretiens où la pression institutionnelle est relachée.
- Les données recueillies montrent que les notions de limite et de dérivée ne se sont pas réduites aux ostensifs correspondants. perd pas complètement son sens derrière l'ostensif correspondant.

Si les effets des choix institutionnels sont sensibles, il restent cependant limités. Nous avons mentionné une résistance moindre de la culture calculatrice graphique. Ceci n'implique pas une coordination automatique des différentes registres du travail mathématique. Par exemple, dans le premier entretien, le premier questionnement se situant au niveau graphique, les élèves cherchent majoritairement à produire des formes proches de prototypes connus, de façon perceptive, sans faire intervenir les caractéristiques de l'expression algébrique. On retrouve ici un comportement identifié dans différentes recherches que le travail effectué n'a pas permis de dépasser. Dans le contrôle spécifique, ils identifient aisément l'erreur d'interprétation liée au tracé d'une asymptote verticale qui leur est proposée mais, en revanche, presque aucun ne fait appel au calcul de la dérivée et à sa factorisation pour déterminer, parmi les graphes proposés pour un polynôme de degré 5, lesquels peuvent être obtenus et dans quel type de fenêtre.

Par ailleurs, même si on note une certaine compréhension des phénomènes de discrétisation, les résultats acquis dans ce domaine restent très contextualisés, comme le montre le second entretien comportant une fonction racine. L'interprétation de phénomènes liés à l'existence d'asymptotes verticales, devenue familière, est bien maîtrisée en fin d'année, mais les connaissances semblent difficilement transférables à un nouveau type de phénomène, comme celui lié à la racine. On voit bien à cette occasion que le discours des élèves reste flou, peu opérationnel. Il en est de même avec la commande *ZoomFit* sur laquelle nous reviendrons. Cela semble d'ailleurs être le cas plus généralement du discours technologique des élèves concernant l'instrument. Enfin, malgré le travail institutionnel effectué dans l'ingénierie relative à la notion de dérivée et à la mise en lumière du caractère local de cette notion (cf. *Année 2 - Dimension Institutionnelle*), c'est le caractère d'outil global, via la fonction dérivée, qui semble essentiellement disponible, comme le montrent les réponses aux questions portant sur la dérivabilité dans l'entretien 1.

Comme nous l'avons observé tout le long de cette recherche, la genèse instrumentale est un processus complexe. Nous le voyons bien dans le cas de la tâche, si routinière pourtant, d'étude de variation qui a joué un rôle central dans les entretiens. Un petit changement, soit dans la manière de présenter la tâche, soit dans les choix de variables effectués, entraînant un autre positionnement initial vis à vis de la tâche, ou induisant une complexité nouvelle, suffisent à destabiliser des pratiques qui pouvaient apparaître comme tout à fait maîtrisées dès lors que des connaissances de niveau 0 et 1 suffisaient à la résolution.

Les résultats montrent également de façon claire comment, dans cette genèse instrumentale s'articulent, s'imbriquent à chaque instant connaissances mathématiques et connaissances machines. Cette imbrication de connaissances, qui prend des formes différentes suivant les pratiques propres à chacun, n'est en rien évidente à décrire. La recherche montre que, même si notre classification des niveaux de connaissance est faite en relation seulement avec la machine, comprendre le fonctionnement des élèves passe par la compréhension de la façon dont se combinent pour eux connaissances machine et connaissances mathématiques. Par exemple, dans l'utilisation de l'ostensif *ZoomFit,* le choix de l'intervalle [xmin;xmax] dépend, pour une utilisation efficace, de connaissances mathématiques. Ce n'est sans doute pas un hasard d'ailleurs si les élèves utilisent finalement assez peu, dans les entretiens, cet ostensif, pourtant officiel et efficace, lui préférant les ostensifs *ZoomIn* et *ZoomOut*, qui leur permettent un contrôle plus direct du travail de la machine et la possibilité d'ajustements et de retours en arrière aisés. Nous le voyons également dans la mise en jeu d'ostensifs comme Factor qui apparaît comme un excellent élément de diagnostic des rapports des élèves à cette notion paramathématique, dès que l'on sort des situations du second degré, routinières en environnement standard (cf. par exemple *Francis - Genèses Instrumentales - Année 1*).

Nous avons souligné ci-dessus la complexité des processus de genèse instrumentale mise en évidence par cette recherche, ainsi que la façon dont cette genèse imbrique connaissances mathématiques et connaissances machine. Nous voudrions revenir maintenant sur la dépendance de la genèse des choix institutionnels. Cette dépendance est particulièrement bien ressortie dans notre recherche, dans la confrontation des deux années d'expérimentation. Au delà de la seule dépendance, cette confrontation a mis en évidence la complexité des problèmes à gérer par l'enseignant. Il vit dans un système scolaire où les praxéologies officielles, les attentes institutionnelles sont définies indépendamment de l'instrument introduit ici. Rien dans les textes officiels ne fait obstacle à la légitimité de l'instrument, mais elle ne s'en trouve pas pour autant assurée. L'enseignant, dans cette recherche, tout en restant assujetti à ces attentes, se trouve confronté à une nécessaire modification des praxéologies. Cette modification porte à la fois sur les tâches, les techniques et les technologies. Les tâches usuelles ont été calibrées pour pouvoir vivre en papier / crayon. Notre recherche, comme celles déjà citées, montre bien qu'elles sont insuffisantes à assurer une instrumentation efficace. Dans les types de tâche déjà existants, des changements dans les choix des variables sont souvent nécessaires pour dépasser une utilisation minimale de la machine, pour prendre en compte ce qui est aisément accessible à travers elle et ce qui nécessite réellement travail mathématique. Des techniques instrumentées sont à prendre en charge, institutionnaliser et, pour certaines d'entre elles, à routiniser, pour permettre d'aborder des situations plus complexes. Ceci nécessite des choix dans la diversité des possibilités offertes par la machine. Des technologies sont à construire pour accompagner ces techniques. Et, puisqu'il s'agit là forcément de techniques locales, elles doivent être articulées avec des techniques adaptées aux seuls environnements usuels (papier/crayon et calculatrices graphiques). Enfin, notre recherche semble aussi laisser penser que les types de tâches usuels, même convenablement adaptés, ne suffisent pas à une instrumentation efficace. La genèse expérimentale semble nécessiter, au delà de l'introduction de techniques instrumentées et de discours technologiques, des situations, des tâches spécifiques qui permettent de faire mieux ressentir les besoins technologiques dans l'action même. C'est ce qui a été fait par exemple la deuxième année au niveau des expressions algébriques. Ceci dit, des tâches centrées sur la machine, mais non moins mathématiques, nous semblent également indispensables pour une construction moins fragile et plus structurée du rapport à ce type de machine, et donc aux pratiques instrumentées. Dans cette perspective, plusieurs tâches dans la lignée de celles qui ont été proposées et travaillées par l'équipe d'analyse de Montpellier, et qui mettent en jeu les niveaux 2 et 3 des connaissances-machine, seraient adaptées. Compte-tenu des contraintes du système, il semble peu réaliste de vouloir les condenser sur une seule année et c'est sans doute sur la durée de tout le lycée que doit s'organiser, progressivement, la genèse instrumentale pour une machine comme la TI92.

Nous avons travaillé, dans cette recherche, avec une enseignante experte. Nous nous sommes ainsi placés dans une situation particulièrement favorable. Vu la nouveauté de la machine, tout autre projet aurait sans doute été peu réaliste. Cette expertise n'a pas masqué les questions qui se posaient mais, associée au travail didactique d'équipe, elle semble avoir permis d'arriver en l'espace de deux ans à une intégration raisonnable de la TI92. La viabilité des choix effectués avec d'autres enseignants reste un problème ouvert. La recherche nous a permis de pénétrer la complexité des phénomènes d'instrumentation, tant du point de vue institutionnel qu'individuel. Les besoins qu'elle conduit à pointer, en termes d'ingénierie didactique et de formation d'enseignants sont des besoins lourds.

BIBLIOGRAPHIE

Bibliographie

Abboud-Blanchard M. (1994), L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement des mathématiques : symptômes d'un malaise, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris 7.

Abboud M., Artigue M., Drouhard J.P., Lagrange J.B. (1995), Une recherche sur le logiciel DERIVE. Cahier de DIDIREM n°3 (numéro spécial). IREM Paris 7.

Aldon G. (1994), Un logiciel de calcul symbolique dans la classe. In Juge G. (ed) Les outils du calcul formel dans l'enseignement des mathématiques IREM de Basse Normandie, pp. 91-98.

Aldon G. (1996), DERIVE for 16-18 year old students. International DERIVE Journal, n°3.3, pp. 13-20.

Aldon G. (1998), Problèmes longs et calcul symbolique. In Actes de l'Université d'été 1996 " Des outils informatiques dans la classe... ", IREM de Rennes, pp. 1-18.

Artigue M. (1990), Epistémologie et didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 10/2.3, Editions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 242-283.

Artigue M. (1997), Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. Educational Studies in Mathematics, 33 (2), pp. 133-169.

Artigue M., Defouad B., Dupérier M., Juge G., Lagrange J.B. (1998), L'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée. Cahier DIDIREM spécial n°4 IREM Paris 7.

Artigue M., Lagrange, J.B. (1999), Instrumentation et écologie didactique de calculatrices complexes : éléments d'analyse à partir d'une expérimentation en classe de Première S. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998, IREM de Montpellier, pp.15-38.

Artigue M. (1998), Rapports entre dimension technique et conceptuelle dans l'activité mathématique avec des systèmes de mathématiques symboliques. Actes de l'Université d'été 1996 " Des outils informatiques dans la classe... ", IREM de Rennes pp. 19-40.

Aucherie P., Sacotte E. (1994), Utilisation d'un artefact comme instrument, analyse pour le DESS psychologie du travail et ergonomie cognitive, Université Paris VIII.

Balacheff N., Vivet M. (1994), Introduction. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 14, n°1.2, pp. 5-8.

Balacheff N. (1994a), Didactique et intelligence artificielle. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 14, n°1.2, pp. 9-42.

Balacheff N. (1994b), La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bkouche R. (1994), De la démonstration en géométrie, In : Le dessin géométrique de la main à l'ordinateur, IREM de Lille, pp. 189-232.

Bernard R., Faure C., Nogues M., Nouazé Y., Trouche L. (1998), Pour une prise en compte des calculatrices symboliques en analyse au lycée. IREM de Montpellier.

Bernard R., Faure C., Nogues M., Nouazé Y. (1999), Représentation approchée, représentation symbolique des nombres, coexistence dans une calculatrice. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998 IREM de Montpellier, pp. 15-38.

Berry J., Graham T., Watkins A. (1994), Integrating the DERIVE Program into the Teaching of Mathematics. International DERIVE Journal n°1.1, pp. 83-96.

Berry J., Maull W., Johnson P., Monaghan J. (1999), Routine questions and examination performances. In O. Zaslavsky (ed), Proceedings of the 23rd conference of PME Technion, Haifa, Israël, vol. 2, pp. 105-112.

Bloch I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19.2, pp 135-194.

Bosch M., Chevallard Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19.1, pp 77-124.

Bronner A., (1997), Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée, Thèse de doctorat, Université J. Fourier, Grenoble.

Bronner A., (1999), Pratiques de calcul : des égyptiens à la TI-92. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 15-38.

Brousseau G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique, Recherches en Didactique des Mathématiques, Editions La pensée sauvage, Grenoble, vol. 4.2, pp. 164-198.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2, pp.33-115.

Bruner J. (1983), Le développement de l'enfant. Savoir faire, Savoir dire, P.U.F. Paris.

Canet J.F. (1994), Exemple d'utilisation d'un Système Mathématique Symbolique. Mémoire de DEA. Montpellier : IREM, Université Montpellier II.

Castela C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures - un exemple concret : celui de la tangente, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 15,1, Editions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 7-47.

Chauvat G. (1998), Etude didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseignement des mathématiques des DUT industriels. Thèse de doctorat. Université d'Orléans.

Chevallard Y. (1985), La transposition didactique, Editions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1991), Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique. Grenoble : IMAG, pp. 103-117.

Chevallard Y. (1992a), Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques. In Cornu B. (ed), L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 183-203.

Chevallard Y. (1992b), Concepts fondamentaux de la Didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 12.1, Editions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 73-112.

Chevallard Y. (1995), La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique, in R.Noirfalise. et M.J. Perrin (eds), Actes de la huitième école d'été de didactique des mathématiques, IREM de Clermont-Ferrand, pp. 83-122.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.19.2, pp. 221-266.

Coppé S. (1993), Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de Première scientifique, en situation de devoir surveillé. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard-Lyon I.

Cornu B. (1983), Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles, Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

Defouad B. (1997), The integration of TI92 at high school level : a biographical approach, Proceedings of the 21st PME Conference. Lahti, University of Helsinki.

Defouad B. (1999), Processus d'instrumentation de la TI92 en classe de première. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 151-158.

Douady R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil / objet. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2, pp. 5-31.

Drijvers P. (1994), The Use of Graphics Calculators and Computer Algebra Systems: Differences and Similarities, International DERIVE Journal, n°1.1, pp. 71-82.

Drijvers P. (1996), White Box/Black Box revisited. International DERIVE Journal, n°2.1, pp.3-14.

Drijvers P.(1999), Évaluation et nouvelles technologies : différentes stratégies dans différents pays. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques " Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 127- 137.

Dubinsky E. (1991), Reflexive abstraction. In Tall D. (ed) Advanced mathematical thinking, Kluwer, pp. 95-123.

Dubinsky E. (1992), Utilisation de l'ordinateur à partir d'une théorie de Piaget sur l'apprentissage de concepts mathématiques. In Cornu B. (ed), L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 237-269.

Dubinsky E., Czarnocha B, Prabhu V., Vidakovic D. (1999), One theoretical perspective in undergraduate mathematics education research. In Zaslavsky O. (ed), Proceedings of the 23rd conference of PME Technion, Haifa, Israël. pp. 95-110.

Duval R. (1992), Argumenter, Démontrer, Expliquer : Continuité ou rupture cognitive ? Petit X n°31, pp. 37-61.

Duval R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Sciences cognitives, vol 5, IREM de Strasbourg, pp. 37-65.

Duval R. (1995), Sémiosis et pensée humaine. Peter Lang Pads.

Duval R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique?, Recherches en Didactique des Mathématiques , vol. 16 (3), pp. 349-382.

Echivard L., Heilbronner L., Hilt D., Le Feuvre B., Lagrange J.B., Meyrier X. (1999), De DERIVE à la TI-92. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 273-280.

Eisenberg Th. (1999), A skeptic replies to Edith Schneider's " on using CAS in teaching mathematics ". CAME Meeting at the Weizmann Institute (Rehovot, Israël), 1-2 août 1999, http://metric.ma.ic.ac.uk/came/events/weizmann/

Ganascia J.G. (1993), L'intelligence artificielle. Coll. Domino, 4. Paris : Flammarion.

Gelis J.M., Lenne D. (1998), Integration of learning capabilities into a CAS : the suites environment example. The First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, 27th - 31st August 1998 Osnabrueck - Haus Ohrbeck, Germany
http://www.erme.uni-osnabrueck.de/erme98.html

Grouws D.A. (ed.) (1992), Handbook of research on mathematics teaching and learning. Macmillan publishing company.

Guillaume P., Meyerson I. (1934), Recherches sur l'usage de l'instrument chez les singes : l'intermédiaire indépendant de l'objet, Journal de psychologie.

Guin D. et le Groupe Intégration des Outils Informatiques (1996), Etude des modes d'appropriation de calculatrices graphiques et symboliques dans une classe de Seconde, IREM de Montpellier.

Guin D., Trouche L. (1999a), The complex process of converting tools into mathematical instruments: the case of calculators. The International Journal of Computers in Mathematics Education, n° 3.3.

Guin D., Trouche L. (1999b), Environnements "calculatrice symbolique" : Nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation, Evolution des comportements d'élèves au cours de ces processus. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 61-78.

Harel I., Papert S. (eds.) (1991), Constructionism. Norwood, N.J., Ablex Publishing Corp.

Hauchart C., Schneider M. (1996), Une approche heuristique de l'analyse, groupe A.H.A, Repères Irem vol 25, Topiques Editions, Pont-à-Mousson, pp. 35-62.

Heid M.K. (1988), Resequencing skills and concepts in applied calculus. Journal for Research in Mathematics Education. 19 N°1, pp. 3-25.

Hirlimann A. (ed) (1994), Enseignement des Mathématiques et Logiciels de Calcul Formel. Ministère de l'Education Nationale.
Téléchargeable à http://www.ac-reims.fr/datice/broc_men/brocmen.htm

Hirlimann A. (ed) (1998), Faire des mathématiques avec un système de calcul formel. Ministère de l'éducation nationale, Direction de la technologie.
Téléchargeable à http://www.ac-reims.fr/datice/broc_men/brocmen.htm

Johsua S., Dupin J.J. (1993), Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques, PUF.

Juge G. (ed) (1994), Les outils de calcul formel dans l'enseignement des Mathématiques. Actes de l'Université d'été. IREM de basse Normandie

Klinger W. (1996), Using DERIVE for 13 and 14 year old Pupils in Austrian Grammar Schools. International DERIVE Journal, n°3.1, pp. 25-38.

Kuntz G. (1993), L'outil informatique ne peut donner que ce qu'il a, Repères-Irem vol. 11, Topiques Editions, Pont-à-Mousson, pp. 5-32.

Kutzler B. (1994a), DERIV(E)ons vers le futur des mathématiques. In Actes de l'Université d'été, Les outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, pp. 67-78. Caen : IRME et IUFM.

Kutzler B. (1994b), DERIVE : The future of Teaching in Mathematics. In The International Derive Journal, pp. 37-48. Plymouth (U.K.) : J. Berry Editor.

Laborde C. (1994), Les rapports entre visuel et géométrique dans un E.I.A.O. In Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Laborde C. (1999), Vers un usage banalisé de Cabri-Géomètre avec la TI92 en classe de seconde : analyse des facteurs de l'intégration, In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998 IREM Montpellier, pp. 79-94.

Lacasta E. (1995), Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire et supérieur : illusions et contrôles. Thèse, Université Bordeaux I.

Lakatos I. (1985), Preuves et Réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique, Hermann.

Lagrange J.B. (1996), Analysing actual use of a computer algebra system in the teaching and learning of mathematics. International DERIVE Journal, 1996, Vol.3 .3, pp. 91-108.

Lagrange J.B. (1999), Complex calculators in the classroom : theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. International Journal of Computers for Mathematical Learning, n°4.1 pp. 51-81.

Lagrange J.B. (2000), Approches didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement : le cas du calcul formel au lycée. Habilitation à diriger les recherches.

Legrand M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, Repères-Irem n°10, Topiques Editions, Pont-à-Mousson, pp.123-159.

Legrand M. (1996), A la recherche de la pierre philosophale pour enseigner l'analyse. Repères-Irem n°24, Topiques Editions, Pont-à-Mousson, pp. 9-10.

Legrand M. (1997), La problématique des Situations fondamentales et l'approche anthropologique, Repères-Irem vol 27, Topiques Editions, Pont-à-Mousson, pp. 81-125.

Mayes R. (1997), Current state of research into CAS in mathematics education. In J. Berry, J. Monaghan (eds) The state of computer algebra in mathematics education. Chartwell-Bratt, pp.171-189.

Monaghan J. (1997), Teaching and Learning in a Computer Algebra Environment : Some Issues Relevant to Sixth-Form Teachers in the 1990s. International DERIVE Journal, vol.3. 3, n°4.3, pp. 207-220.

Monaghan J., Sun S., Tall D. (1994), Construction of the Limit Concept with a Computer Algebra System. In Proceedings of PME 8 University of Lisbon, Portugal, III, pp. 279-286.

Mounier G., Aldon G. (1996), A Problem Story: Factorisations of xn-1. International DERIVE Journal, vol.3. 3, pp. 51-61.

Mounoud P. (1970), Structuration de l'instrument chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, Lausanne.

Noguès M. et Trouche L. (à paraître), Quelle prise en compte des contraintes didactiques dans des environnements technologiques complexes ? A paraître dans les actes de la Xème école d'été de didactique des mathématiques (Houlgate, août 1999).

Noss R., Hoyles C. (1996), Windows on Mathematical Meanings - Learning Cultures and Computers, Kluwer Academic Press.

Papert S. (1980), Mindstorms, Children, Computers, and Powerful Ideas. Basic Books, New York.

Pea R.D., Roy (1987), Cognitive technologies for mathematics education. In Schoenfeld A.H. (ed), Cognitive Science and Mathematics Education. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum, pp. 89-122.

Perrin-Glorian M.J. (1997), Institutionnalisation en classe de Seconde. In "Pratiques des élèves et des enseignants en classe de mathématiques. Rapport de recherche". Cahier DIDIREM, n° 29. IREM Paris 7.

Pozzi S. (1994), Algebraic Reasoning and CAS: Freeing Students from Syntax? In Heugl H., Kutzler B. (eds) DERIVE in Education, Chartwell-Bratt, Bromley.

Praslon F. (2000), Continuités et ruptures dans la transition Terminale S - DEUG Sciences en analyse : l'exemple de la notion de dérivée et son environnement, Thèse de doctorat, Université Denis Diderot Paris 7.

Prieto L.J. (1975), Pertinence et pratique, Editions de Minuit, Paris.

Rabardel P. (1995), Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin, Paris.

Repo S. (1994), Understanding and Reflexive Abstraction : Learning the concept of derivative in the computer environment.' International DERIVE Journal, vol.1. 1.97-113.

Robert A., Robinet J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 16.2, Editions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 145-176.

Robert A. (1998), Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'Université. Recherches en Didactique des Mathématiques , vol.18-2, pp. 139-189.

Rogalski J. (1993), Un exemple d'outil cognitif pour la maîtrise d'environnements dynamiques, Communication au Séminaire "Activités avec instruments", Laboratoire d'ergonomie du CNAM.

Rouchier A. (1992), Logo : exemple générique ou cas particulier ? In B. Cornu (ed), L'ordinateur pour enseigner les Mathématiques, Nouvelle Encyclopédie Diderot, Presses Universitaires de France, Paris, pp. 299-328.

Schneider E. (1999), La TI-92 dans l'enseignement des mathématiques, des enseignant(e)s découvrent la didactique des mathématiques. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998, IREM Montpellier, pp. 49 - 60.

Schneider M. (1989), Des objets mentaux "Aires" et "Volumes" au calcul des primitives. Thèse de doctorat, Louvain la Neuve.

Schneider M. (1991), Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, Repères-Irem vol 5, Topiques Editions, Pont-à-Mousson, pp. 65-81.

Schoenfeld A.H. (1992), Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics, D. Grouws (El), Handbook for research on mathematics teaching and learning, Macmillan, New York, pp. 334-370.

Sfard A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objets as different sides of the same coin, Educational Studies in Mathematics, 22(1), pp. 1-36.

Sierpinska A. (1985), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 6.1, Edifions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 5-67.

Simondon G. (1969), Du mode d'existence des objets techniques. Aubier, Paris.

Terssac G. de (1992), Autonomie dans le travail, PUF, Paris.

Tall D., Vinner S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, Educational Studies in Mathematics, vol 12, Kluwer Academic Publishers, Pays-Bas, pp. 151-169.

Tall D. (1996), Functions and calculus. In Bishop A.J. et al. (eds) International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic, pp. 289-325.

Tall D., Thomas M. (1991), Encouraging Versatile Thinking in Algebra using the Computer. Educational Studies in Mathematics, n°22, pp. 125-147.

Trouche L. (1994), Calculatrices graphiques : la grande illusion. Repères IREM, Topiques Editions, n°14, pp. 39-55.

Trouche L. (à paraître), Eléments de méthode pour une étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes. A paraître dans Educational Studies in Mathematics.

Trouche L. et al. (1998). Faire des Mathématiques au lycée avec des calculatrices symboliques. IREM Montpellier.

Trouche L. (1996), Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation. Thèse de l'Université de Montpellier 2.

Vergnaud G. (1990), La théorie des champs conceptuels, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 10.2.3, Editions La pensée sauvage, Grenoble, pp. 133-170.

Vergnaud G. (1996), Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, . In R. Noirfalise, M.J. Perrin-Glorian (eds), Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques. IREM Clermont Ferrand, pp. 174-185.

Vérillon P., Rabardel P. (1995), Cognition and Artifacts : a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology of Education, vol. X, n°1, pp. 77-101.

Vinner S. (1983), Concept definition, concept image and the notion of function, The International Journal of mathematical Education in Science and Technology, 14.3, pp. 293-305.

Vygotsky L.S. (1985), Pensée et langage. Paris : Editions Sociales.

Wain G. (1994), Some Technical Problems in the Use of DERIVE with School Pupils. International DERIVE Journal, n°1.1, pp. 49-56.

Waits B.K., Longhart K., Longhart F. (1999) Le rôle des calculatrices symboliques dans la réforme de l'enseignement des mathématiques. In Guin D. (ed) Actes du congrès " Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématiques ", Mai 1998, IREM Montpellier, pp. 39-47.

Wallon H. (1941), L'évolution psychologique de l'enfant, Armand Colin, Paris.

ANNEXES

ANNEXE 1

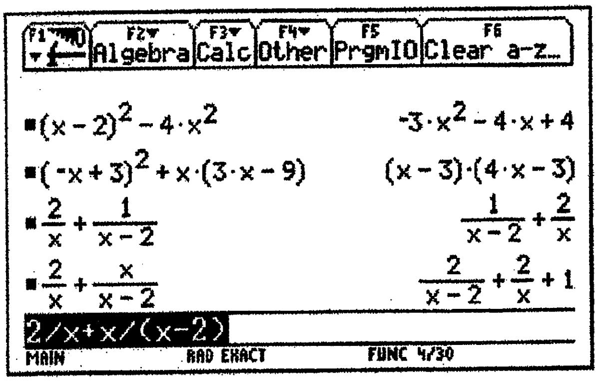
Activités relatives à l'Observation 1 - 2ème année d'expérimentation

ACTIVITES PROPOSEES :

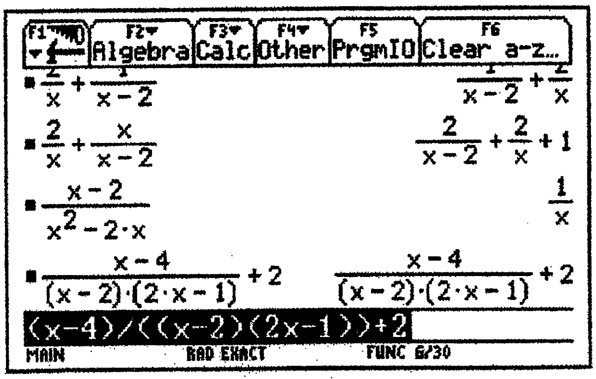
Elles sont au nombre de quatre.

Activité 1 :

Un certain nombre d'expressions rationnelles sont proposées. L'élève doit les entrer dans la machine, noter l'expression affichée par la TI92 et essayer d'exprimer mathématiquement le traitement effectué.
On a choisi ici volontairement des expressions d'une complexité que les élèves sont susceptibles de rencontrer à ce niveau. Les expressions sont choisies pour faire jouer les formes de traitement suivantes : développement, factorisation, simplification par un facteur (choisi pouvant s'annuler en fonction des objectifs décrits plus haut), décomposition en éléments simples, changement d'ordre des termes, renvoi de l'expression initiale, qui sont celles rencontrées avec les fractions rationnelles.
Bien d'autres choix d'expressions rationnelles sont bien sûr possibles avec les mêmes choix de variables didactiques.
On pourrait également mener un travail analogue avec des expressions incluant des radicaux. Pour une séance d'une heure, comme c'est le cas ici, il nous semble cependant plus efficace de centrer le travail sur les seules expressions rationnelles.



Ecran 1



Ecran 2

On notera également dans le choix des expressions, dans l'expression B, le signe « - », en première place, pour attirer l'attention sur les erreurs liées à l'existence de deux signes « - » sur la TI92 et le message d'erreur correspondant (syntax error), le facteur « x » précédant la parenthèse pour attirer l'attention sur la nécessité de rajouter le signe de multiplication et le message d'erreur correspondant (invalid implied multiply).

Activité 2

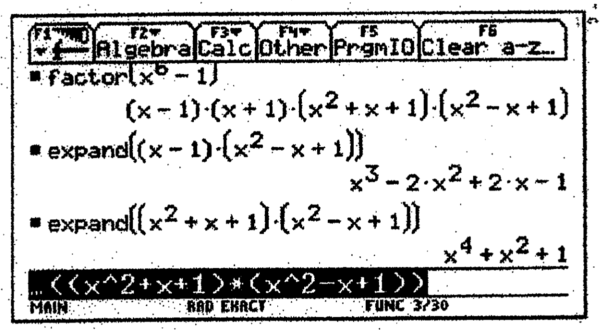
On explore pour les mêmes expressions le fonctionnement des commandes expand, factor avec et sans variable précisée, et comDenom pour les expressions non polynomiales. Le fait de choisir les mêmes expressions permet de limiter le travail de frappe, une contrainte se rajoute : choisir des expressions qui donnent une palette de transformées plus ou moins riche. Ici par exemple, l'expression D est simplifiée en 1/x quelle que soit la commande, l'expression E permet de différencier le fonctionnement des deux modes de factorisation, on s'aperçoit également que les traitements automatiquement opérés sur les expressions C et D correspondent au fonctionnement de la commande expand mais que ce n'est pas le cas pour l'expression F.

Activité 3 :

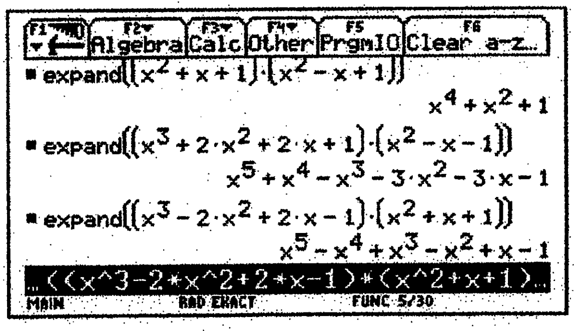
Trois expressions sont proposées et pour chacune d'elles trois expressions sont candidates à l'égalité. Il s'agit de déterminer dans chaque cas celles qui sont égales, en se servant de la calculatrice. Les expressions candidates à l'égalité sont choisies pour être toutes des expressions a priori crédibles, par exemple les degrés, les racines évidentes, la valeur en 0 sont respectées pour la première expression, les singularités respectées pour les expressions 2 et 3.
On peut, dans tous les cas, résoudre le problème avec la TI92 par un test d'égalité mais ce n'est pas la méthode la plus économique car elle oblige à rentrer toutes les expressions ; elle ne permet pas non plus de rentrer dans les raisons de l'égalité ou l'inégalité. Il nous semble bien plus probable que les élèves se situeront dans la continuité de ce qui précède et essayeront de prévoir des modes de passage entre expressions.

Pour l'expression 1 :

Dans la mesure où les trois expressions H, I et J proposées sont des produits de facteurs avec des coefficients entiers, on peut penser que les élèves vont d'abord utiliser la commande factor pour factoriser G, l'expression la plus simple à entrer. On obtient ainsi la factorisation à quatre facteurs figurant dans l'écran 3, qui ne correspond à aucune des expressions proposées, ce qui résulte bien sûr d'un choix délibéré. En revanche, l'expression H contient déjà deux des facteurs de la factorisation de G. Pour vérifier l'égalité, il suffit donc de vérifier que le produit des deux autres facteurs est bien égal au premier facteur de H, ce qui peut se faire à la calculatrice, soit en développant par la commande Expand le produit de facteurs (cf. écran 3), soit en factorisant le premier facteur de H. La seconde expression proposée : I peut se gérer de la même façon.
Pour l'expression J, compte-tenu de la similarité avec l'expression H, on peut penser à une comparaison avec H qui a été prouvée égale à G, comme par exemple celle proposée dans l'écran 4. Obtenant deux polynômes du cinquième degré de coefficients différents, on peut penser que les élèves n'hésiteront pas à conclure que les deux expressions ne sont pas égales. Dans le bilan, on pourra revenir sur ce pas de raisonnement et sur la propriété qui le fonde : une fonction polynôme est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.



Ecran 3

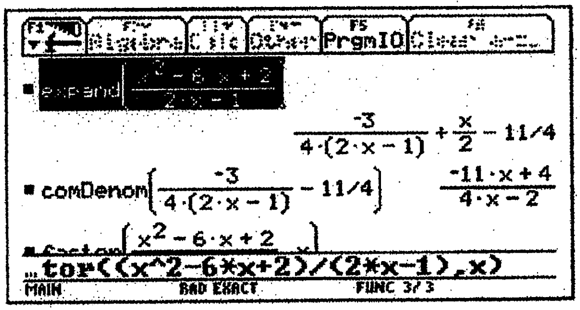


Ecran 4

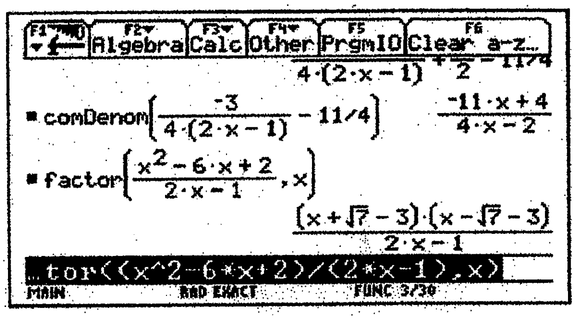
Nous avons ici cherché à limiter les entrées en tenant compte des facteurs communs. Une méthode plus brutale peut consister à entrer successivement les trois expressions H, I et J et à les faire développer. Dans les deux premiers cas, on obtiendra l'expression G, dans le troisième cas, on obtient le polynôme de degré 6 : $x^6+2x^5-4x^3-6x^2-4x-1$.

On peut aussi tester l'égalité en donnant des valeurs numériques à x. Les élèves, à ce niveau, ne savent pas que si deux polynômes de degré n prennent les mêmes valeurs pour n+1 valeurs distinctes de x, ils sont nécessairement égaux, le test ne peut donc leur permettre de conclure qu'en cas de réponse négative. Essayer une ou deux valeurs simples, dans un environnement papier/crayon peut être une stratégie économique, limitant les calculs algébriques à effectuer. Par exemple, pour x=0, les quatre expressions prennent la valeur -1, mais pour x=1, G, H et I prennent la valeur 0 et J la valeur -12. J ne peut donc être égale à G. On peut penser que la calculatrice ne va pas inciter à développer de telles stratégies. En effet, d'une part le coût faible des développements n'oblige pas à s'économiser de la sorte, d'autre part, le calcul de la valeur d'une expression pour une valeur de la variable va passer, soit par l'entrée de l'expression et l'affectation d'une valeur à x (par exemple : $x^6-2 \mid x=1$), soit la définition de l'expression comme fonction et la demande ensuite de sa valeur pour une valeur de la variable. Ceci n'est avantageux que si l'on a plusieurs valeurs à calculer successivement. Néanmoins, il peut être intéressant de pointer le test de valeur comme méthode dans la synthèse collective, même s'il n'est pas apparu. Outre son intérêt en environnement standard, c'est une occasion de revenir sur le sens de l'égalité.

Pour l'expression 2 :



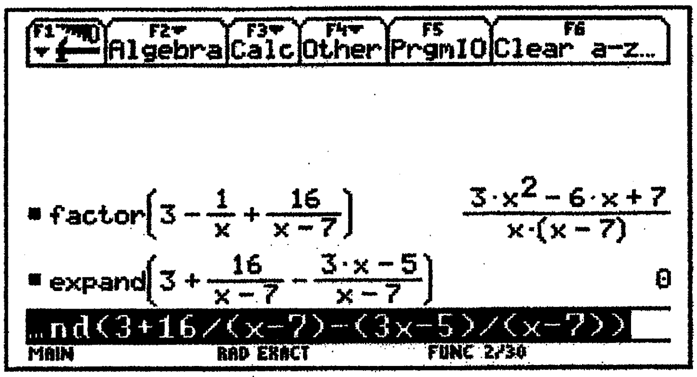
Ecran 5



Ecran 6

Les expressions proposées H et I étant des sommes, l'expérience de l'activité 1 peut conduire les élèves à développer G pour tester l'égalité (cf. Ecran 5). Ceci permet de repérer que H est l'opposée de G, donc que, vu que l'on n'a pas : pour tout x G(x)=G(-x), G et H ne sont pas égales. On peut penser que cette dernière partie du raisonnement sera omise par les élèves qui concluront immédiatement.
De même, la forme factorisée avec radicaux de J peut conduire les élèves à faire factoriser G, en utilisant la deuxième commande de factorisation. On obtient ainsi sans difficultés l'égalité de J et G (cf. Ecran 6). Pour l'expression I, qui est elle aussi égale à G, diverses méthodes sont possibles. Sur l'écran 5, nous avons exploité la présence du x/2 et utilisé la commande de réduction au même dénominateur.

Pour l'expression 3 :



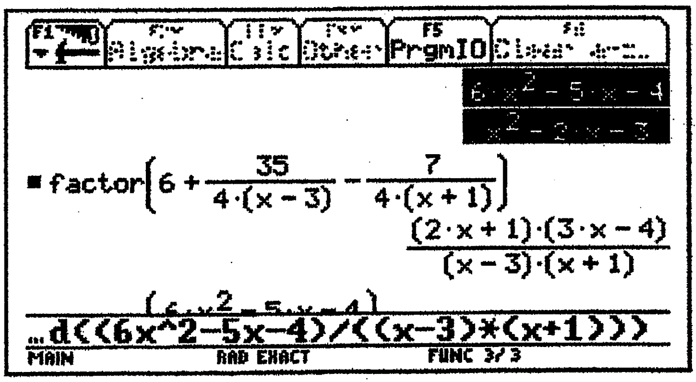
Ecran 7

L'expression G est donnée développée. Si on la fait factoriser par la machine, on obtient l'expression figurant sur l'écran 7 qui, par un raisonnement analogue à celui effectué pour l'expression 1, permet de conclure à la non égalité de G et I. La TI92 n'ayant pas factorisé le numérateur, l'expression J n'est sans doute pas égale à G. On peut le vérifier aisément en considérant une valeur particulière, racine de J : J s'annule pour x=-1, ce n'est pas le cas à l'évidence pour l'expression G. Mais on peut penser que les élèves choisiront plutôt de faire développer J ou son seul numérateur pour conclure. Enfin la comparaison de G et H peut, elle aussi, être traitée de différentes façons : réduction au même dénominateur, développement de la différence G-H ou d'une différence partielle comme dans l'Ecran 7, pour tenir compte du facteur 1/x commun aux deux expressions au signe près.

Comme ce qui précède le montre, l'utilisation de la TI92, en rendant ici compétitives une diversité de méthodes de comparaison, modifie l'économie de ce type de tâche et sa richesse potentielle sur le plan mathématique. Le fait collectif, associé à la proximité de l'activité 1, permettent de faire l'hypothèse que vont apparaître des méthodes variées susceptibles de susciter une synthèse riche, tant sur le plan mathématique que sur le plan de l'instrumentation de la calculatrice.

Activité 4 :

Il s'agit de trouver avec la TI92, le moyen de passer d'une expression A à une expression B et vice versa. De B vers A, le passage est immédiat par expand (à l'ordre des termes près), de A vers B, l'utilisation de la commande comDenom donne le quotient non factorisé, l'utilisation de la commande factor donne le quotient factorisé au numérateur et dénominateur. Il faut donc procéder en deux temps.



Ecran 8

ANNEXE 2

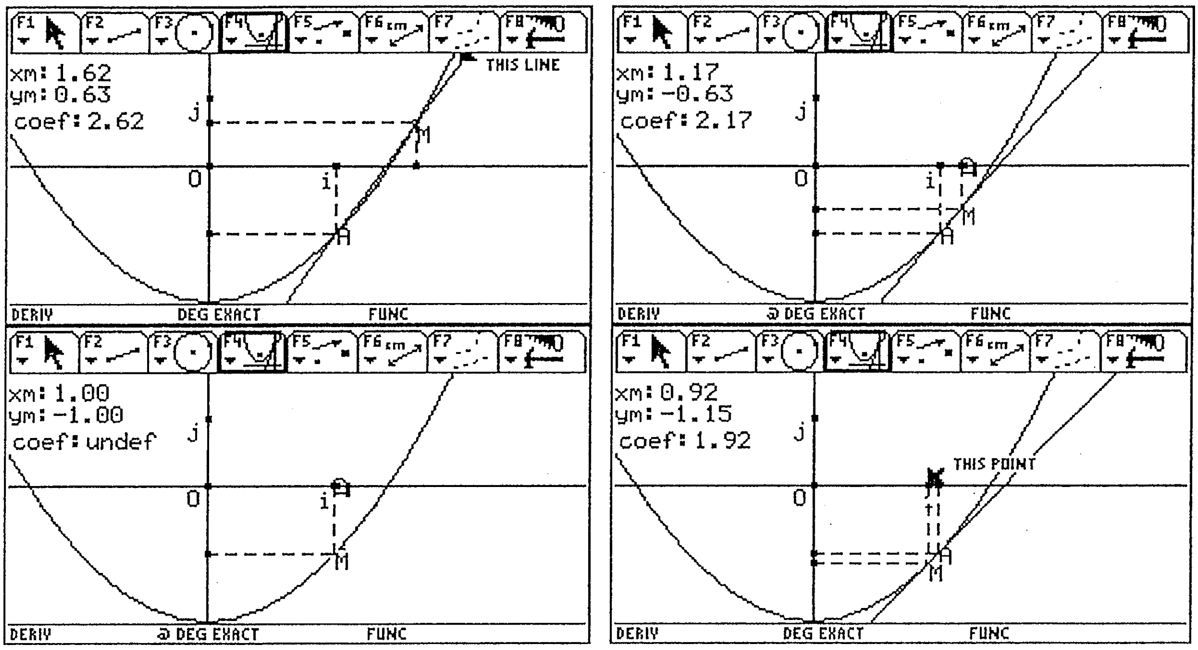
Résumé de cours sur les dérivées

DERIVEES

I Etude locale de deux fonctions.

a) Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 - 2$.

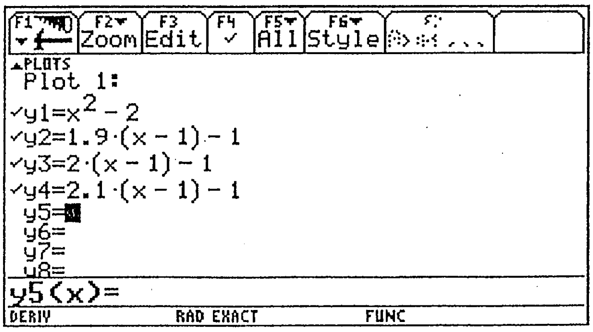
On se propose de faire une étude locale de f au voisinage de point A d'abscisse 1 et en particulier d'essayer d'approcher la courbe représentative de f par une droite. Pour cela, on considère une sécante (AM) à la courbe et on regarde ce qui se passe quand M « tend » vers A.

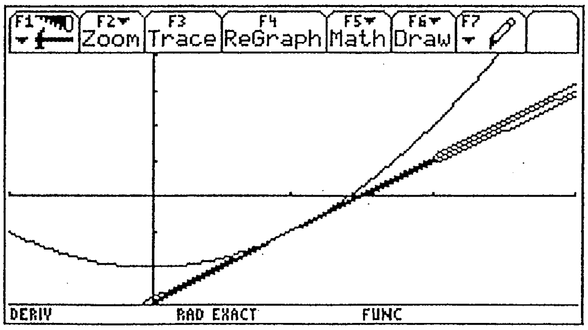


Quand M est en A la sécante n'existe plus (« undef » pour son coefficient directeur), mais cette droite a-t-elle une position limite quand M tend vers A, et quel est alors le coefficient directeur de cette droite « limite » ?

L'étude graphique à partir du module géométrie de la TI, nous amène à penser que la droite qui nous intéresse à un coefficient directeur voisin de 2. On va donc utiliser le module graphique de la machine, en traçant :

- la courbe représentative de la fonction,
- trois droites passant par A, celles de coefficients directeurs 1,9 ; 2 et 2,1.





Des zooms successifs centrés en A ne nous permettent pas de choisir la droite « la plus proche de la courbe ». Il apparaît donc nécessaire de définir un critère pour pouvoir choisir la droite.

Pour cela, M_h étant le point de la courbe d'abscisse 1+h, P_h point de la sécante d'abscisse 1+h ($h \neq 0$), on va calculer $\overline{P_hM_h}$ et étudier pour chacune des droites la limite de $\overline{P_hM_h}$ quand h tend vers 0.

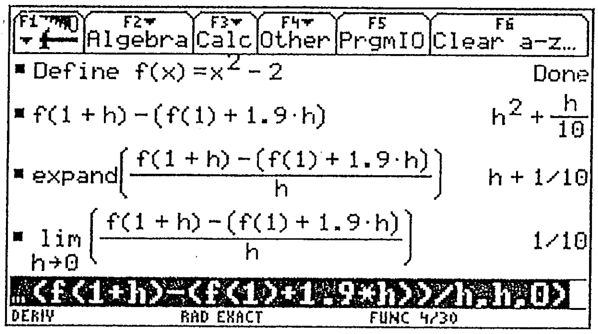
Coefficient directeur	$\overline{P_hM_h}$
1,9	$h^2 - \dfrac{h}{10}$
2	h^2
2,1	$h^2 + \dfrac{h}{10}$

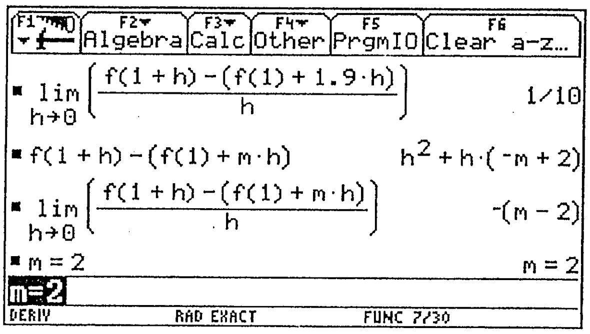
Dans les trois cas la limite en 0 de $\overline{P_hM_h}$ est 0.
On va donc chercher s'il y en a une qui « tend plus vite vers 0 » que les autres.

Pour cela, on cherche la limite du rapport $\dfrac{\overline{P_hM_h}}{h}$ en 0

Parmi les trois droites étudiées, seule celle de coefficient directeur 2 fourni une limite nulle.
Est-ce la seule ? Peut-on trouver une droite de coefficient directeur m pour laquelle $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0$?

On fait les calculs à la main, puis avec la machine





et on trouve que :

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0 \text{ si et seulement si } m = 2}$$

On va donc retenir que, au voisinage de x = 1 :

> Les droites passant par A et de coefficients directeurs 1,9 ; 2 ; 2,1 et peut-être d'autres sont « proches » de la courbe représentative de f,
>
> La <u>**seule sécante**</u> pour laquelle $\dfrac{\overline{P_hM_h}}{h}$ est **<u>négligeable devant h</u>**, c'est à dire $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0$ est celle de coefficient directeur 2.
>
> Cette droite particulière, est appelée **<u>tangente</u>** en A à la courbe représentative de f.

Ce nom de tangente fait penser à la tangente à un cercle. On connaît ses propriétés. Il semble normal de chercher dans le cas que l'on vient de rencontrer <u>quels sont les points d'intersection de cette « tangente » avec la courbe représentative de f.</u>

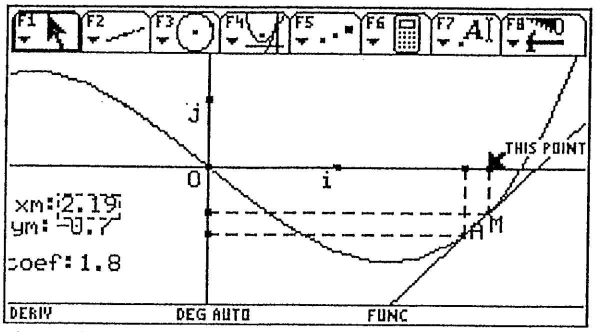
Pour cela, de façon classique, on résout le système formé par l'équation de la courbe et celle de la droite.

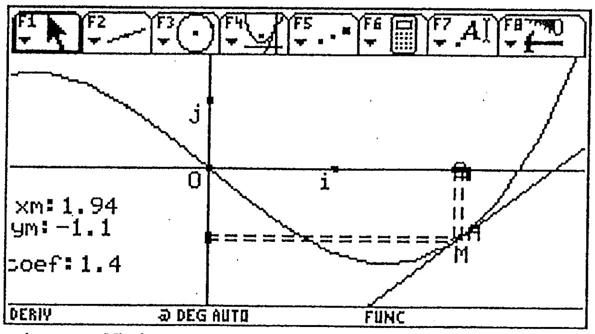
On trouve que la tangente « coupe » la courbe en deux points confondus.

$$x^2 - 2 = 2(x-1) - 1$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$

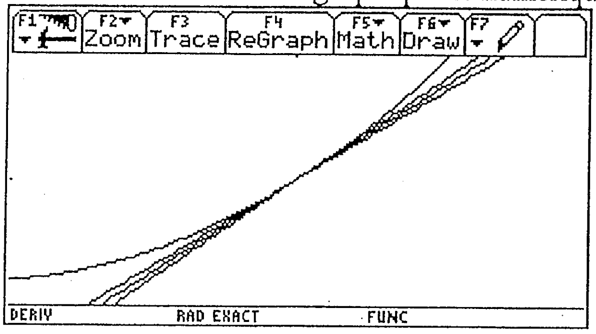
b) Etude de la fonction définie sur IR par $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x}{4}$ au voisinage de 2

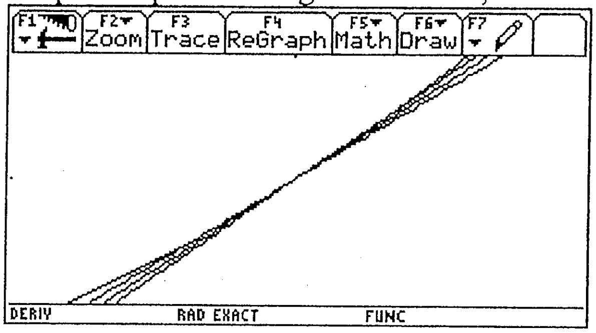
On procède comme pour la première fonction.



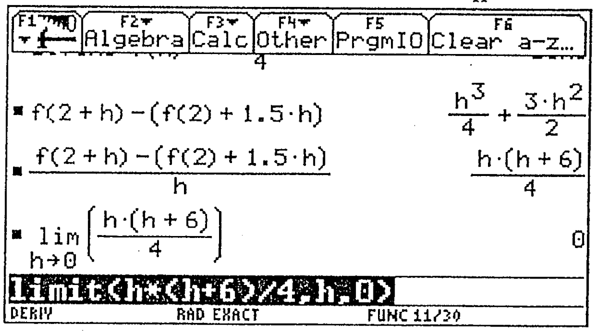


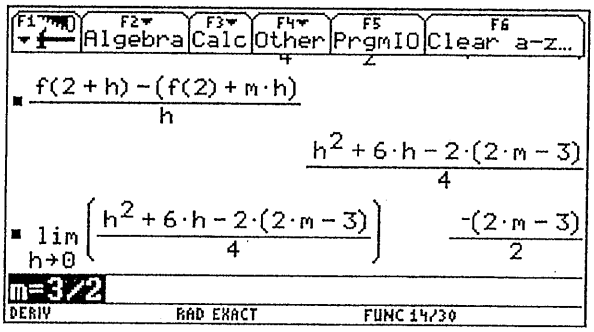
Il semble cette fois que ce soient les droites dont le coefficient directeur est proche de 1,5 qui soient susceptible de convenir.
L'étude avec le module graphique et numérique ne permet pas davantage de trancher,





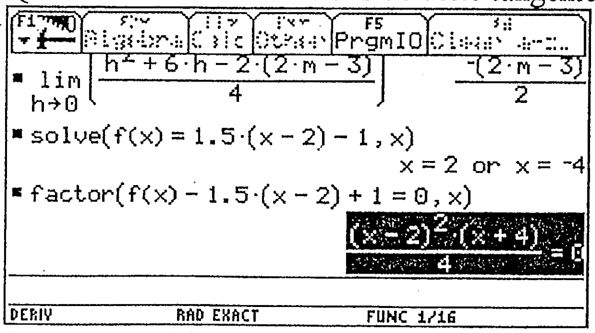
On fait de nouveau les calculs de $\dfrac{\overline{P_hM_h}}{h}$, cette fois avec la machine,

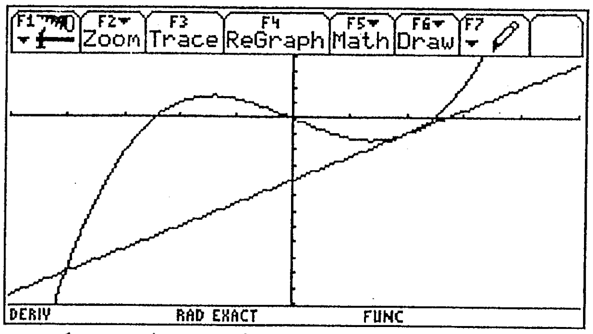




La **seule sécante** pour laquelle $\dfrac{\overline{P_hM_h}}{h}$ est **négligeable devant h**, c'est à dire $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0$ est celle de coefficient directeur $\dfrac{3}{2}$.

Quelles sont les intersections de cette tangente avec la courbe ?





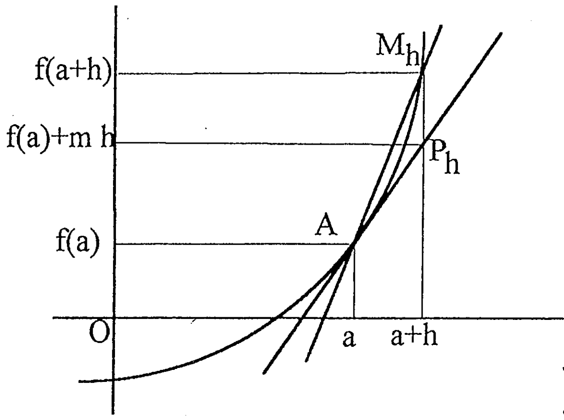
Comme précédemment la tangente « coupe » la courbe en deux points confondus en A et elle recoupe la courbe en un autre point d'abscisse -4

c) Etude de cette même fonction au voisinage de 0.

Cette fois, la courbe « traverse » sa tangente au point d'abscisse 0.

II Définition de la dérivabilité en un point a.

Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle ouvert contenant a



On trace la droite (D_m)de coefficient directeur m passant par le point A d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction f,

On trace la droite (AM_h) pour M_h point de la courbe d'abscisse a+h,

Soit P_h le point de (D_m)d'abscisse a+h,

Si $\overline{P_hM_h}$ est négligeable devant h, on dit alors :
- que la droite de coefficient directeur m est tangente à la courbe (C) en A
- que la fonction f est dérivable en a et que son nombre dérivé en a est m.

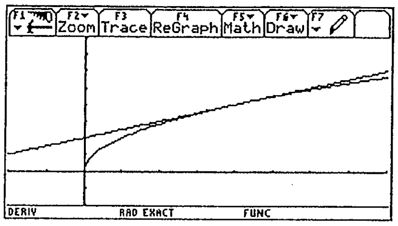
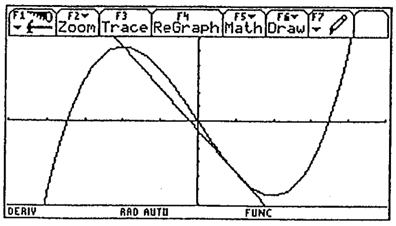
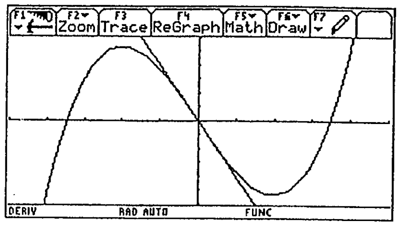
$\overline{P_hM_h}$ négligeable devant h signifie $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\overline{P_hM_h}}{h} = 0$ or $\overline{P_hM_h} = f(a+h) - (f(a) + m\ h)$

Les 3 expressions suivantes sont équivalentes

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + m\ h)}{h} = 0$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - m = 0$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m$$

Définition 1
Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle ouvert contenant a
Si le quotient $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a une limite finie **m** lorsque h tend vers 0, alors on dit que la fonction f est dérivable en a ; **m** est appelé nombre dérivé de f en a.

- S'il existe, le nombre dérivé m est le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe
- Le coefficient directeur de la tangente en A est la limite quand h tend vers O du coefficient directeur de la sécante (AM_h) : En effet $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la sécante (AM_h)
- La tangente en A d'abscisse a à la courbe représentative de la fonction est la droite d'équation $y = m(x - a) + f(a)$
- La tangente est un phénomène local.
  La tangente en A et la courbe ont en commun au minimum le point A compté 2 fois,
  - Il peut y avoir d'autres points communs,
  - La courbe peut traverser sa tangente en A, et dans ce cas A est compté un nombre impair de fois, minimum 3.

Fonction racine carrée	$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x$	$f(x)=\dfrac{x^3}{3}-4x$
		
La tangente au point d'abscisse 1 ne recoupe pas la courbe.	La tangente au point d'abscisse 1 recoupe la courbe au point d'abscisse -2.	La tangente au point d'abscisse 0 traverse la courbe en ce point.

Approximation affine.

Si on pose $\dfrac{\overline{P_hM_h}}{h}=\varphi(h)$, on obtient $f(a+h)=f(a)+m\,h+h\,\varphi(h)$

- f(a)+ m h est une approximation affine de f au voisinage de a. Celle pour laquelle la différence $f(a+h)-(f(a)+m\ h)$ est négligeable devant h.

Définition 2
Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle ouvert contenant a
S'il existe un nombre réel m et une fonction φ tels que :
$f(a+h)=f(a)+m\ h+h\ \varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$, alors f est dérivable en a et son nombre dérivé est m.

III Quelques exemples de recherche de nombre dérivé en a.

La fonction .	Son nombre dérivé en a.
$f(x)=x^2$	2a
$f(x)=-3x+5$	-3 La tangente est confondue avec la droite.
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	pour $a\neq 0$ $\quad -\dfrac{1}{a^2}$
$f(x)=\sqrt{x}$	pour $a>0$ $\quad \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
$f(x)=\lvert -3x+5\rvert$	Pour $a<\dfrac{5}{3}$ $\quad$ -3 Pour $a>\dfrac{5}{3}$ $\quad$ +3 Pas dérivable en $\dfrac{5}{3}$

IV Dérivabilité à gauche et dérivabilité à droite

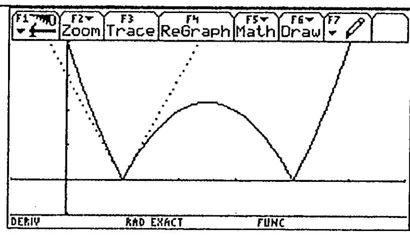
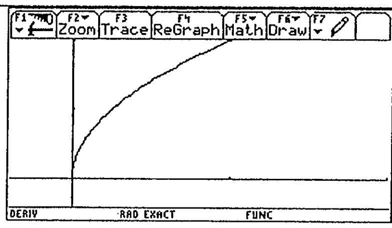
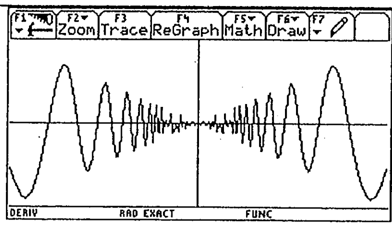
- Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle [a ; b]

Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie **m** lorsque h tend vers 0 en étant positif, alors on dit que la fonction f est dérivable à droite en a ; **m** est appelé nombre dérivé à droite de f en a.

- Soit f une fonction, définie en a et sur un intervalle [b ; a]

Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie **m** lorsque h tend vers 0 en étant négatif, alors on dit que la fonction f est dérivable à gauche en a ; **m** est appelé nombre dérivé à gauche de f en a.

V Cas de non dérivabilité en a .

• f pas définie en a	
• f dérivable à gauche en a et à droite en a mais nombres dérivés à gauche et à droite différents. $f(x)=\lvert x^2-5x+4\rvert$ pour a = 1 Deux demi-tangentes.	
• le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite infinie quand h tend vers 0 $f(x)=\sqrt{x}$ pour a=0 Une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.	
• le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0 $f(x)=x\sin(\dfrac{1}{x})$ si $x\neq0$ et $f(0)=0$ pour a = 0 Pas de tangente en A.	

ANNEXE 3

Enoncé du Devoir Commun N° 3

DEVOIR COMMUN N°3 de 1ère S

PROBLEME D'ANALYSE

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 10] par : $f(x) = 4x^3 - 60x^2 + 225x$
et sa courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:
1cm pour 1 unité en abscisses, 1cm pour 25 unités en ordonnées.

1°) Calculer la fonction dérivée de la fonction f.

2°) Etudier le signe de f' sur l'intervalle [0 ; 10].

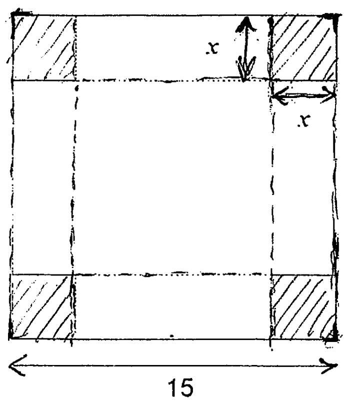
3°) En déduire le tableau de variation de f sur cet intervalle.

4°) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 5.

5°) Tracer (C_f) et (T) .

Partie B

On considère une feuille de metal carrée de côté 15cm, dans laquelle on veut réaliser une boîte parallélépipédique selon le schéma ci-contre , en coupant avant soudure quatre carrés de côté x, puis en relevant les quatre bords .



1°) Dans quel intervalle **I** peut varier x ?

2°) Ecrire le volume V(x) de la boîte en fonction de x et montrer quepour tout x de **I**, V(x) = $f(x)$.

3°) Calculer V(5); factoriser V(x) - 125 puis résoudre dans **I** l'équation:

$$V(x) = 125$$

4°) Pour quelle valeur de x la boîte construite posséde-t-elle un volume maximum ?
Justifier et donner la valeur de ce volume .

ANNEXE 4

Enoncé du Devoir Commun N° 5

1ères S	Devoir commun N°5	Mercredi 3 Avril 1996

Exercice 1 : (20 points)

On considère la fonction définie sur l'intervalle I =] -1 ; +∞[par : $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2}{x^3+1}$
et sa courbe représentative (Cf) dans un repère orthonormal d'unité 2 cm

A] Questions préliminaires : (les résultats seront utiles pour la partie B])

1°) Justifier que pour tout x de l'intervalle I,

$$si\ x \geq -1,\ alors\ x^3 \geq -1$$

En déduire le signe de x^3+1 sur I.

2°) On pose $g(x) = -x^3 - x + 2$. Factoriser $g(x)$ et déterminer son signe pour tout x dans I.

B] 1°) a) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x)$

b) Vérifier que, pour tout x de] 0 ; +∞ [, $f(x) = \dfrac{1+\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}}$.

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Déduire de a) et b) les asymptotes éventuelles à la courbe représentative de f.
(On notera (D) l'asymptote au voisinage de +∞ et (Δ) celle au voisinage de -1.)

2°) Montrer que sur I, $f'(x)$ est du signe de $3x\,g(x)$.
Etudier le signe de $f'(x)$ sur I et construire le tableau de variation de f.

3°) Résoudre dans I l'équation $f(x) - 2 = 0$; étudier la position de (Cf) par rapport à la tangente (Δ') à (Cf) au point d'abscisse x = 0.

4°) Construire les droites (D), (Δ), (Δ') et la courbe (Cf) dans le repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 2cm.

ANNEXE 5

Enoncé du Devoir Commun N° 6

1 éres S	DEVOIR COMMUN N°6	Mercredi 5 Juin 1996

Exercice 1 (sur 13 points)

1. Soit $(U_n)_{n\in N^*}$, la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{9}{2} \\ u_{n+1} = -3\,u_n + 2 \end{cases}$ pour tout entier $n \geq 1$

   a) Calculer les valeurs exactes des termes u_1, u_2, u_3, u_4.

   b) Cette suite $(U_n)_{n\in N^*}$ est-elle géometrique? arithmétique?(justifier vos réponses).

2. Soit $(V_n)_{n\in N^*}$ la suite définie par la relation $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$, pour tout entier $n \geq 1$.

   a) Calculer la valeur de v_1 .

   b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n ; en déduire que la suite $(V_n)_{n\in N^*}$ est une suite géométrique de raison -3.

   c) Exprimer v_n en fonction de n, pour $n\geq 1$

   d) En déduire l'expression du terme u_n en fonction de n.

3. Soit la somme $S = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ des n premiers termes de la suite $(V_n)_{n\in N^*}$

   a) Montrer que $S = 1 - (-3)^n$

   b) En déduire l'expression de la somme $S' = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ en fonction de n.

   c) Calculer S'_{10}.

Exercice 2 (sur 13 points)

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \cos 2x + 2\sin x + 3$.

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

unités : 6 cm pour π sur l'axe des abscisses et 2cm pour 1 unité sur l'axe des ordonnées.

Etude de f sur [-π;π]

1. Montrer que 2π est la période de f.
2. Calculer f ' (x) et montrer que $f'(x) = 2\cos x\,(1 - 2\sin x)$.
3. a) Résoudre l'inéquation $\cos x \leq 0$ sur [-π;π].

   b) Résoudre, à l'aide du cercle trigonométrique, l'inéquation $1 - 2\sin x \geq 0$ sur [-π;π].

   c) Déduire de a) et b) le signe de f ' (x) sur [-π;π].

   d) Dresser le tableau de variation de f sur [-π;π].
4. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Tracer soigneusement les tangentes aux points de (C) où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Tournez S.V.P.→

ANNEXE 6

Enoncé du Devoir Spécifique TI-92

Enoncé du devoir spécifique TI-92

I Vous devez dériver f telle que $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{6})$.

1. Faites le calcul à la main et avec la TI92.
2. Si les résultats se présentent sous des formes différentes, expliquez l'équivalence des deux expressions.

II Etude de fonction.

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x^3 + 24x^2 + 47}{4x - 8}$

ATTENTION :

<u>On ne vous demande pas de rédiger le détail des calculs</u> pour les calculs de dérivée, de valeurs exactes de fonction, les factorisations, les résolutions d'équations, les calculs algébriques. Vous pouvez donner directement les résultats fournis par la machine, à condition d'indiquer les commandes utilisées.

Par contre, on vous demande <u>de rédiger les raisonnements comme d'habitude et de justifier soigneusement</u> les études de signe et les calculs de limites

1. Etudier le sens de variation de f.
2. Etudier les limites de f au voisinage de 2, de $-\infty$ et de $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer un polynôme P dont la courbe représentative soit asymptote à celle de f au voisinage de $-\infty$ et de $+\infty$. Vous justifierez soigneusement votre réponse.
5. Donner les caractéristiques (*xmin*, *xmax*, *ymin*, *ymax*) d'une fenêtre qui permette de mettre en évidence le sens de variation de f et son comportement au voisinage de 2, de $-\infty$ et de $+\infty$.
6. Reproduisez l'allure du tracé obtenu dans cette fenêtre :
   - pour la fonction f,
   - pour les droite et courbe asymptotes trouvées dans les questions 2 et 4. (On tracera les asymptotes en rouge).

ANNEXE 7

Correction du Devoir Spécifique TI-92

Correction du devoir spécifique TI-92

Exercice I : *La fonction est de la forme f(ax+b) f étant la fonction sinus a = 3 et b =* $\frac{\pi}{6}$ *donc*

$f'(x) = -3\sin(3x - \frac{\pi}{6})$. *Le calcul à la machine donne :* $f'(x) = 3\cos(3x + \frac{\pi}{3})$.

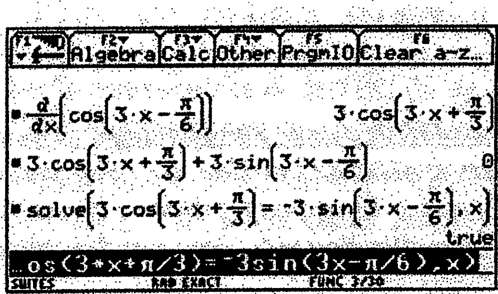
Montrons l'équivalence des deux résultats

<u>A la main :</u>

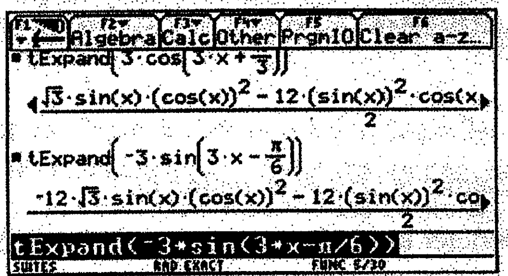
$$f'(x) = -3\sin(3x - \frac{\pi}{6}) = 3\sin(\frac{\pi}{6} - 3x) = 3\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} - 3x)) = 3\cos(3x + \frac{\pi}{3})$$

<u>A la machine :</u>

soit calcul de la différence
soit la résolution de l'équation.



Il est possible aussi d'utiliser la fonction
tExpand
sur les deux expressions



Exercice II :

1) La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme quotient de deux fonctions dérivables.

$$f'(x) = \frac{8x^3 - 96x^2 - 47}{4(x-2)^2}$$

On factorise la dérivée pour en étudier le signe

$$f'(x) = \frac{(2x+1)(4x+3\sqrt{21}-1)(4x-3\sqrt{21}-1)}{16(x-2)^2}$$

On réalise un tableau de signe pour étudier le signe du numérateur, le dénominateur étant toujours positif.

(voir tableau de variation plus loin)

2) Etude des limites :

<u>En plus ou moins l'infini un polynôme a même limite que son terme de plus haut degré donc</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^3}{4x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 = +\infty$$

Etude en 2

$$\lim_{x\to 2}(4x^3+24x^2+47) = 175$$

$$\lim_{x\to 2}(4x-8) = 0$$

donc $\lim_{x\to 2}|f(x)| = +\infty$ Il faut étudier à gauche et à droite de 2

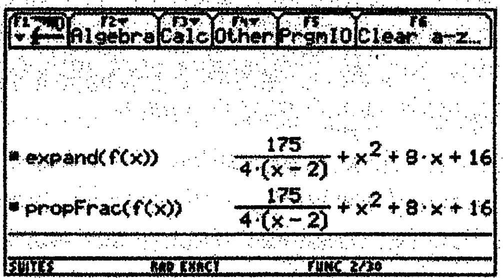
Si x<2 alors 4x-8<0 donc $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$	Si x> 2 alors 4x-8>0 donc $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

3) Tableau de variation de f

x	$-\infty$	$\frac{-3\sqrt{21}+1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3\sqrt{21}-1}{4}$	2	$+\infty$
$x+\frac{1}{2}$	-	-	+	+	+	
$4x^2-2x-47$	+	-	-	-	+	
f'(x)	-	+	-	-	+	
f	$+\infty$ ↘ -7.8	↗	-5.25 ↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	$+\infty$ ↗ 85	

4) Recherche d'un polynôme asymptote

On utilise la fonction expand, ou ProFrac



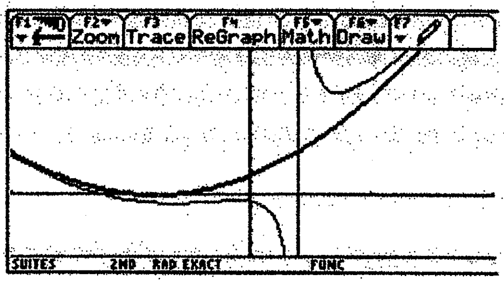
Comme pour une asymptote droite, on montre que le polynôme $p(x)= x^2+8x+16$ est asymptote à la courbe représentative de f en calculant la limite de f(x)-p(x) lorsque x tend vers plus ou moins l'infini.

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-p(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{175}{4(x-2)}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{175}{4x}\right) = 0$$

5) et 6) Courbe représentative de f :

6)

On désire voir l'asymptote verticale x= 0.5
le polynôme asymptote $p(x)= x^2+8x+16$
et les extremums de f.
une fenêtre adaptée est par exemple
(-10,10,-50,120)



Annexe 8

Le texte du premier questionnaire

QUESTIONNAIRE 1

1. Nom :
2. Prénom :
3. Classe :
4. Établissement :
5. Sexe : F ☐ G ☐

LES CALCULATRICES ET VOUS

6. Disposez-vous d'une calculatrice ? Oui ☐ Non ☐
7. Laquelle ? Marque : Nom :
8. Depuis combien de temps l'avez-vous ?

   Moins de deux mois ☐ Moins d'un an ☐ Plus d'un an ☐

9. Est-ce une calculatrice programmable ? Oui ☐ Non ☐
10. Est-ce une calculatrice graphique ? Oui ☐ Non ☐
11. En aviez-vous une autre avant? Oui ☐ Non ☐
12. Si oui, laquelle ? Marque : Nom :

<u>L'année dernière,</u> si vous aviez une calculatrice, l'utilisiez-vous :

13. En classe ? Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐
14. A la maison ? Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐

Utilisez-vous <u>votre calculatrice actuelle</u> :

15. Pour faire des calculs numériques ? Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐
16. Pour tracer des graphiques ? Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐
17. Pour programmer ? Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐
18. Utilisez-vous les mémoires ? Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐
19. Utilisez-vous des formules ou programmes que vous avez entrés dans votre calculatrice ?

    Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐

20. Pouvez-vous citer des exemples de formules et programmes que vous avez entrés dans votre calculatrice ?

....

....

<u>Si vous avez une calculatrice graphique,</u> utilisez-vous :

21. Le zoom Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐
22. La commande "Trace" Jamais ☐ Parfois ☐ Souvent ☐

23. La commande "Range" Jamais ❐ Parfois ❐ Souvent ❐

24. Pensez-vous bien connaître les possibilités de votre calculatrice ?

Oui ❐ Non ❐

25. Avez-vous appris à vous servir de votre calculatrice surtout :

Avec le professeur ❐ En manipulant ❐ Avec le mode d'emploi ❐ Avec des copains ❐

26. Avez-vous eu en classe, <u>les années précédentes,</u> des séances spécialement consacrées aux calculatrices ? Oui ❐ Non ❐

27. A votre avis, les professeurs de maths doivent-ils faire une initiation aux calculatrices ?

Oui ❐ Non ❐

28. Si vous avez répondu "Oui", précisez ce qu'à votre avis les professeurs doivent apprendre à leurs élèves ; Si vous avez répondu "Non", expliquez pourquoi :

....

....

29. Est-ce que votre calculatrice a parfois affiché des résultats surprenants pour vous ?

Oui ❐ Non ❐

30. Si oui, pouvez-vous en donner un ou plusieurs exemples ?

....

....

31.. Est-ce que votre calculatrice vous a parfois entraîné à commettre des erreurs ?

Oui ❐ Non ❐

32. Si oui, pouvez-vous donner un ou plusieurs exemples ?

....

....

33. Vérifiez-vous les résultats affichés par votre calculatrice ?

Jamais ❐ Parfois ❐ Souvent ❐.

34. Comment ? Donnez un ou plusieurs exemples :

....

....

Pour chacune des phrases ci-après cochez la case correspondant à votre opinion :

	tout à fait d'accord	plutôt d'accord	plutôt pas d'accord	pas du tout d'accord	sans opinion
35. La calculatrice me fait gagner du temps					
36. La calculatrice m'aide à résoudre les problèmes					

37. La calculatrice me permet de vérifier mes résultats					
38. La calculatrice m'aide à préparer les contrôles					
39. La calculatrice me fait perdre du temps					

40. Avez-vous utilisé avant cette année scolaire votre calculatrice durant un contrôle ?

Jamais ❑ Parfois ❑ Souvent ❑

41. Etes-vous pour ou contre l'utilisation de la calculatrice aux contrôles ?

Oui ❑ Non ❑ Ca dépend ❑

42. Pourquoi ?

....

....

43. Utilisez-vous la calculatrice dans d'autres matières ? Oui ❑ Non ❑

44. Si oui, lesquelles ?

LES LOGICIELS ET VOUS

Avez-vous déjà utilisé avant cette rentrée scolaire un logiciel :

	jamais	une ou deux fois	entre trois et dix fois	plus de dix fois	lequel ou lesquels ?
45. De traitement de textes					
46. De mathématiques					
47. De dessin					
48. Un tableur					
49. Un jeu informatique					
50. D'autres logiciels					

51. Y a-t-il un ordinateur chez vous? Oui ❑ Non ❑

52. L'utilisez-vous? Jamais ❑ Parfois ❑ Souvent ❑.

Chez vous, y-a-t-il des personnes utilisant :

53. Une calculatrice scientifique?

Parents ❑ Frères ou sœurs ❑ Autre ❑ (précisez)

54. Un ordinateur ?

Parents ❑ Frères ou sœurs ❑ Autre ❑ (précisez)

....

55. Avez-vous suivi l'option informatique, participé à des ateliers ou à un club informatique?

Oui ❒ Non ❒

56. Pour apprendre des mathématiques, les ordinateurs sont-ils, à votre avis :

Utiles ❒ Dangereux ❒ Sans effet ❒

57. Précisez vos raisons :

....

....

POUR CEUX QUI ONT DEJA UTILISE UN LOGICIEL DE CONSTRUCTION GEOMETRIQUE

Quel(s) logiciel(s) avez-vous utilisé(s) ?

	Oui	Non
58. Le géomètre		
59. Géoplan		
60. Géospace		
61. Calques géométriques		
62. Atelier de géométrie		
63. Autres		

En tout, vous les avez utilisés:

64. Une ou deux fois ❒ Entre trois et dix fois ❒ Plus de dix fois ❒

65. En classe ❒ Au CDI ❒ En atelier ou club ❒ A la maison ❒

Autre ❒ (préciser)

66. Selon vous, que permettent de faire les logiciels que vous avez utilisés ?

....

....

67. Trouvez-vous difficile de les utiliser? Oui ❒ Non ❒

68. Précisez vos raisons :

....

....

S'ils ont été utilisés en classe, l'étaient-ils :

	Oui	Non
69. Surtout par le professeur		
70. Surtout par les élèves		

71. Pour quelles activités (par exemple, illustrer le cours, chercher des exercices, les corriger, résoudre des problèmes différents des problèmes usuels...) ? Donnez si possible des exemples précis :

....

....

A votre avis, de tels logiciels peuvent-ils aider à

	Oui	Non	Comment ?
72. Trouver les propriétés d'une figure			
73. Démontrer ces propriétés			
74. Résoudre des problèmes de constructions géométriques			

75. Pour apprendre la géométrie sont-ils, à votre avis :

Utiles ❒ Dangereux ❒ Sans effet ❒

76. Précisez vos raisons :

....

....

POUR CEUX QUI ONT DEJA UTILISE DERIVE

En tout, vous l'avez utilisé :

77. Une ou deux fois ❒ Entre trois et dix fois ❒ Plus de dix fois ❒

78. En classe ❒ Au CDI ❒ En atelier ou club ❒ A la maison ❒

Autre ❒ (préciser)

S'il a été utilisé en classe, l'était-il :

	Oui	Non
79. Surtout par le professeur		
80. Surtout par les élèves		

81. Pour quelles activités (par exemple, illustrer le cours, chercher des exercices, les corriger, résoudre des problèmes différents des problèmes usuels...) ? Donnez si possible des exemples précis :

....

....

82. Selon vous, que permet de faire ce logiciel de plus que votre calculatrice?

....

....

83. Trouvez-vous difficile de l'utiliser? Oui ☐ Non ☐

84. Précisez vos raisons :

....

....

85. Savez-vous utiliser des fenêtres graphiques ? Oui ☐ Non ☐

86. Savez-vous utiliser les touches [F3] et [F4] ? Oui ☐ Non ☐

A votre avis, DERIVE peut-il vous aider à:

	Oui	Non	Comment ?
87. Organiser vos calculs			
88. Vérifier vos résultats			
89. Résoudre des problèmes plus difficiles			
90. Comprendre des notions mathématiques (préciser lesquelles)			

91. Pour apprendre l'algèbre ou les fonctions, à votre avis, DERIVE est-il :

Utile ☐ Dangereux ☐ Sans effet ☐

92. Précisez vos raisons :

....

Annexe 9

Le texte du deuxième questionnaire

QUESTIONNAIRE 2

1. Nom :
2. Prénom :
3. Classe :
4. Etablissement :
5. Sexe : F ❐ G ❐

6. Actuellement, estimes-tu te débrouiller avec la TI92
Pas très bien ❐ Moyennement ❐ Bien ❐
7. Peux-tu citer trois fonctionnalités que tu as appris à utiliser seul(e) ?
- ....
- ....
- ....

8. As-tu rencontré des difficultés pour apprendre à utiliser la TI92:
Oui ❐ Non ❐
9. Si oui, précise lesquelles : ....
....
....
10. Consultes-tu le mode d'emploi distribué en décembre ?
Jamais ❐ Parfois ❐ Souvent ❐
11. Précise les parties qui t'ont été le plus utiles : ....
....
....
12. L'as-tu complété ? Oui ❐ Non ❐
13. Consultes-tu le manuel Texas Instrument ?
Jamais ❐ Parfois ❐ Souvent ❐
14. Précise les parties qui t'ont été le plus utiles : ....
....
....
Par rapport à une calculatrice graphique,
15. qu'est ce qui te paraît nouveau ? ....
....
....
16. qu'est ce qui te paraît moins bien ? ....
....
....
17. qu'est ce qui te paraît mieux ? ....
....
....
18. Qu'est-ce qui te plaît le plus dans cette machine ? (applications, fonctionnalités....)
....
....
....
19. As-tu été surpris par des résultats obtenus avec la TI92 Oui ❐ Non ❐
20. Si oui, donne des exemples : ....
....
....
La calculatrice TI92 t'est-elle utile :
21. en classe Beaucoup ❐ Un peu ❐ Pas du tout ❐

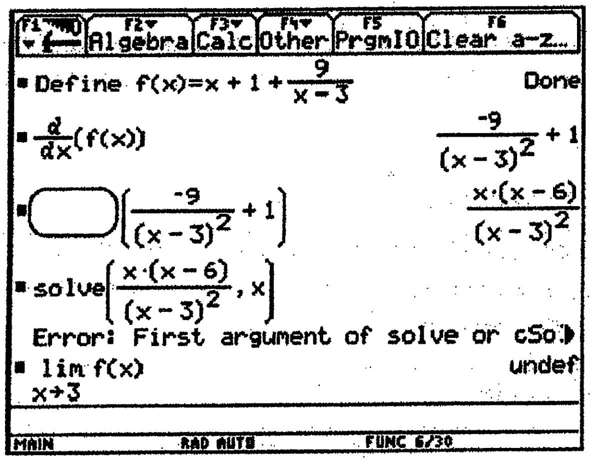
22. en contrôle Beaucoup ❐ Un peu ❐ Pas du tout ❐
23. à la maison Beaucoup ❐ Un peu ❐ Pas du tout ❐
Juges-tu que l'utilisation de la calculatrice **rétroprojetable**, en classe,
(Coche la case qui correspond à ton opinion)

	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord	Sans opinion
24. Fait gagner du temps					
25. Permet de mieux suivre les synthèses					
26. Va trop vite					
27. C'est mieux quand le prof écrit tout au tableau					

28. La TI92 t'a-t-elle aidé à comprendre une notion mathématique Oui ❐ Non ❐
29. Si oui précise : ....
....
....
30. Faire des mathématiques avec la TI92 c'est :
plus intéressant ❐ pareil ❐ moins intéressant ❐
31. Précise : ....
....
....
32. Faire des mathématiques avec la TI92 c'est :
plus facile ❐ pareil ❐ moins facile ❐
33. Précise : ....
....
....
34. Conserves-tu dans la mémoire de la TI92 :
ce qui a été fait en classe ❐
des jeux ❐
d'autres programmes ❐
des formules de math ❐
des formules d'autres disciplines ❐
autres (précise) ❐
....
....
35. Utilises-tu la TI92 pour d'autres matières Oui ❐ Non ❐
36. Si oui lesquelles ? ....
....
....

Voici un écran de TI92. L'utilisateur a libéré toutes les variables avec la touche F6 avant de commencer.

1→
2→
3→
4→
5→



36. Que dois-tu faire pour obtenir la ligne 1 : ....
....
....

37. Que dois-tu faire pour obtenir la ligne 2 : ....
....
....

38. Quelle commande a été effacée ligne 3 ? ....

39. Que dois-tu faire pour obtenir la ligne 3 complète : ....
....
....

40 Corrige l'erreur commise à la ligne 4 : ....
....
....

41. Quelle(s) commande(s) pour obtenir une réponse ou (des réponses) à la ligne 5 : ....
....
....

ANNEXE 10

Le texte du troisième questionnaire

QUESTIONNAIRE DE BILAN

1. Nom :
2. Prénom :

3. Depuis la fin du mois de décembre, tu as participé à une expérimentation avec la TI92. Quelle est globalement ton impression sur cette expérimentation ?
Très satisfait ❐ Plutôt satisfait ❐ Plutôt insatisfait ❐ Très insatisfait ❐

Si tu voulais expliquer à un élève d'une autre classe ce que tu as apprécié et ce que tu n'as pas apprécié dans cette expérimentation, que lui dirais-tu ?

4. J'ai apprécié :
....
....
....

5. Je n'ai pas apprécié :
....
....
....

6. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, tu aurais travaillé en mathématiques :
davantage ❐ à peu près autant ❐ moins ❐

7. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, en mathématiques, tu aurais appris :
davantage ❐ à peu près autant ❐ moins ❐

8. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, en mathématiques, tu aurais compris :
davantage ❐ à peu près autant ❐ moins ❐

9. As-tu l'impression que si tu n'avais pas eu cette calculatrice, en mathématiques, tu aurais eu des résultats :
meilleurs ❐ à peu près identiques ❐ moins bons ❐

10. Un élève d'une autre classe te dit : "Avec la TI92, même en étant nul en analyse, tu peux réussir tes contrôles". Que lui réponds-tu ?
....
....

11. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 très intéressante :
....
Explique pourquoi :
....
....

12. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 utile :
....
Explique pourquoi :
....
....

13. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 inutile :
....
Explique pourquoi :
....
....

14. Peux-tu citer un exemple de situation où tu as trouvé l'utilisation de la TI92 gênante :
....
Explique pourquoi :
....
....

Pour chacune des affirmations suivantes, coche la case qui correspond le mieux à ton opinion :

La TI92 :

	Tout à fait d'accord	Plutôt d'accord	Plutôt pas d'accord	Pas du tout d'accord	Sans opinion
15. Permet de faire en classe des activités plus intéressantes					
16. Oblige à se poser des questions					
17. Donne envie de chercher les exercices					
18. Fait perdre du temps					
19. Oblige à réfléchir davantage à ce que l'on fait					
20. Incite le professeur à poser des problèmes trop difficiles					
21. Peut aider à comprendre les mathématiques					
22. Incite à ne pas apprendre les choses indispensables					
23. Aide à résoudre les problèmes					
24. Oblige à apprendre des choses inutiles					

25. Est-ce-que l'utilisation de la TI92 a modifié ton point de vue sur les calculatrices ?
Oui ❒ Non ❒
Explique ta réponse :
....
....

26. Quand la TI92 fournit un résultat inattendu, que fais-tu ? (donne des exemples)
....
....

27. Si tu pouvais garder la calculatrice pendant les vacances, y-a-t-il des choses que tu aimerais apprendre à faire ou à mieux faire avec elle ? Oui ❒ Non ❒
Si tu as répondu "Oui", peux-tu donner des exemples :
....
....

28. Aimerais-tu avoir une TI92 l'année prochaine ?
Oui ❒ Non ❒ Sans opinion ❒

29. Si le lycée pouvait mettre à ta disposition une TI92 pour les épreuves du bac à condition que tu t'engages à participer à une séance de TD hebdomadaire d'une heure avec TI92 (en plus de l'horaire normal), serais-tu volontaire ? Oui ❒ Non ❒

ANNEXE 11

Enoncé intégral du deuxième entretien

Entretiens du 30 Mai 1997-Chartres

Exercice 1

Soit $f(x) = x^2$

*Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse $\sqrt{3}$ (y=3.46x-3.00) (1)

*Y a-t-il un autre moyen de trouver l'équation de la tangente. (y=$2\sqrt{3}$x-3) (2)

*Est-ce que (1) et (2) désignent la même droite?

*Laquelle est la tangente?

*Qu'en est-il alors de (1)?

Exercice 2

Soit $f(x) = \sqrt{-4x^2 + 121}$

*Faire tracer le graphe de cette fonction

*Faire, à partir du graphe, des conjectures sur les propriétés de cette fonction :

- -Est-ce qu'elle est partout définie?
- -Parité
- -Sens de variation
- -Extremums, points d'arrêt

*Justifications:

- -Interpréter le graphe *ZoomStd*
- -Pourquoi est-on sûr d'avoir toute la courbe?

Exercice 3

Soit $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$

*Quelles sont les asymptotes à la courbe? (Etude des branches infinies)

f

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM

Vous pouvez soit :

- Consulter notre site WEB

http://www.irem-paris7.fr.st/

- Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

RESUME

Cette thèse porte globalement sur l'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement des mathématiques au lycée et, plus spécifiquement sur la façon dont se construit et évolue le rapport des élèves à cet objet complexe, sur le rôle que jouent les mathématiques dans la construction et l'évolution de ce rapport.
Notre cadre théorique s'appuie essentiellement sur les concepts développés dans l'approche anthropologique du didactique et en ergonomie cognitive, ainsi que sur un travail de nature plus spécifique qui se traduit par la mise en évidence d'une typologie des contraintes liées à l'utilisation de tels objets techniques.
L'expérimentation liée à cette recherche a été menée sur deux années scolaires, dans le cadre d'un projet national portant sur l'utilisation dans l'enseignement de mathématiques en lycée de calculatrices complexes. Notre travail se situe plus spécifiquement au niveau de la première S dans le domaine des fonctions, et consiste en l'étude de deux types de *genèses instrumentales* : l'une qui se situe au niveau individuel et l'autre qui concerne plutôt la dimension institutionnelle.
Ce travail met en évidence la complexité des processus de *genèse instrumentale*, la façon dont cette genèse imbrique connaissances mathématiques et connaissances de la machine, ainsi que le rôle important que jouent les choix institutionnels dans cette genèse. Par ailleurs, divers phases et phénomènes didactiques liés à la *genèse instrumentale* sont mis en évidence.

MOTS CLES

Didactique des mathématiques
Fonctions, variations
Analyse
Instrumentation
Genèse instrumentale
Typologie de contraintes
Calculatrices symboliques
Praxéologies, ostensif/non ostensif
Lycée
Ergonomie cognitive

Editeur : IREM
Université PARIS VII
Directeur responsable de la
publication : M. ARTIGUE
2 Place Jussieu. Case 7018
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : Septembre 2000
ISBN : 2-86612-202-X